$P'Q'$-t B'-ben metszi el. Ekkor $P'A'B'$ egyenlő szárú, azaz $PAC\sphericalangle = A'P'C\sphericalangle =$ $= A'B'C\sphericalangle = BAC\sphericalangle$.

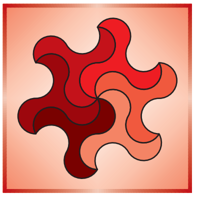
F/3. Megoldásvázlat. Érdemes lehet egy A középpontú körre invertálni, hiszen minden szöges feltételben ott van A. Nagy haszna lesz az **1.2**-es lemmának. Jelölje az inverzió során X képét X'. Ekkor

$$APB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = APC\sphericalangle - ABC\sphericalangle,$$
$$AB'P'\sphericalangle - AB'C'\sphericalangle = AC'P'\sphericalangle - AC'B'\sphericalangle,$$
$$P'B'C'\sphericalangle = P'C'B'\sphericalangle,$$
$$P'B' = P'C'.$$

A szögfelező-tétel miatt ahhoz, hogy BD és CE ugyanabban a pontban messe el AP-t, az kell teljesüljön, hogy $AB/BP = AC/CP$. Az APB, $AB'P'$ és az ACP, $AP'C'$ háromszögek hasonlóságából pedig adódik, hogy

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AP'}{P'B'} = \frac{AP'}{P'C'} = \frac{AC}{CP}.$$

Matematika feladatok megoldása



B. 5202. *Két racionális számot* ismerősnek *nevezünk, ha van olyan p/q, illetve r/s alakjuk (p, q, r, s egészek), amelyekre $|ps - qr| = 1$. Hány közös ismerőse lehet két ismerős racionális számnak?*

(*5 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

Megoldás. Legyen a p/q és r/s két ismerős racionális szám, megfelelő alakjukban (p, q, r, s egészek, q és s sem nulla).

Ha a négy egész között van nulla, az általánosság rovása nélkül föltehetjük, hogy $p = 0$. Ekkor q és r is 1 vagy -1. Vagyis a 0-nak csak a ± 1 lesz az ismerőse.

Ezek után vegyük fel a síkon az $A(p;q)$ és $B(r;s)$ rácspontokat. Az O origóval együtt alkotott ABO rácsháromszögük területe éppen $\frac{1}{2}|ps - qr| = \frac{1}{2}$ (hiszen ismerősek), vagyis ABO üres rácsháromszög.

Azt kaptuk tehát, hogy a két racionális szám ismerőssége azt jelenti, hogy az $A(p;q)$ és $B(r;s)$ pontok az origóval együtt üres rácsháromszöget fognak közre. Ha ismerősek, akkor ez láttuk, hogy teljesül és ha ez teljesül, akkor $|ps - qr| = 1$, vagyis ismerősök. (Ha s és r továbbra sem nulla.)

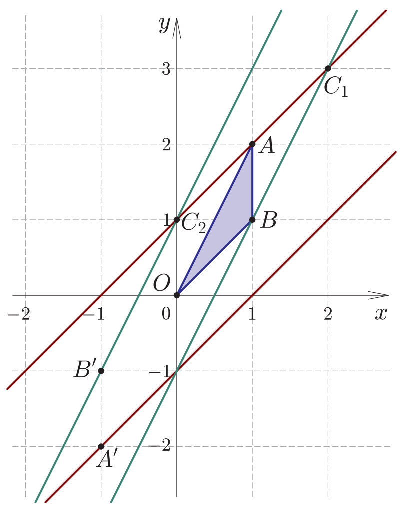
Ha a négy egész között nincsen nulla, akkor p, q, illetve r, s relatív prímek, hiszen ha valamely párnak d egy közös osztója, akkor az osztja a $|ps - qr|$ kifejezést is, ami viszont éppen az 1.

