mazásának lehetőségét. A matematikai nyelvészet, a (magyar) nyelv szemantikai feldolgozása a matematika, a programozás és a nyelvészet kölcsönhatásából alakult ki, napjainkra egyre fontosabb lesz. Nagyon érdekes feladatok várnak a mostani középiskolás nemzedékre, akár a matematikát, akár a fizikát, akár az informatikát választják.

Az első nap délutánján került sor a szokásos KöMaL díjkiosztó ünnepségre. Minden évben száz körüli a jutalmazottak száma, és bár a díjak anyagi értéke nem túl nagy, de erkölcsi értékük egy egész életre szóló. A mostani eredmények – 1996 óta a korábbi tanéveké is – a `https://www.komal.hu/eredmeny` oldalon találhatók. A díjak kiosztása közben egy előadásra is sor került: *Asbóth János* beszélt a „kísérteties távolhatásról”, ami a múlt évszázad ismert paradoxonait, Schrödinger macskáját[*], és a kvantummechanika Einstein–Podolsky–Rosen[†] nevezetes gondolatkísérletét köti össze a 2022-es fizikai Nobel-díjasok eredményeivel.

A rendezvény második napján is hasznos és érdekes ismereteket szerezhettek az érdeklődők.

Jenei Péter válogatott kísérleteket mutatott az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyéről, *Kiss György* ezután matematikai témát, a Moore-gráfokat és véges geometriákat hozott középiskolás szinten. *Olosz Balázs* komplex számokat alkalmazott a váltóáramú fizika feladatok megoldásánál, *Számadó László* előadása pedig matematikai játékokról és a játékok matematikájáról szólt. A délutáni előadók, *Szeidemann Ákos* és *Kadlecsik Ádám* három izgalmas folyadékos problémát oldottak meg.

A KöMaL Ifjúsági Ankét sikeréhez hozzájárultak a szerkesztőség lelkes munkatársai, a pénteki fogadás szendvicsei és süteményei, a szombati pizza és a délutáni kötetlen játékok is.

Oláh Vera

Térből síkba visszalépés fizikai problémák megoldásánál II. rész (konform leképezések)

Megjegyzések és általánosítások a P. 5399. feladat megoldásához[1]

Amikor sok tükör sem segít

A cikk I. részében a **P. 5399.** feladat (közölte: *Vigh Máté,* Biatorbágy) bizonyos (tükrözésekkel megoldható) általánosításait vizsgáltuk. Rácsodálkozhatunk arra, hogy a C pontbeli áramsűrűséget végtelen sok esetben (minden pozitív egész n-re)

[*] `https://hu.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_macskája`

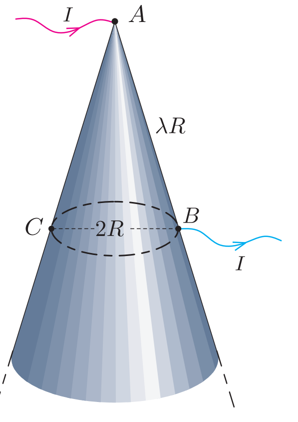
[†] `https://hu.wikipedia.org/wiki/EPR-paradoxon`

[1] A feladatot és annak megoldását lásd a KöMaL 2022. évi decemberi számának 565. oldalán.

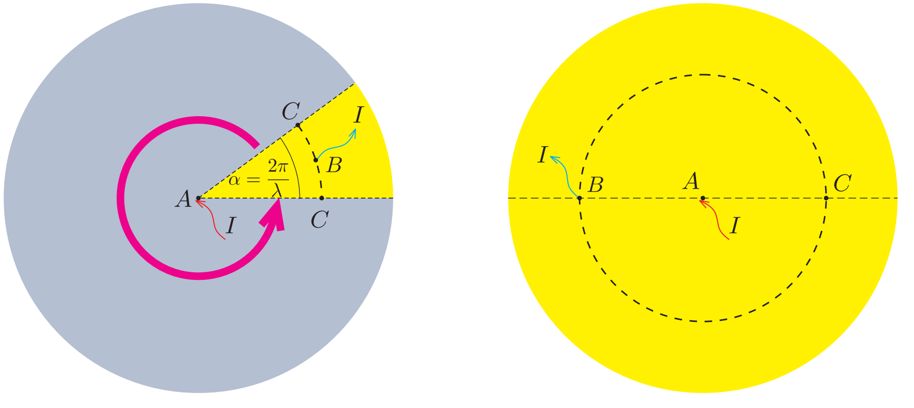
ugyanazzal a formulával tudjuk kiszámítani. Az a sejtésünk támadt, hogy a $j(C)=\frac{I}{4\pi\delta R}$ képlet talán *tetszőleges* nyílásszögű kúpra is igaz.

