c) A megfelelő félévi jegyet a következő táblázatban rögzítettük ($a, b, \ldots, i \in$ $\in \{1; 2; 3; 4; 5\}$):

	matematika	fizika	kémia
Anna	a	b	c
Bea	d	e	f
Cila	g	h	i

Anna átlaga: $\frac{a+b+c}{3}$, Bea átlaga: $\frac{d+e+f}{3}$, Cili átlaga: $\frac{g+h+i}{3}$. A három tanuló átlagának az átlaga:

$$\frac{\frac{a+b+c}{3}+\frac{d+e+f}{3}+\frac{g+h+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

A matematika átlaga: $\frac{a+d+g}{3}$, a fizika átlaga: $\frac{b+e+h}{3}$, a kémia átlaga: $\frac{c+f+i}{3}$. A három tantárgy átlagának az átlaga:

$$\frac{\frac{a+d+g}{3}+\frac{b+e+h}{3}+\frac{c+f+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

Láthatjuk, hogy a három tanuló átlagának az átlaga és a három tantárgy átlagának az átlaga egyenlő.

Kozma Katalin Abigél, Győr
Számadó László Budapest

Projektív geometria és társai – avagy hogyan birkózzunk meg egy feladattal 1. első három gyakorlófeladatának megoldásvázlata

F/1. Megoldásvázlat. Legyen a négy érintési pont A, B, C és D (ebben a sorrendben). Invertáljunk egy A középpontú körre. Ekkor k_1 és k_2 (melyek az A-n átmenő érintő körök voltak) párhuzamos k_1', k_2' egyenesekbe mennek és a k_3, k_4 körök k_3', k_4' képei olyan körök, melyek C'-ben érintik egymást, és k_2'-t B'-ben, míg k_1'-et D'-ben érintik. Igen egyszerű szögszámolással adódik, hogy B', C', D' egy egyenesen van. Visszainvertálva: ha ez az egyenes átment A-n, akkor A, B, C, D egy egyenesen van, és ha ez az egyenes nem ment át A-n, akkor az egyenes képe az $ABCD$ kör lesz.

F/2. Megoldásvázlat. Invertáljunk egy C középpontú körre. A PQ átmérőjű félkör a $P'Q'$ átmérőjű félkörbe megy (hiszen a középpont rajta marad a $P-C-Q$ egyenesen), míg ω egy e egyenesbe, amely érinti a $P'Q'$ átmérőjű félkört és párhuzamos $P'Q'$-vel, hiszen az inverzió szögtartó és eredetileg is érintették egymást. Az AB egyenes képe egy olyan k kör lesz, amelynek a középpontja $P'Q'$-n van és érinti ω'-t. Így Ω' és k kongruens lesz. A k kör Ω'-t A'-ben, míg

$P'Q'$-t B'-ben metszi el. Ekkor $P'A'B'$ egyenlő szárú, azaz $PAC\sphericalangle = A'P'C\sphericalangle =$ $= A'B'C\sphericalangle = BAC\sphericalangle$.

F/3. Megoldásvázlat. Érdemes lehet egy A középpontú körre invertálni, hiszen minden szöges feltételben ott van A. Nagy haszna lesz az **1.2**-es lemmának. Jelölje az inverzió során X képét X'. Ekkor

$$APB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = APC\sphericalangle - ABC\sphericalangle,$$

$$AB'P'\sphericalangle - AB'C'\sphericalangle = AC'P'\sphericalangle - AC'B'\sphericalangle,$$

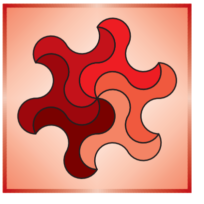
$$P'B'C'\sphericalangle = P'C'B'\sphericalangle,$$

$$P'B' = P'C'.$$

A szögfelező-tétel miatt ahhoz, hogy BD és CE ugyanabban a pontban messe el AP-t, az kell teljesüljön, hogy $AB/BP = AC/CP$. Az APB, $AB'P'$ és az ACP, $AP'C'$ háromszögek hasonlóságából pedig adódik, hogy

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AP'}{P'B'} = \frac{AP'}{P'C'} = \frac{AC}{CP}.$$

Matematika feladatok megoldása



B. 5202. *Két racionális számot* ismerősnek *nevezünk, ha van olyan p/q, illetve r/s alakjuk (p, q, r, s egészek), amelyekre $|ps-qr|=1$. Hány közös ismerőse lehet két ismerős racionális számnak?*

(*5 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

Megoldás. Legyen a p/q és r/s két ismerős racionális szám, megfelelő alakjukban (p, q, r, s egészek, q és s sem nulla).

Ha a négy egész között van nulla, az általánosság rovása nélkül föltehetjük, hogy $p=0$. Ekkor q és r is 1 vagy -1. Vagyis a 0-nak csak a ± 1 lesz az ismerőse.

Ezek után vegyük fel a síkon az $A(p;q)$ és $B(r;s)$ rácspontokat. Az O origóval együtt alkotott ABO rácsháromszögük területe éppen $\frac{1}{2}|ps-qr| = \frac{1}{2}$ (hiszen ismerősek), vagyis ABO üres rácsháromszög.

Azt kaptuk tehát, hogy a két racionális szám ismerőssége azt jelenti, hogy az $A(p;q)$ és $B(r;s)$ pontok az origóval együtt üres rácsháromszöget fognak közre. Ha ismerősek, akkor ez láttuk, hogy teljesül és ha ez teljesül, akkor $|ps-qr|=1$, vagyis ismerősök. (Ha s és r továbbra sem nulla.)

Ha a négy egész között nincsen nulla, akkor p, q, illetve r, s relatív prímek, hiszen ha valamely párnak d egy közös osztója, akkor az osztja a $|ps-qr|$ kifejezést is, ami viszont éppen az 1.