Két ismerős $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ számnak (láttuk, hogy önmagával senki sem lehet ismerős) közös ismerőse mindkét ponttal együtt választva az origóval üres rácsháromszöget alkot, vagyis ha $A(p;q)$ és $B(r;s)$ mellé létezik ilyen $C(x,y)$, akkor ABO, ACO és BCO is üres rácsháromszög.

Mindegyik háromszög területe $\frac{1}{2}$, és az ABO és ACO háromszögnek AO közös oldala, vagyis egyenlő az ezen oldalhoz tartozó magasságuk. Így C és B egyenlő messze lesz AO-tól, vagyis C-be eljuthatunk B-ből, vagy B'-ből (B' a B pont O-ra vonatkozó tükörképe, a „másik oldal") az $\overrightarrow{OA}$ valahányszorosát lépve. Mivel ABO üres rácsháromszög, ezért az OA szakasz belsejében nincs rácspont. Tehát C lehetséges helye a párhuzamos egyeneseken éppen az $\overrightarrow{OA}$ egész többszöröseivel való lépés lesz.

Logikai szimmetriával C-be eljuthatunk A-ból és A'-ből (A' az A pont O-ra vonatkozó tükörképe) az $\overrightarrow{OB}$ egész számú többszöröseit lépve.

C a két-két, origóra szimmetrikus párhuzamos egyenes metszéspontjában lehet. Ezek így éppen egy origóra szimmetrikus paralelogramma négy csúcsát határozzák meg. Az origóra szimmetrikus csúcspárokban a két koordináta-arány egyforma, vagyis valójában csak két közös ismerős valós számot kaphatunk.



Az *ábra* alapján ezt a kettőt valóban meg is találhatjuk (A-ból $\overrightarrow{OB}$ és így B-ből $\overrightarrow{OA}$, vagy A-ból $\overrightarrow{BO}$ és így B'-ből $\overrightarrow{OA}$):

$$C_1(p+r;q+s),$$

$$C_2(p-r;q-s).$$

Ezek valóban racionális számot adnak és létezik két közös ismerősük, ha $q+s$ és $q-s$ sem nulla, vagyis $|q| \neq |s|$. Például 1-nek és $\frac{1}{2}$-nek a 0 és a $\frac{2}{3}$. Előfordulhat, hogy mégis egyenlő az abszolút értékük, ekkor csak egy megoldás létezik, de az biztosan, például 1-nek és 2-nek csak a $\frac{3}{2}$ a közös ismerőse.

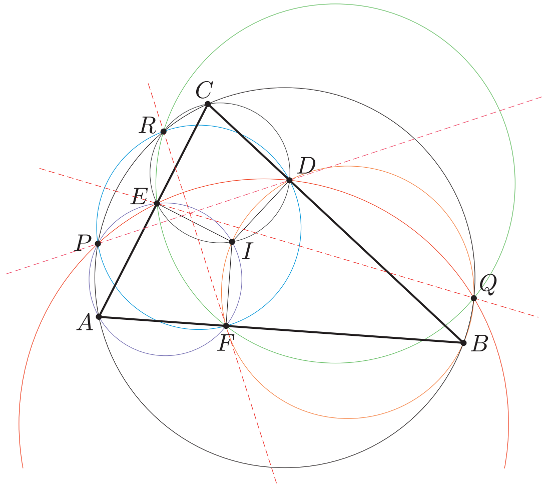
Csakaós kiga csapat:
Gábriel Tamás, Mezey Dorottya és *Seres-Szabó Márton*
(Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

68 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 10, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 2, 0 pontos 11 dolgozat.

