Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az

$$f : [0; 5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

függvényt. *(4 pont)*

b) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az

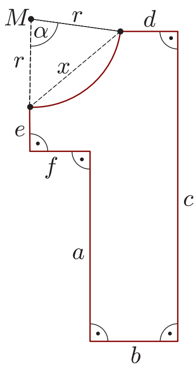
$$|x^2 - 4x + 3| = p$$

egyenletnek a $[0; 5]$ intervallumon? *(6 pont)*

2. *a*) Az $\overline{abc}$ háromjegyű szám kilencszerese az $\overline{xabc}$ alakú négyjegyű szám. Bizonyítsuk be, hogy az $\overline{abc}$ szám osztható 125-tel. *(6 pont)*

b) Igazoljuk, hogy $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\lg(7^x) + \lg(7^{-x})}{2} \leqslant \lg\left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right). \qquad (8\ pont)$$



3. Az *ábrán* egy gyerekek számára készült játékszőnyeg egyik – 1-es formájú – darabkája látható. Megállapítottuk, hogy centiméterben mérve $a = 13$, $b = 6$, $c = 21$, $d = 5$, $e = 3$, $f = 4$ és $r = 5{,}5$.

a) Határozzuk meg az α szög nagyságát. *(6 pont)*

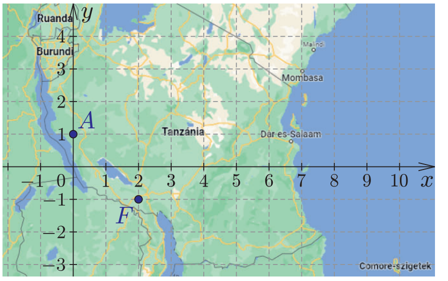
b) Számítsuk ki az 1-es formájú darabka területét. *(7 pont)*

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$9^{\mathrm{tg}^2(x)} + 3^{\frac{1}{\cos^2(x)}} - 4 = 0. \qquad (14\ pont)$$

II. rész

5. Egy katonai békefenntartó szervezet két egysége állomásozik Tanzániában. Az ország koordináta-rendszerben elhelyezett térképén az egységek bázisainak koordinátái: $A(0; 1)$ és $F(2; -1)$. Egy közös hadgyakorlat tervezésénél az egységek parancsnokai egy olyan találkozási (P) pontot jelölnek ki, mely mindkét bázistól egyenlő távolságra van és egy stratégiai fontosságú autóút mentén fekszik, melynek nyomvonala leírható az $x+y=4$ egyenletű egyenessel.



a) Hol találkoznak és milyen távol van ez a pont az egységek bázisaitól? (Egy egység a koordinátasíkon 150 kilométernek felel meg a valóságban.) (*8 pont*)

A hadgyakorlat biztosítása érdekében a parancsnokok el szeretnének helyezni egy radart az érintett területen, mely körkörös mozgással képes „letapogatni” az egész területet, így minden ellenséges mozgás előre láthatóvá válik. A parancsnokok azt a pontot jelölték ki, amely az A; F és P pontok mindegyikétől egyenlő távolságra van.

b) Határozzuk meg a radar által letapogatott kör területét. E kör területe hány százalékkal nagyobb a hadgyakorlat és a két bázis által meghatározott háromszög területénél? (*8 pont*)

6. Kati és Attila szabályos érmékkel játszik, ami azt jelenti, hogy a feldobásnál a fej és az írás valószínűsége egyenlő. Kati zsebében három darab 100 és öt darab 200 forintos, míg Attila zsebében két darab 100 és három darab 200 forintos érme van. Mindketten kivesznek találomra egy-egy érmét a zsebükből.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a kettőjük által kihúzott érmék összege pontosan 300 forint? (*4 pont*)

Ezután Attila 10-szer feldob egy 200 forintos érmét.

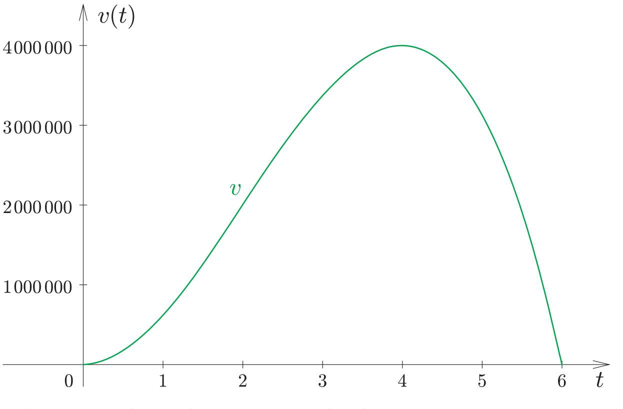
b) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy Attila legalább két alkalommal fejet dob. (*5 pont*)

c) Hányszor kell dobnia Katinak egy érmével, hogy 90%-os valószínűséggel kijelenthesse, hogy a dobások között volt legalább egy fej? (*7 pont*)