Legyen a kúp palástján mért AB távolság λR, míg BC továbbra is $2R$, de λ tetszőleges (1-nél nagyobb) szám (lásd a *6. ábrát*).

Ha a kúp palástját – a korábbiakban leírtakhoz hasonlóan – felvágjuk az AC egyenes mentén, majd kiterítjük a síkba, akkor a teljes síknak $2\pi/\lambda$ nyílásszögű szögtartományát kapjuk (lásd a *7. ábra bal oldali* részében a sárga tartományt). Az ebben a szögtartományban kialakuló árameloszlást keressük olyan határfeltételek mellett, hogy az A pontnál bevezetünk, a B pontnál kivezetünk I erősségű áramot, továbbá a tartomány határát képező AC egyenesek áramvonalak. (A két határvonal fizikai értelemben ugyanaz a vonal, és a két helyen is jelölt C pont tulajdonképpen csak egyetlen pont, hiszen a kúp palástján is csak egy C pont volt.)



6. ábra



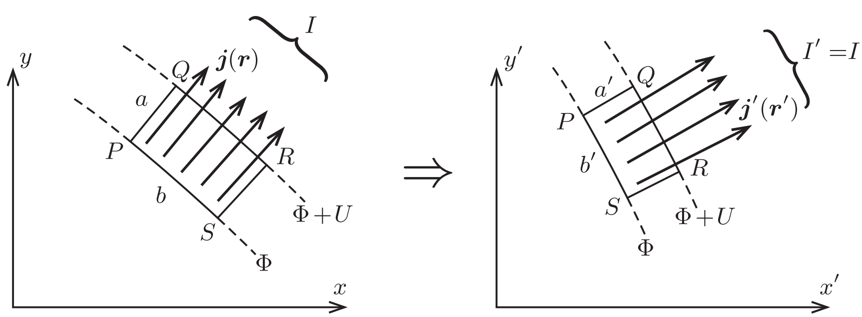
7. ábra

Mivel λ az általános esetben *nem* egész szám, a tükrözéses módszert nem alkalmazhatjuk. Ha viszont a sárga cikkelyt – mint egy legyezőt – valamilyen módon „kinyithatnánk" (lásd a nyilat és a *7. ábra jobb oldali* részét), akkor egy teljes (minden irányban végtelen kiterjedésű) síkot kapnánk, amiben folyó áramok eloszlása éppen a $\lambda=1$ esetnek felelne meg, amelyet jól ismerünk. Természetesen ez a transzformáció csak akkor kap értelmet, ha megadjuk az egymásnak megfeleltethető pontok viszonyát, és azt is, hogy mi a kapcsolat az eredeti és az áttranszformált tartomány árameloszlása között. Ezeket a kérdéseket részletesen tárgyalta egy kétrészes cikk a KöMaL korábbi számaiban.[2] Az alábbiakban felidézzük ennek a cikknek – számunkra legfontosabb – gondolatait, majd alkalmazzuk azokat a most vizsgált problémára.

[2] Elek Péter és Szász Krisztián: Síkbeli elektromos vezetési problémák, I. és II. rész, *KöMaL* 2019. évi 1. és 2. szám.

Egy elektromosan vezető síklemezbe, amely lehet véges kiterjedésű, vagy akár „végtelen” nagy, bizonyos helyeken áramokat vezetünk be, illetve áramokat vezetünk el róla. A lemez homogén, vastagsága δ, fajlagos ellenállása ϱ, a vezetőképessége tehát $\sigma = 1/\varrho$.

