II. díjban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesül

Németh Márton Tamás, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Erdős Gábor* és *Dobos Sándor*).

Dicséretben részesülnek két feladat teljes vagy lényegében teljes megoldásáért

Chrobák Gergő, a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gaál Istvánné* és *Balázs Tivadar*),

Csonka Illés, a pécsi Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanára *Baráti Ákos*),

Czanik Pál, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai *Lenger Dániel* és *Kocsis Szilveszter*),

Fleiner Zsigmond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint* és *Gyenes Zoltán*),

Fülöp Csilla, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Mike János*),

Molnár-Szabó Vilmos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Ádám Réka, Fazakas Tünde* és *Fey Dávid*),

Móricz Benjamin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Ádám Réka, Dobos Sándor, Fazakas Tünde* és *Szűcs Gábor*),

Seres-Szabó Márton, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Fazakas Tünde* és *Hujter Bálint*),

Simon László Bence, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Hujter Bálint, Surányi László, Mazug Péter* és *Sokvári Olivér*).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Egy négyzetet felbontottunk* 2022 *téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?*

Megoldás. A négyzetet $n-1$ darab, az egyik oldalával párhuzamos egyenessel n téglalapra oszthatjuk. A négy eredeti oldalegyenessel együtt ez összesen $(n-1)+4=n+3$ egyenest jelent.

Most négy bizonyítást adunk arra, hogy $(n+3)$-nál több különböző egyenest nem kaphatunk, tehát a feladat kérdésére a válasz 2025.

1. bizonyítás: Legyen a négyzet $N=[a,b]\times[c,d]$, a kis téglalapok $T_i=[a_i,b_i]\times$ $\times[c_i,d_i]$, $i=1,\dots,n$. Be kell látnunk, hogy

$$\big|\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\}\big|+\big|\{c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n\}\big|\leqslant n+3.$$

Legyen V a vízszintes oldalegyenesek halmaza, kivéve az $(y=d)$ egyenest, ami N felső oldalegyenese, és legyen F a függőleges oldalegyenesek halmaza, kivéve az $(x=a)$ és $(x=b)$ egyeneseket, amelyek N függőleges oldalegyenesei. Mivel $V\cup F$ nem tartalmazza N három oldalegyenesét, elég belátnunk, hogy $|V\cup F|\leqslant n$.

Tetszőleges $\ell\in V\cup F$ egyenesre definiáljuk a $p(\ell)$ pontot a következő módon.

Ha ℓ vízszintes, akkor legyen $p(\ell)$ a $T_1,\dots,T_n$ kis téglalapok ℓ-en levő csúcsai közül a leginkább balra lévő. Ha ℓ függőleges, akkor pedig a legalsó. Könnyen látható, hogy minden $p(\ell)$ pont egy kis téglalap bal alsó sarka, ezért elég belátni, hogy a p leképezés injektív a $V\cup F$ halmazon.

Az világos, hogy ha ℓ és ℓ' különbözők és mindketten vízszintesek, vagy mindketten függőlegesek, akkor $p(\ell)\neq p(\ell')$.

Tegyük most fel, hogy $(y=\beta)=h\in V$, $(x=\alpha)=v\in F$ és $p(h)=p(v)=$ $=(\alpha,\beta)$. Mivel F nem tartalmazza az $(x=a)$ egyenest, $\alpha>a$. Ha $\beta=c$, akkor $p(h)=(a,c)\neq p(v)$, ezért $\beta>c$. Tehát ha $\varepsilon>0$ elég kicsi, akkor az $(\alpha-\varepsilon,\alpha)\times\{\beta\}$ nyílt szakaszt tartalmazza egy $T_j=[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]$ kis téglalap a belsejében. De ekkor $b_j=\alpha$ és $c_j<\beta<d_j$, tehát a (b_j,c_j) csúcs v-n van és $c_j<\beta$, ami ellentmond $p(v)$ választásának.

Ezzel beláttuk, hogy legfeljebb $n+3$ oldalegyenes van.