B. 5221. *Az ABC hegyesszögű háromszögben a beírt kör érintési pontja a BC, CA, AB oldalon rendre D, E, illetve F. A háromszög köré írt kör az AEF kört az A-tól különböző P, a BFD kört a B-től különböző Q, a CDE kört pedig a C-től különböző R pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a DP, EQ és FR egyenesek egy ponton mennek át.*

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

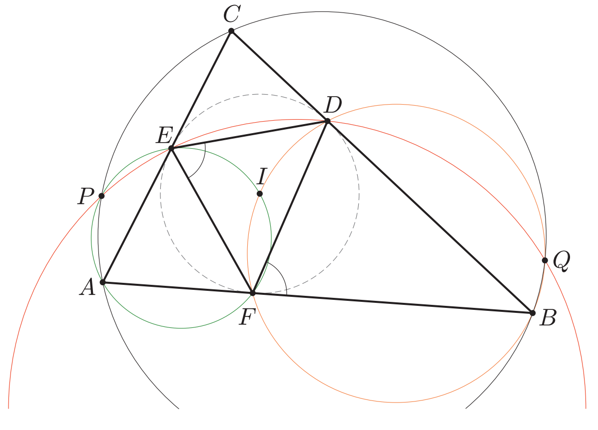
I. megoldás. A megoldáshoz készítsünk egy részletes *ábrát.* A jobb áttekinthetőség érdekében az egyes köröket különböző színekkel jelöltük.



1. ábra

Azt fogjuk belátni, hogy a $DEPQ$ (piros), a $DFPR$ (kék), illetve az $EFQR$ (zöld) pontnégyesek egy-egy körön vannak. Ismert, hogy az egymást két pontban metsző körök hatványvonala a metszéspontokon átmenő egyenes. Ebből már következik a feladat állítása, ugyanis az egymást páronként két pontban metsző körök hatványvonalai DP, EQ és FR egyenesek, és ezek a hatványponttétel miatt valóban egy ponton mennek át.

A három négyszög hasonlóan keletkezik: két csúcs az ABC háromszög beírt körének a háromszög két szomszédos oldalán található érintési pontja, a másik két csúcs pedig a harmadik oldal két végpontján áthaladó – a feladatban definiált – körök metszéspontjait tartalmazza a körülírt körrel. Ezért elegendő csak azt belátnunk, hogy $DEPQ$ húrnégyszög.



2. ábra

Itt egy elkészített ábrának sokféle változata lehet, ezért a diszkusszió elkerülése érdekében végig irányított szögekkel fogunk dolgozni. (Ha négy pont közül két megfelelő hármast kiválasztva a két szög megegyezik vagy 180°-ra egészíti ki egymást egyaránt tudjuk, hogy a négy pont egy körön van.) A $DEP\sphericalangle$ egyaránt jelentheti magát a szöget, illetve a 180°-ra kiegészítő szöget is. Ez jelentősen megkönnyíti a leírást.

Célunk tehát annak belátása, hogy $DEP\sphericalangle = DQP\sphericalangle$, ebből a kerületi szögek tételének megfordítása, illetve a húrnégyszögek tétele miatt már következik, hogy a négy pont egy körön van.

Ehhez először is az $AEFP$ és $ABPQ$ körökből $FEP\sphericalangle = FAP\sphericalangle \equiv BAP\sphericalangle = BQP\sphericalangle$, míg azt használva, hogy $BDFQ$ konciklikus: $BQD\sphericalangle = BFD\sphericalangle$. Az előző kettőből azt kapjuk, hogy $DQP\sphericalangle = BQP\sphericalangle - BQD\sphericalangle = FEP\sphericalangle - BFD\sphericalangle$. Számoljuk ki most a DEP szöget (kihasználva, hogy a C, E, A pontok egy egyenesen fekszenek, ezért $CEA\sphericalangle = 180°$): $DEP\sphericalangle = (180°) - CED\sphericalangle - PEA\sphericalangle$. (A 180° azért van zárójelben, mert az összeg előjeles mennyiség, így ez elhagyható lenne, és a továbbiakban el is hagyjuk.) Így már csak azt kell belátnunk, hogy $FEP\sphericalangle - BFD\sphericalangle = -CED\sphericalangle - PEA\sphericalangle$, azaz

$$FEP\sphericalangle + CED\sphericalangle + PEA\sphericalangle - BFD\sphericalangle = 0.$$