Tételezzük fel, hogy ismerjük a kialakuló árameloszlást, vagyis a $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűséget, valamint az elektromos potenciál $\Phi(\boldsymbol{r})$ függvényét. Mindezek a mennyiségek az áramvezető lemez $\mathcal{F}$ felülete (síkja) mentén helyről helyre változnak; értéküket egy alkalmasan választott derékszögű (x, y) koordináta-rendszerben adhatjuk meg (lásd a *8. ábra bal oldali* részét), de használhatjuk az (r, φ) síkbeli polárkoordinátákat is. Válasszuk ki az árameloszlásnak egy kicsiny, téglalap alakúnak tekinthető részét, amit két egymástól csak kicsit eltérő ekvipotenciális görbe és két közeli áramvonal határol (így az áramsűrűség-vektor ebben a tartományban állandó). Legyenek a téglalap oldalai a és b, és jelöljük a P és S pontok közötti szakaszon átfolyó áram erősségét I-vel. (Ugyancsak I erősségű áram folyik a Q és az R pontok között is, hiszen az áramlási kép stacionárius, a töltések sehol nem halmozódhatnak fel egyre növekvő mértékben.)



8. ábra

Az áramerősség az áramsűrűséggel arányos, az áramsűrűség az elektromos térerősséggel, a térerősség pedig a potenciálkülönbséggel fejezhető ki:

$$I = |\boldsymbol{j}| \cdot b\delta, \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}, \qquad |\boldsymbol{E}| = \frac{U}{a},$$

így tehát a P és S pontok közötti $b \cdot \delta$ nagyságú felületen átfolyó áram erőssége:

$$I = U\delta\sigma \cdot \frac{b}{a}.$$

Ha valamilyen transzformáció (leképezés) az $\mathcal{F}$ sík pontjait átviszi egy másik, $\mathcal{F}'$ sík pontjaiba, az árameloszlás is megváltozik, ami az (x', y') koordinátarendszerben megadható $\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}')$ árameloszlással írható le (lásd a *8. ábra jobb oldali* részét). Kikötjük még, hogy a potenciálok értéke az egymásnak megfeleltetett pontokban ugyanakkora legyen, vagyis $\Phi'(\boldsymbol{r}') = \Phi(\boldsymbol{r})$ teljesüljön.

A vizsgált kicsiny (jó közelítéssel egyenes oldalakkal határolt) tartományon átfolyó áram erőssége:

$$I' = U\delta\sigma \cdot \frac{b'}{a'}.$$

Felhasználtuk, hogy a transzformált áramsűrűség-vektorok merőlegesek a transzformált ekvipotenciális görbékre, tehát a $PQRS$ téglalap „képe” ugyancsak téglalap, melynek oldalai (a' és b') általában különböznek az eredeti méretektől.

A két elrendezés (ugyanakkora be- és kivezetett áramok esetén) akkor egyenértékű, ha minden kicsiny részletében az egymásnak megfeltethető szakaszokon ugyanakkora az áramerősség, vagyis $I' = I$. Ez láthatóan akkor teljesül, ha

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a},$$

vagyis a transzformáció (kis méretek esetén) *aránytartó.*

Megjegyzés. Az aránytartás tulajdonsága nemcsak az egymást derékszögben metsző rövid szakaszokra érvényes, hanem egy adott ponton átmenő, tetszőleges irányú, kicsiny szakaszpárokra is fennáll. Igaz továbbá, hogy a transzformáció *szögtartó*, vagyis az egymást metsző görbék érintőinek szöge a leképezés során nem változik meg. Az arány- és szögtartó síkbeli transzformációkat *konform leképezéseknek* nevezik.

A továbbiakban bemutatunk néhány – a fizikai alkalmazások szempontjából lényeges – konform leképezést. Mivel az ilyen leképezések egymás után történő alkalmazása ugyancsak szög- és aránytartó transzformációt eredményez, néhány alapesetből kiindulva a fizikai problémák meglepően széles körének megoldására nyílik lehetőségünk.

