C. 1750. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök közös pontjai M és N. Az M ponton áthaladó szelő a k_1 kört az A, a k_2 kört a B pontban metszi úgy, hogy A a k_2 körre, B a k_1 körre nézve külső pont. Az AO_1 és BO_2 egyenesek közös pontja P. Az N és a P pont az O_1O_2 egyenes által meghatározott két félsík közül ugyanabba esik. Mutassuk meg, hogy P illeszkedik az O_1NO_2 háromszög körülírt körére.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1751. Legyenek a és b olyan pozitív valós számok, melyekre $a^2+b^2=\frac{2}{9}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2-3a}+\frac{1}{2-3b}\geqslant 2.$$

Javasolta: *Szmerka Gergely* (Budapest)

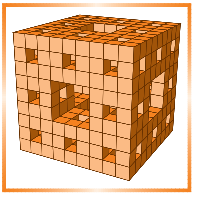
C. 1752. Hatan sorban állnak. Sokat kell várniuk, ezért játékból egy bizonyos szabály szerint sorrendet cserélnek és azt háromszor egymás után végrehajtják. Egy ilyen szabály (ún. permutáció) például: az 1. a 3. helyre áll, a 2. az 1. helyre, a 3. a 2. helyre, a 4. a 6. helyre, az 5. az 5. helyen marad, végül a 6. a 4. helyre áll. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább az egyikük az eredeti helyére kerül?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

Beküldési határidő: 2023. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5286–5293.)



B. 5286. Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre az $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ szám osztható a $\underbrace{33\ldots3}_{100}$ számmal (10-es számrendszerben)?

(*3 pont*) (*Brazil feladat*)

B. 5287. Két kör kívülről érinti egymást. A körök középpontján átmenő egyenes a köröket – az érintési ponton kívül – az A és a B pontokban metszi. A körök egyik közös külső érintőjének az érintési pontjai P és Q. Igazoljuk, hogy az AP és BQ egyenesek a körök közös belső érintőjén metszik egymást. (Az A és P pontok vannak az egyik körön, a B és Q pontok pedig a másikon.)

(*3 pont*) Javasolta: *Molnár István Ádám* (Miskolc)

B. 5288. Két játékos a következő játékot játssza egy 8×8-as sakktáblán. A játékosok felváltva lépnek, egy lépésben egy játékos a két szomszédos mezőt elválasztó szakaszok egyikét sárgára színezi. Az a játékos veszít, akinek a lépése után először jön létre egy olyan sokszög, amelynek minden oldala sárga. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

(*4 pont*) (*Amerikai versenyfeladat* alapján)

B. 5289. Legyenek a, b, c és d olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $a+b+c+d=1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1} \geqslant \frac{7}{2}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5290. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$3^n+4^n+\ldots+(n+2)^n=(n+3)^n.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

B. 5291. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, körülírt körének középpontja O. Mekkora a háromszög területe, ha $OIA\sphericalangle=90^\circ$, $AI=89$ és $BC=160$?

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5292. Adott egy k kör és a belsejében a P és a Q pontok. Szerkesszünk* a P és Q pontokon át olyan kört, amely a k kört két átellenes pontjában metszi. A P és Q pontok helyzetétől függően hány megoldása van a feladatnak?

(*5 pont*) Javasolta: *Kató Gábor* (Kápolnásnyék)

B. 5293. Legyen p egy prímszám. Legfeljebb hány egész együtthatós polinom adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen minden egész helyen p^2-tel osztható?

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

* Írjuk le a szerkesztés menetét (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni) és indokoljuk az eljárás helyességét. Magát a szerkesztést nem kell papíron elvégezni.