A negatív előjellel szereplő $BFD\sphericalangle$ irányítását megfordítva, és kihasználva, hogy $FEP\sphericalangle + PEA\sphericalangle = FEA\sphericalangle$, a bizonyítandó ekvivalens az

$$FEA\sphericalangle + CED\sphericalangle + DFB\sphericalangle = 0$$

állítással. Mivel $CED\sphericalangle + DEF\sphericalangle + FEA\sphericalangle = 0$, rögtön adódik, hogy már csak a $DFB\sphericalangle = DEF\sphericalangle$ állítást kell belátnunk.

Ez pedig közvetlen szögszámításokkal néhány lépésben belátható. Ha ugyanis bevezetjük a háromszög irányított szögeire az $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, $BCA\sphericalangle = \gamma(= -\beta - \alpha)$ jelöléseket, és felhasználjuk, hogy az érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AF$, $BF = BD$, illetve $CD = CF$, azt kapjuk, hogy $DFB\sphericalangle = -\frac{180°-\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$ (a BDF háromszög egyenlő szárúságából), és

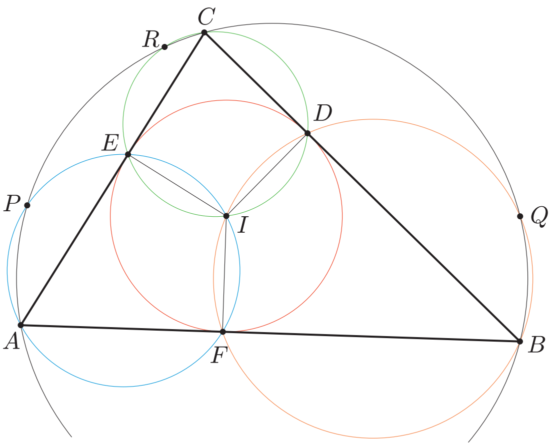
$$DEF\sphericalangle = -FEA\sphericalangle - CED\sphericalangle = -\left(-\frac{180° - \alpha}{2}\right) - \left(-\frac{180° - \gamma}{2}\right) = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

(mivel az előzőek szerint az AEF és CED háromszögek egyenlő szárúak). Innen pedig már világos, hogy $DFB\sphericalangle = DEF\sphericalangle$, hiszen igaz az ekvivalens átalakítások során kapott $-\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ összefüggés (a háromszög belső szögeinek összege alapján). Mivel pedig a $DFB\sphericalangle = DEF\sphericalangle$ összefüggéshez ekvivalens lépésekkel jutottunk el, ebből az is következik, hogy $PQDE$ konciklikus. Ez pedig az első bekezdés szerint a bizonyítandót is vonja maga után.

A bizonyítás során mindvégig irányított szögeket használtunk, és pusztán szögszámításokkal jutottunk el a bizonyítandóhoz, további diszkusszióra nincs szükség.

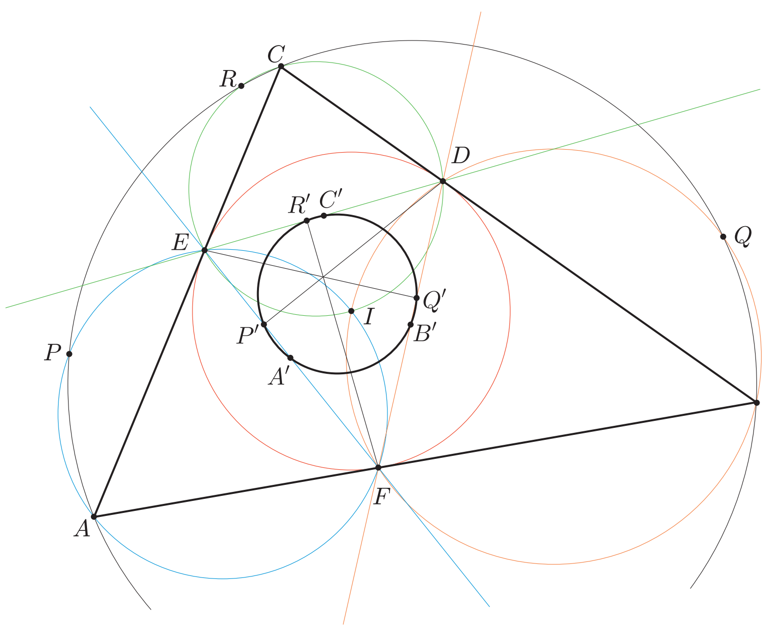
Varga Boldizsár (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az állítás inverzió felhasználásával is igazolható. Legyen az ABC háromszög körülírt köre w, beírt köre pedig k, ennek középpontja I. Invertáljuk a feladatban szereplő pontokat és köröket a beírt k körre. Ekkor $D' \equiv D$, $E' \equiv E$ és $F' \equiv F$.