Nyilvánvaló, hogy szög- és aránytartó leképezés az *eltolás* (a sík egészét valamilyen adott síkbeli vektorral odébbtoljuk), az *elforgatás* (a síknak tetszőleges pont körüli, tetszőleges szögű elforgatása), valamint a *nagyítás* és a *kicsinyítés* (egy adott pontból a sík különböző pontjaiba mutató vektorokat valamekkora számmal szorozzuk).

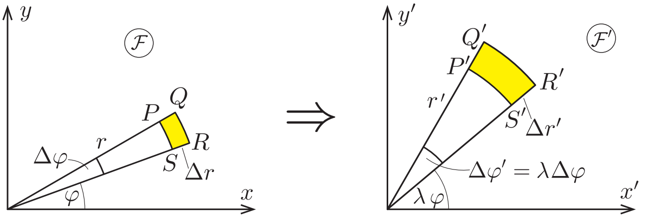
Ezek a transzformációk lényegében nem változtatják meg az áramlási képet (az áramvonalakat), csupán annak felelnek meg, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontját máshová helyezzük, az x tengelyt másfelé irányítjuk, illetve a távolságok mértékegységét megváltoztatjuk (például centiméter helyett inch egységeket használunk).

A következő két leképezésnél azonban nem ez a helyzet, azok lényeges változást eredményeznek az árameloszlásban, tehát fizikailag különböző problémákat kapcsolnak össze.

„Legyezőleképezés”

Tekintsük azt a leképezést, ami a $2\pi/\lambda$ szögű szögtartomány egyes pontjaihoz tartozó helyvektor x tengellyel alkotott φ szögét λ-szorosára növeli: $\varphi' = \lambda\,\varphi$. Szemléletesen ez olyan, mintha egy legyezőt λ-szor nagyobb méretűre nyitnánk ki. Ez a leképezés éppen az a transzfomáció, ami a 7. ábrán látható kúp kiterített palástját a teljes síkba viszi át, vagyis a kúpfelület áramvezetésének bonyolult feladatát egy síklap – könnyen megoldható – problémájává alakítja.

A *9. ábrán* egy $\boldsymbol{r}$ helyvektorú, r és φ polárkoordinátákkal megadott pont körüli, kicsiny (sárga színnel jelölt) $PQRS$ tartomány transzformációját láthatjuk.



9. ábra

Ahhoz, hogy a leképezés (kicsi méretek esetén) aránytartó is legyen, az szükséges, hogy a

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{P'Q'}{P'S'},$$

vagyis a

$$\frac{\Delta r}{r \cdot \Delta\varphi} = \frac{\Delta r'}{r' \cdot \lambda\Delta\varphi}$$

egyenlőség teljesüljön. Innen következik, hogy ($\Delta r \ll r$ és $\Delta r' \ll r'$ esetén)

$$(4) \qquad \frac{\Delta r'}{r'} = \lambda\frac{\Delta r}{r}.$$

A cikk I. részében felírt (2) összefüggés szerint (4) akkor teljesül, ha

$$r' = K\, r^{\lambda}.$$

A K állandót (aminek a mértékegysége a hosszúság $(1-\lambda)$-adik hatványa) célszerű $r_0^{1-\lambda}$ alakban felírni, ahol r_0 egy önkényesen választott hosszúságegység. Ennek megfelelően

$$(5) \qquad r' = r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda}.$$

Látható, hogy a λ-szorosára kinyitott „legyező” esetében akkor kapunk aránytartó transzformációt, ha a helyvektorok (r_0 egységekben mért) nagyságát λ-adik hatványra emeljük. A sík pontjainak az origótól mért távolsága érdekes (nemlineáris) módon transzformálódik: az r_0-nál távolabbra mutató helyvektorok megnyúlnak, a közelebbre mutatók zsugorodnak, az r_0 sugarú, $2\pi/\lambda$ nyílásszögű körív pontjainak radiális koordinátája pedig változatlan marad, tehát ezek a pontok egy r_0 sugarú teljes körbe mennek át.