7. Egy vírusfertőzés alatt az 1 milliliter vérben található vírusok száma jól közelíthető az *ábrán* látható v függvénnyel. A v függvény megadható a

$$v(t)=a\cdot(6-t)\cdot t^2$$

$(a\in\mathbb{R})$ alakban, ahol t a megfertőződéstől eltelt napok számát, $v(t)$ pedig t nap elteltével az 1 milliliter vérben található vírusok számát jelenti.



Tudjuk, hogy a megfertőződés után 4 nappal 4 millió vírus található 1 milliliter vérben.

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét. (*2 pont*)

b) Adjuk meg az 1 milliliter vérben lévő vírusok maximális számát. (*8 pont*)

c) Hány nap után nőtt a vírusok száma a leggyorsabban? (*3 pont*)

d) Határozzuk meg a grafikon segítségével, hogy megközelítőleg hány napon keresztül van 3 milliónál több vírus 1 ml vérben. (*3 pont*)

8. A Minta család négy tagjának A betűvel kezdődik a keresztneve. Ebben a családban négyen úsznak és négyen fociznak rendszeresen. A családtagokról még azt is tudjuk, hogy

1) csak Andris és Attila jár úszni és focizni is;

2) egyedül Adrienn nem űzi egyik sportágat sem;

3) Norbi próbálja testvérét, Annát az úszóktól hozzájuk, a focistákhoz csábítani – sikertelenül.

a) A fent leírtak alapján legalább hány tagja van a Minta családnak? (*5 pont*)

Egyik hétvégén esett az eső, ezért Anna, Adrienn, Andris és Attila barátaikkal otthon játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 5-nél nagyobb és 8-nál kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

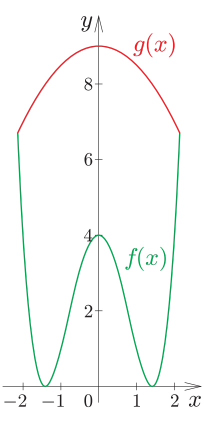
b) Legfeljebb hány tagú lehetett a baráti társaság? (*3 pont*)

Egy másik alkalommal Anna, Adrienn, Andris és Attila osztálytársaikkal (Marcival, Marcsival, Miskával és Magdával) színházba mentek. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) Hány különböző ülésrendben foglalhat helyet a 8 ember, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek nem kerülhetnek egymás mellé? (*5 pont*)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a fent leírt ülésrend alakul ki, ha minden ülésrendet egyenlően valószínűnek tekintünk? (*3 pont*)

9. Egy fogászati cég logójának alsó íve modellezhető az $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ polinomfüggvény segítségével. Az A, B és C pontok mindegyike a görbére illeszkedik: $A = (-2; 4)$, $B = (0; 4)$, $C = \left(\sqrt{2}; 0\right)$.



a) Határozzuk meg a megadott pontok segítségével az f függvény együtthatóit. (*5 pont*)

A cég szeretné a fog alakú logót rézmetszet formájában elkészíttetni. Az alakzatot az f és g függvények grafikonjainak segítségével lehet modellezni:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4;\ g(x) = -0,5x^2 + 9,$$

ahol $x, f(x), g(x)$ centiméterben mért távolságok. A függvénygrafikonok az *ábrán* láthatóak.

b) Adjuk meg a következő állítások logikai értékét. (*2 pont*)

Állítás	**Igaz**	**Hamis**
A logó felső határoló íve illeszkedik a g-jelű függvény grafikonjára.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény maximum 3 szélsőértékkel rendelkezik.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény inflexiós pontjainak száma legalább kettő.		

c) Mekkora az elkészített logó térfogata, ha vastagsága 2 centiméter? (*9 pont*)

Keszeg Attila Tibor
Veszprém

Megoldásvázlatok a 2023/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő feladatokat:*

a) $|\sin x| > \cos x - 1$; (*5 pont*)

b) $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Nézzük meg a relációs jel két oldalán levő függvények értékkészletét:

$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1, \quad \text{illetve} \quad -2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0.$$

Ezekből következik, hogy a feladatban szereplő egyenlőtlenség a

$$|\sin x| = \cos x - 1 = 0$$

eset kivételével mindig teljesül. Ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$