3. ábra

Az $AEIF$ négyszögben E-nél és F-nél derékszög van, a négyszög húrnégyszög, körülírt köre átmegy az inverzió centrumán, tehát a kör inverz képe egyenes. Mivel E és F helyben marad, az inverz kép az EF egyenes. Mivel AE és AF az A pontból a beírt körhöz húzott érintő szakaszok, ezért egyenlő hosszúak: $AE = AF$. Az AEF



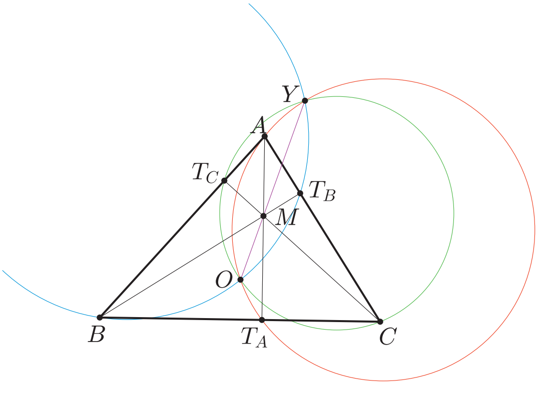
4. ábra

háromszög egyenlő szárú, így az A csúcsbeli szögfelező egyben oldalfelező merőleges is, tehát AI merőlegesen felezi az EF szakaszt. Mivel $A' \in EF$ és $A' \in AI$, azért A' a két szakasz metszéspontja, egyúttal az EF szakasz felezőpontja. Ugyanezzel a gondolattal látjuk, hogy B' és C' pontok is oldalfelező pontok a DEF háromszögben. A w kör nem megy át az inverzió centrumán, így képe ismét kör, az $A'B'C'$ háromszög körülírt köre, vagy másképpen a DEF háromszög Feuerbach-köre.

Az AEF kör és a körülírt kör második metszéspontja a P pont, az inverzeiknél ez a második metszéspont a DEF Feuerbach-körének és az EF egyenesnek az A'-től különböző metszéspontja, vagyis a DEF háromszög D-hez tartozó magasságvonalának talppontja. A logikai szimmetria alapján ezek szerint a P', Q' és R' pontok a DEF háromszög magasságainak talppontjai.

A PD egyenes inverz képe, $P'D'$ általában I-n átmenő kör. (Külön vizsgálatot igényel, ha P, I és D egy egyenesre esnek.) Ezzel az eredeti állítás átfogalmazható: bizonyítandó, hogy a $P'D'I$, $Q'E'I$ és $R'F'I$ köröknek van egy közös, I-től különböző metszéspontja. A DEF háromszög szögei $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, vagyis mindenképpen hegyesszögű.

A megszokott betűzésekre térve azt kell tehát még bizonyítanunk, hogy ha az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai T_A, T_B és T_C, körülírt körének középpontja O, akkor az AT_AO, BT_BO és CT_CO köröknek van egy O-tól különböző közös pontja.



