Jelentés a 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 7-én 14 órai kezdettel rendezte meg. A következő nyolc helyszínen írták meg a versenydolgozatot a résztvevők: Budapest, Debrecen, Kecskemét, Miskolc, Pécs, Szeged, Tatabánya és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kovács Benedek, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Egy négyzetet felbontottunk* 2022 *téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?*

2. *Tegyük fel, hogy a* 4*-gyel osztva* 3 *maradékot adó p, q prímszámokra az* $x^2-pqy^2=1$ *egyenletnek van pozitív egész x, y megoldása. Igazoljuk, hogy a* $|px^2-qy^2|=1$ *egyenletnek is van pozitív egész x, y megoldása.*

3. *Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_{i,j}$* $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ *valós számokra $a_{i,j}+a_{j,i}=0$ minden i, j esetén (speciálisan $a_{i,i}=0$ minden i-re), akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

A bizottság november 24-ei ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a versenyre 115-en regisztráltak, akiktől végül összesen 93 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen az első feladatra közel 40 lényegében teljes megoldás érkezett, a második feladatot 8-an, a harmadik feladatot pedig 7-en oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen.

Két versenyző helyesen oldotta meg az első két feladatot, és apró hiányosságtól eltekintve a harmadik feladatra is helyes megoldást adott. Ezért

I. díjban és 55 000 Ft pénzjutalomban részesül

Jánosik Máté, a győri Révai Miklós Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Árki Tamás, Nagy Róbert* és *Pósa Lajos*),

Lovas Márton, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Simon János* és *Szűcs Gábor*).

Egy versenyző helyesen oldotta meg a harmadik feladatot és hiányosságoktól eltekintve megoldotta az első és második feladatokat. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesül

Németh Márton Tamás, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Erdős Gábor* és *Dobos Sándor*).

Dicséretben részesülnek két feladat teljes vagy lényegében teljes megoldásáért

Chrobák Gergő, a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gaál Istvánné* és *Balázs Tivadar*),

Csonka Illés, a pécsi Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanára *Baráti Ákos*),

Czanik Pál, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai *Lenger Dániel* és *Kocsis Szilveszter*),

Fleiner Zsigmond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint* és *Gyenes Zoltán*),

Fülöp Csilla, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Mike János*),

Molnár-Szabó Vilmos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Ádám Réka, Fazakas Tünde* és *Fey Dávid*),

Móricz Benjamin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Ádám Réka, Dobos Sándor, Fazakas Tünde* és *Szűcs Gábor*),

Seres-Szabó Márton, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Fazakas Tünde* és *Hujter Bálint*),

Simon László Bence, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Hujter Bálint, Surányi László, Mazug Péter* és *Sokvári Olivér*).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.”

A 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Egy négyzetet felbontottunk* 2022 *téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?*

Megoldás. A négyzetet $n-1$ darab, az egyik oldalával párhuzamos egyenessel n téglalapra oszthatjuk. A négy eredeti oldalegyenessel együtt ez összesen $(n-1)+$ $+4=n+3$ egyenest jelent.

Most négy bizonyítást adunk arra, hogy $(n+3)$-nál több különböző egyenest nem kaphatunk, tehát a feladat kérdésére a válasz 2025.