2. bizonyítás: Tegyük fel, hogy van olyan e egyenes, amely metszi az N négyzet belsejét és pontosan egy T kis téglalap alsó oldalegyenese. Ekkor módosíthatjuk úgy a felbontást, hogy a kis téglalapok száma és az oldalegyenesek száma is pontosan eggyel csökken: az e egyenes másik, alsó oldalán lévő, T-vel szomszédos téglalapokat meghosszabbítjuk e-n keresztül úgy, hogy T megszűnik. Hasonlóan járhatunk el, ha van olyan e egyenes, amely metszi N belsejét és pontosan egy T kis téglalap felső, jobb oldali vagy bal oldali oldalegyenese. Hajtsuk végre ezt a műveletet, amíg lehetséges, tegyük fel, hogy a kapott felosztásban m kis téglalap van. Elég a kapott felosztásra belátni az állítást, hogy az oldalegyenesek száma legfeljebb $m+3$. Legyen O a kis téglalapok oldalegyeneseinek a halmaza, $O'\subset O$ pedig az olyan oldalegyenesek halmaza, amelyek N-nek nem oldalegyenesei. Tudjuk, hogy most minden O'-beli oldalegyenes legalább négy kis téglalaphoz tartozik, ugyanakkor egy kis téglalaphoz legfeljebb négy O'-beli oldalegyenes tartozik. Ebből azt kapjuk, hogy $|O'|\leqslant m$. Ráadásul azokhoz a téglalapokhoz, amelyeknek van N-nel közös oldalegyenese, legfeljebb három O'-beli oldalegyenes tartozik. Ezért $|O'|\leqslant m-1$. Mivel $|O|=|O'|+4$, $|O|\leqslant m+3$, ezzel beláttuk az állítást.

3. bizonyítás: A következő állítást igazoljuk, n-re vonatkozó indukcióval: Egy T téglalapot n kisebb téglalapra bontva a különböző oldalegyenesek száma legfeljebb $n+3$. Az $n=1$ eset triviális, ilyenkor négy oldalegyenes lesz. Tegyük fel, hogy $n>1$ és $(n-1)$-ig már beláttuk az állítást. A vízszintes oldalegyenesek közül a legalsó T alsó oldala, legyen e alulról a második. Ha az e egyenes T felső oldala, akkor

T-t $n-1$ darab függőleges egyenessel bontottuk fel, ilyenkor éppen $n+3$ különböző oldalegyenes van. Tegyük fel, hogy e nem T felső oldala. Mivel e egy oldalegyenes volt, van legalább egy olyan kis téglalap, amelynek e a felső oldala. Tegyük fel, hogy k ilyen kis téglalap van, nevezzük ezeket *alacsony* téglalapoknak.

Vágjuk el T-t és az e-t metsző kis téglalapokat az e egyenessel. Legyen a T téglalap e fölötti része T_1. A T_1 téglalap $n-k$ téglalapra van bontva, hiszen a k alacsony téglalap kivételével mindegyiknek van e fölötti része. Az indukciós feltevés alapján ez a felbontás legfeljebb $n-k+3$ oldalegyenest határoz meg. Ezek az oldalegyenesek az eredeti felbontásban is szerepelnek oldalegyenesként. Az eredeti felbontás további oldalegyenese a T alsó oldala, és még olyan oldalegyenesek, amiket két alacsony téglalap közös, függőleges oldala határoz meg. Ez utóbbiból legfeljebb $k-1$ darab lehet. Tehát T felbontása legfeljebb

$$n-k+3+1+k-1=n+3$$

oldalegyenest határoz meg.

4. bizonyítás: Tekintsük az N négyzet egy olyan darabolását n darab kis téglalapra, ahol a különböző oldalegyenesek száma maximális. Nevezzük a kis téglalapok csúcsait röviden csúcsoknak. Ezeket három osztályba sorolhatjuk: *eredeti csúcsok,* vagyis N négy csúcsa, *szélső csúcsok,* amelyek N oldalain, de nem a csúcsaiban vannak és *belső csúcsok,* amelyek N belsejében vannak. A kis téglalapok oldalainak uniója legyen S. A két csúcs által meghatározott $s\subset S$ szakaszokat *oldalszakasznak* hívjuk.

Tegyük fel, hogy egy P belső csúcsból mind a négy irányba indul oldalszakasz. Ekkor a P pontból felfelé induló maximális (felfelé nem bővíthető) oldalszakaszt kellően kicsi távolsággal jobbra tolva elérhető, hogy ez az oldalszakasz az eddigiektől eltérő függőleges oldalegyenest határozzon meg. Tehát az oldalegyenesek száma nőtt, miközben a kis téglalapok száma megmaradt, ez ellentmond annak, hogy a különböző oldalegyenesek száma maximális volt.

Vagyis minden belső csúcsból legfeljebb három irányban indul oldalszakasz. Mivel minden belső csúcsra illeszkedik legalább két kis téglalap, minden belső csúcsból pontosan három irányban indul ki oldalszakasz, és ugyanez természetesen a szélső csúcsokra is igaz. Tekintsük most a felosztásban szereplő maximális (nem bővíthető) oldalszakaszokat, legyen ezek száma m. Ezek közül négy oldalszakasz az eredeti négyzet oldala, a többi oldalszakasznak pedig a két végpontja belső vagy szélső csúcs. Továbbá minden belső vagy szélső csúcs pontosan egy maximális oldalszakasznak a végpontja, így a belső és szélső csúcsok száma összesen $2(m-4)$.