5. ábra

Legyen az ABC háromszög magasságpontja M. Az ABT_ATB húrnégyszög, mert $AT_AB\sphericalangle = AT_BB\sphericalangle = 90°$. Az $M = AT_A \bigcap BT_B$, így az M pontnak erre a körre vonatkozó hatványa $MA \cdot MT_A = MB \cdot MT_B$. Legyen az AT_AO kör és az OM egyenes O-tól különböző metszéspontja Y. Van ilyen második metszéspont, hiszen a háromszög hegyesszögű, M az AT_A szakaszon helyezkedik el, a kör belsejében, és OM nem lehet a kör érintője. Az M pont AT_AO körre vonatkozó hatványa alapján $MA \cdot MT_A = MY \cdot MO$, $MY = \frac{MA \cdot MT_A}{MO}$.

Legyen a BT_BO kör és az OM egyenes O-tól különböző metszéspontja Z. Az M pont BT_BO körre vonatkozó hatványa alapján $MB \cdot MT_B = MZ \cdot MO$, $MZ = \frac{MB \cdot MT_B}{MO}$.

Mivel $MA\cdot MT_A=MB\cdot MT_B$, ezért $MY=MZ$ előjelben is egyezően, az Y és Z pont megegyezik. Ugyanígy az is teljesül, hogy CT_CO is átmegy ezen az Y ponton.

Vizsgáljuk meg, hogy lehet-e az I pont a PD egyenesen. Ez azt jelenti az újrafogalmazott feladatunkban, hogy a körülírt kör középpontja az egyik magasságvonalon van. Ez akkor teljesül, ha a háromszög egyenlő szárú. Ekkor az AT_AO, BT_BO és CT_CO körök közül az egyik elfajuló és megegyezik az OM egyenessel, a másik kettő pedig az OM egyenesen metszi egymást egy további pontban. (Szabályos háromszög esetén mindhárom kör elfajuló, és O a közös pont.)

A bizonyítást befejeztük.

Kercsó-Molnár Anita (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott: Baski Bence, Bencsik Dávid, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Lovas Márton, Mohay Lili Veronika, Somogyi Dalma, Varga Boldizsár, Virág Rudolf, Wiener Anna és a Csakaós Kiga csapat. 5 pontos 3, 4 pontos 3, 3 pontos 2 dolgozat. 2 pontot kapott 1, 0 pontot szintén 1 tanuló.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (749–753.)

K. 749. Aladdin egy szelencében 5 pénzérmét talált, melyekből az egyik hamis. Azt, hogy melyik az, csak Abu, a kismajom tudja. Aladdin 3 érmét kiválaszthat, ebből egyet Abunak ad, cserébe Abu megmondja a másik kettőről, van-e közte hamis. Abu valódi érméért igazat mond, és hazudik, ha hamis érmét kap. Lehet-e legfeljebb három kérdéssel azonosítani a hamis érmét?

Róka Sándor (Nyíregyháza) javaslata alapján

K. 750. Peti mindig ugyanakkora sebességgel megy az iskolába, de néha siet, ilyenkor kétszer akkora sebessséggel halad. Tegnap az iskolába menet az út harmadáig sétált, aztán pedig sietett, ma pedig 6 perccel többet sétált, mint sietett. Hány perccel hosszabb a mai útja a tegnapinál?

K. 751. Van öt csokigolyónk, melyek külsőre ugyanúgy néznek ki. Három csokigolyó mindegyikének tömege 20 g, egy csokigolyó 19 g tömegű, egy pedig 21 g-os. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg. Igazoljuk, hogy a 19 g tömegű csokigolyót három méréssel kiválaszthatjuk, de kevesebbel nem.

K/C. 752. A 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 számok közül k-féleképpen választhatunk ki legalább két olyan számot, amelyek összege osztható 3-mal. Fejezzük ki k segítségével, hogy hányféleképpen választhatunk ki a 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,