„Szalagleképezés”

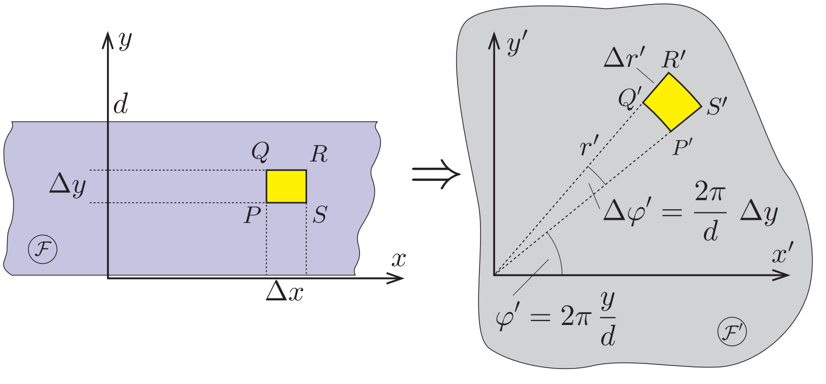
Véges szélességű, nagyon hosszú, elektromosan vezető lemezben folyó síkbeli árameloszlások leírásánál hasznos lehet egy olyan konform (szög- és aránytartó) leképezés, amely a szalagot egy végtelen síkba transzformálja. Legyen a szalag az x tengellyel párhuzamos, és y irányban d széles.

Válasszunk egy olyan transzformációt, ami az x tengellyel párhuzamos vonalakat (amelyekre $y = y_0 =$ állandó, $0 < y_0 < d$) az origóból kiinduló „sugarasan" szétfutó vonalakba viszi át. Ezeket a $\varphi' =$ állandó összefüggés jellemzi, ahol φ' a leképezés során kapott vektoroknak az x' tengellyel bezárt szöge. Legyen például

$$\varphi' = 2\pi \frac{y}{d}.$$

Ilyen választás mellett $0 \leqslant \varphi' \leqslant 2\pi$, vagyis a szalag „képe" lefedi a teljes síkot. (A szalag két határoló egyenese a leképezés során ugyanarra helyre kerül, hiszen az egyikük képét a $\varphi' = 0$, a másik képét a $\varphi' = 2\pi$ összefüggés jellemzi.)

Az x tengellyel párhuzamos vonalseregre merőleges vonalak (egyenesek) egyenlete: $x = x_0 =$ állandó. Ezek az egyenesek a leképezés után az origón áthaladó „sugaras egyenesekre" merőleges görbékbe, azaz valamekkora sugarú körökbe mennek át. Azt, hogy mi a kapcsolat az x koordináta és az r' sugár között, a leképezés aránytartóságának követelménye határozza meg.



10. ábra

A *10. ábráról* leolvasható, hogy

$$\frac{\Delta r'}{\Delta x} = \frac{r'\Delta\varphi'}{\Delta y},$$

ahonnan $\Delta\varphi' = \frac{2\pi}{d}\Delta y$ miatt

$$\frac{\Delta r'(x)}{r'(x)} = \frac{2\pi}{d}\Delta x.$$

Ez az egyenlet a kamatos kamat vagy a radioaktív bomlások exponenciális törvényével azonos alakú, a megoldása (2) szerint:

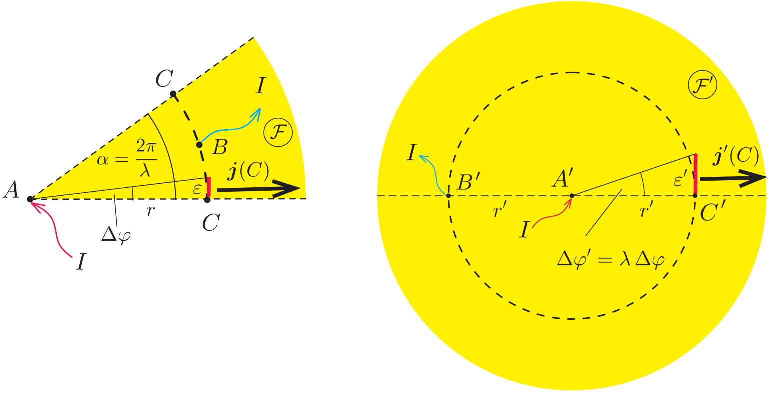
$$r'(x) = r_0 \mathrm{e}^{2\pi x/d},$$

ahol r_0 egy önkényesen választható állandó.