Most számoljuk össze az n darab téglalap belső szögeinek összegét kétféleképpen. Egyrészt minden téglalapnak 4 darab derékszöge van, ez összesen $n\cdot 360°$. Másrészt a téglalapok derékszögei leszámlálhatók csúcsonként: N csúcsainál egyenként $90°$, a belső és szélső csúcsoknál egyenként $180°$ az ottani derékszögek összege, azaz a teljes összeg

$$4\cdot 90°+2(m-4)\cdot 180°=(m-3)\cdot 360°.$$

Ezek alapján tehát $n=m-3$, azaz a különböző oldalegyenesek száma legfeljebb $m=n+3$.

2. *Tegyük fel, hogy a 4-gyel osztva 3 maradékot adó p, q prímszámokra az $x^2 - pqy^2 = 1$ egyenletnek van pozitív egész x, y megoldása. Igazoljuk, hogy a $|px^2 - qy^2| = 1$ egyenletnek is van pozitív egész x, y megoldása.*

Megoldás. Legyenek x_0, y_0 olyan pozitív egészek, melyekre

$$x_0^2 - pqy_0^2 = 1,$$

és x_0 minimális azzal a tulajdonsággal, hogy $x^2 - pqy^2 = 1$ megoldható ezzel az x_0-lal és egy $y > 0$ egésszel. Mivel a pq szám 4-es maradéka 1, ezért y_0 nem lehet páratlan, hiszen az $x_0^2 = pqy_0^2 + 1$ négyzetszám 4-gyel osztva nem adhat 2 maradékot. Vagyis $2 \mid y_0$, azaz az

$$\text{(1)} \qquad \frac{x_0 - 1}{2} \cdot \frac{x_0 + 1}{2} = pq\left(\frac{y_0}{2}\right)^2.$$

egyenletben szereplő összes tényező egész szám. Tehát p és q is osztja a bal oldal egyik tényezőjét. Először megmutatjuk, hogy egyik tényező sem lehet osztható pq-val.

Ha ugyanis (1)-ben pq osztaná valamelyik tényezőt, akkor vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2pq} \cdot \frac{x_0 + 1}{2} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2,$$

vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2} \cdot \frac{x_0 + 1}{2pq} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

a jobb oldalon szereplő négyzetszám két egész szám szorzatára bontását adná. Mivel a két tényező mindkét esetben relatív prím, így külön-külön is négyzetszámok, azaz léteznek olyan a, b pozitív egész számok, melyekre

$$\text{(2)} \qquad \frac{x_0 - 1}{2pq} = a^2, \quad \frac{x_0 + 1}{2} = b^2,$$

vagy

$$\text{(3)} \qquad \frac{x_0 - 1}{2} = a^2, \quad \frac{x_0 + 1}{2pq} = b^2.$$

Az első esetben $b^2 - pqa^2 = 1$, de b és a is pozitív egészek, ez tehát ellentmondana x_0 minimalitásának, hiszen (2) miatt $b < x_0$. Ha pedig (3) teljesülne, akkor

$$a^2 - pqb^2 = -1$$

alapján az $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ kongruencia megoldható lenne, azonban $p \equiv -1 \pmod{4}$ miatt ez nem lehetséges. (Ugyanis a kis Fermat-tétel alapján $p \nmid a$ esetén

$$(a^2)^{(p-1)/2} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \not\equiv -1 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p}.)$$

Tehát (1)-ben pq nem osztja egyik tényezőt sem, így vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2p} \cdot \frac{x_0 + 1}{2q} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2,$$

vagy

$$\frac{x_0-1}{2q}\cdot\frac{x_0+1}{2p}=\left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

a jobb oldalon szereplő négyzetszám két, egymáshoz relatív prím szorzatára bontását adja. Ekkor a korábbiakhoz hasonlóan léteznek a, b pozitív egészek, melyekre vagy

$$\frac{x_0-1}{2p}=a^2,\quad \frac{x_0+1}{2q}=b^2,$$

vagy

$$\frac{x_0-1}{2q}=a^2,\quad \frac{x_0+1}{2p}=b^2,$$

azaz $qb^2-pa^2=1$ vagy $pb^2-qa^2=1$, és készen vagyunk, mert $x=a$, $y=b$ vagy $x=b$, $y=a$ a $|px^2-qy^2|=1$ egyenlet pozitív egész megoldását adja.