A szalagleképezés jól alkalmazható például olyan problémánál, amelyben egy nagyon hosszú fémhengerbe annak egyetlen pontjánál áramot vezetünk be, és keressük a kialakuló áramsűrűségeket. A hengert az áram bevezetési pontjával átellenes alkotó mentén „felvághatjuk” (hiszen azon keresztül nem folyik áram), majd az így kapott végtelen hosszú szalagot a szalagleképezés segítségével teljes síkká alakítjuk.

A kúp palástjában folyó áram eloszlása

Térjünk vissza az eredeti feladatunkhoz, illetve annak általánosított változatához. A legyezőleképezés segítségével az $\mathcal{F}$ síkba kiterített kúppalástot (*11. ábra bal oldali* része) áttranszformálhatjuk a teljes $\mathcal{F}'$ síkba (*11. ábra jobb oldali* része).



11. ábra

A leképezés tulajdonságai:

$$\varphi' = \lambda\varphi, \qquad r' = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda}.$$

Ismerjük a kinyitott legyezőnél a C' ponthoz tartozó $j'(C')$ áramsűrűséget, mert az I. részben megadott (1) összefüggésnek megfelelően a be- és kivezetett áramok járulékának szuperpozíciója:

$$j'(C') = \frac{I}{2\pi\delta r'} - \frac{I}{2\pi\delta(2r')} = \frac{I}{4\pi\delta r'}. \tag{6}$$

Mi azonban nem a $j'(C')$ áramsűrűséget, hanem az $\mathcal{F}$ síkhoz tartozó $j(C)$ áramsűrűséget keressük. Tekintsünk a C és a C' pont közelében egy-egy rövid, az áramsűrűségek irányára merőleges (a leképezés révén egymásnak megfeleltethető) körívet, amelyek – mivel nagyon rövidek – jó közelítéssel egyenes szakaszokkal is helyettesíthetőek. Ezen szakaszok hossza:

$$\varepsilon = r\Delta\varphi \qquad \text{és} \qquad \varepsilon' = r'\Delta\varphi' = r'\lambda\Delta\varphi, \tag{7}$$

ahol $r = AC = AB = R\lambda$.

Az áramsűrűségek közötti kapcsolatot az adja meg, hogy az egymásnak megfelelő szakaszokon átfolyó teljes áram ugyanakkora:

$$\varepsilon \cdot j(C) = \varepsilon' \cdot j'(C'). \tag{8}$$

A (6), (7) és (8) összefüggések egybevetéséből kapjuk, hogy

$$j(C) = j'(C')\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{I}{4\pi\delta r'} \cdot \frac{r'\lambda\Delta\varphi}{r\Delta\varphi} = \frac{I}{4\pi\delta} \cdot \frac{\lambda}{r} = \frac{I}{4\pi\delta R}.$$

(Látható, hogy r' kiesett a képletből, így az eredmény nem függ a tetszőlegesen választható r_0 távolságtól.)

Ezzel tehát beláttuk, hogy a kérdéses $\boldsymbol{j}(C)$ vektor nagysága tetszőleges λ érték mellett minden esetben ugyanakkora, iránya pedig A-tól C felé mutat.

Gyakorló feladatok

A konform leképezéssel kapcsolatos ismeretek elmélyítése céljából közlünk néhány feladatot, útmutatással és végeredménnyel.

1. *Határozzuk meg az általánosított* **P. 5399.** *feladat elrendezésében az áramsűrűség nagyságát az AC egyenes mentén, a kúp csúcsától x távolságban! Mekkora az áramsűrűség a kúp csúcsától messze? (A nagyon nagy méretű kúp A csúcsánál vezetünk be I áramot, és a csúcstól λR távolságra lévő B pontnál vezetjük ki, ahol a kúp „alaplapjának” sugara R. A C pont az alaplapon a B-vel ellentétes pont.)*

Útmutatás. Alkalmazzuk a legyezőleképezést!

Megoldás.

$$j(x) = \frac{I}{2\pi\delta} \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda R}\right)^{\lambda}}.$$

Ha $x = \lambda R$, akkor megkapjuk a cikkben szerelő formulát, ha pedig $x \gg R$, akkor

$$j(x) \approx \frac{I}{2\pi\delta R}\left(\frac{\lambda R}{x}\right)^{\lambda+1}.$$

2. *Vezessünk be a kúp csúcsától λR távol lévő B pontban I erősségű áramot. Ez az áram a kúp távoli részeinél (a „végtelenben”) folyik ki a lemezből. Mekkora az áramsűrűség a B-vel átellenes C ponton áthaladó alkotó mentén a csúcspont közelében, attól x távolságban ($x \ll R$)?*

Útmutatás. Alkalmazzuk a legyezőleképezést!

Megoldás.

$$j(x) \approx \frac{I}{2\pi\delta R}\left(\frac{x}{\lambda R}\right)^{\lambda-1}.$$

3. *Egy nagyon hosszú, R sugarú, vékony, $\delta \ll R$ falvastagságú fémcső A pontjánál I erősségű áramot vezetünk be a hengerpalástba, és a cső egyik (távoli) végénél vezetjük el azt. Mekkora áramsűrűség alakul ki az A-val átellenes B ponton áthaladó alkotó mentén, a B ponttól x távolságban?*

Útmutatás. Alkalmazzuk a szalagleképezést!

Megoldás.

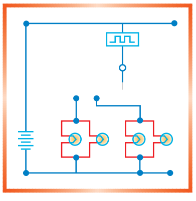
$$j(x) = \frac{I}{2\pi\delta R}\,\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/R}}.$$

4. *Egy R sugarú, szigetelőállványon lévő iskolai földgömböt egyenletesen, $\delta \ll R$ vastagságú fémréteggel vontak be. A földgömb északi sarkához (az A pontban) I erősségű áramot vezetünk, az egyenlítő B pontjánál pedig elvezetjük azt. Mekkora és milyen irányú az áramsűrűség az egyenlítő azon C pontjánál, amelyik B-től keletre, az egyenlítő hosszának negyedrészével megegyező távolságra található?*

Útmutatás. Alkalmazzunk a gömbfelületre B középpontú térbeli inverziót.[3] (A térbeli inverzió szög- és aránytartó leképezés, ami gömböt gömbbe vagy síkba visz át.)

Megoldás. Az áramsűrűség $\frac{I}{\sqrt{8}\pi\delta R}$ nagyságú és délnyugati irányú.

Gnädig Péter



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 786. *Egy decemberi és egy júniusi napon, Ecuadorban, délben, védőszemüvegben arccal a Nap felé fordulunk. Mit látunk, merre mozog a Nap az égen, jobbra vagy balra?*

(*3 pont*)

Megoldás. A Föld forgástengelyének „ferdesége” miatt, ha az Egyenlítőn állva decemberben, délben nézünk a Nap felé, akkor dél felé fordulva állunk. Ilyenkor a Nap (a nálunk megszokottal ellentétesen) balról jobbra „halad”. Ha júniusban tesszük ugyanezt, akkor észak felé nézünk, ilyenkor a Nap (a nálunk megszokott irányban) látszólag jobbról balra mozog.

Szendrői Bori (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyakorló Gimn., 9. évf.)

58 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 11, hibás 19, nem versenyszerű 12 dolgozat.

G. 788. *Egy fiú csónakjával átevez egy folyón a pontosan szemben lévő mólóhoz, majd azonnal megfordul és visszaevez a kiindulási pontba. A* 288 m *széles folyó vizének sebessége* 1 m/s, *a csónak vízhez viszonyított sebessége* 2,6 m/s. *A fiú azt is kipróbálja, hogy a folyón felfelé tesz meg* 288 *métert, majd a visszautat is ugyanúgy evezve teszi meg. Számítsuk ki a csónak kétféle mozgásának idejét!*

(*4 pont*)

[3] Lásd Faragó Andor: *Inverzió a térben* c. cikkét a KöMaL 1927. évi 10. számában, `http://db.komal.hu/scan/1927/10/`.