3. *Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_{i,j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ valós számokra $a_{i,j}+a_{j,i}=0$ minden i, j esetén (speciálisan $a_{i,i}=0$ minden i-re), akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás. Először $a_{i,j}$ jelöljön tetszőleges valós számokat, és tekintsük a következő négyzetösszeget:

$$\sum_{i,j,i',j'}\left(a_{i,j}+a_{i',j'}-a_{i,j'}-a_{i',j}\right)^2\geqslant 0.$$

Ha a négyzetre emelést kifejtjük és tagonként szummázunk, akkor a következőképpen egyszerűsődnek az összegek. Egyrészt,

$$\sum_{i,j,i',j'}a_{i,j}^2=n^2\sum_{i,j}a_{i,j}^2.$$

Pontosan ugyanezt kapjuk a többi négyzetes tag esetén is:

$$\sum_{i,j,i',j'}a_{i',j'}^2=\sum_{i,j,i',j'}a_{i,j'}^2=\sum_{i,j,i',j'}a_{i',j}^2=n^2\sum_{i,j}a_{i,j}^2.$$

A kettős szorzatoknál háromféle eredményt kapunk: két esetben (amikor az első indexek megegyeznek)

$$-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i,j}a_{i,j'}=-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i',j}a_{i',j'}=-2n\sum_{i}\left(\sum_{j}a_{i,j}\right)^2;$$

két esetben (amikor a második indexek megegyeznek)

$$-\sum_{i,j,i',j'} 2a_{i,j}a_{i',j} = -\sum_{i,j,i',j'} 2a_{i,j'}a_{i',j'} = -2n\sum_j\Big(\sum_i a_{i,j}\Big)^2;$$

illetve a maradék két esetben

$$\sum_{i,j,i',j'} 2a_{i,j}a_{i',j'} = \sum_{i,j,i',j'} 2a_{i',j}a_{i,j'} = 2\Big(\sum_{i,j} a_{i,j}\Big)^2.$$

Ezeket összeadva és $4n^2$-tel osztva kapjuk a következő általános egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 - \frac{1}{n}\sum_i\Big(\sum_j a_{i,j}\Big)^2 - \frac{1}{n}\sum_j\Big(\sum_i a_{i,j}\Big)^2 + \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i,j} a_{i,j}\Big)^2 \geqslant 0.$$

Felhasználva, hogy esetünkben $a_{i,j} = -a_{j,i}$, az utolsó tag eltűnik, a középső két tag pedig megegyezik, és a kívánt egyenlőtlenség azonnal adódik.

Mikor áll fenn egyenlőség? Ehhez a (megoldás elején szereplő) négyzetösszeg minden tagjának nullának kell lennie, azaz

$$a_{i,j} + a_{i',j'} = a_{i,j'} + a_{i',j}$$

minden i, j, i', j' esetén.

Legyen $b_r = a_{r,1}$. Ekkor persze $a_{1,r} = -b_r$. A fenti egyenlőséget $i' = j' = 1$ esetben használva kapjuk, hogy

$$a_{i,j} + \underbrace{b_1}_{=0} = b_i - b_j.$$

Tehát ha egyenlőség áll fenn, akkor $a_{i,j}$ felírható $b_i - b_j$ alakban valamilyen $b_1, \ldots, b_n$ valós számokra. Megfordítva, könnyen látható, hogy ilyen alakú $a_{i,j}$ számokra a négyzetösszeg minden tagja 0, és így valóban egyenlőség van.

2. megoldás: Vegyük észre, hogy tetszőleges i, j, k indexek esetén

$$0 \leqslant (a_{i,j} + a_{j,k} + a_{k,i})^2 = a_{i,j}^2 + a_{j,k}^2 + a_{k,i}^2 + \underbrace{2(a_{i,j}a_{j,k} + a_{k,i}a_{i,j} + a_{j,k}a_{k,i})}_{=-2(a_{j,i}a_{j,k}+a_{i,k}a_{i,j}+a_{k,j}a_{k,i})},$$

ahol felhasználtuk, hogy a két index cseréje előjelváltást eredményez. Most adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket minden olyan i, j, k hármasra, mely páronként különböző indexekből áll.

Könnyen látható, hogy minden $i \neq j$ esetén $3(n-2)$-szer kapjuk meg az $a_{i,j}^2$ tagot. Ami a kettős szorzatokat illeti, minden $a_{i,j}a_{i,k}$ alakú tag együtthatója -6 lesz. Innen 3-mal osztás után egyszerű átalakításokkal kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Egyenlőség pedig akkor áll fenn, ha $a_{i,j} + a_{j,k} + a_{k,i} = 0$ minden indexhármasra. Ebből $k = 1$ mellett adódik, hogy $a_{i,j} = -a_{1,i} - a_{j,1} = a_{i,1} - a_{j,1}$, vagyis ekkor a számok felírhatók $b_i - b_j$ alakban, amely esetben pedig valóban mindig egyenlőség áll.

Pach Péter Pál