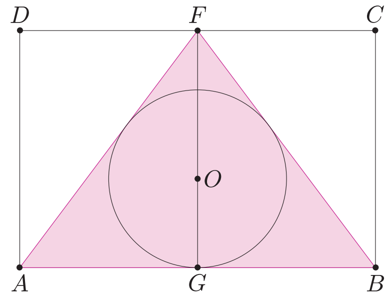
7. Gábor egy különleges kis dartstáblát készít kisfiának: egy téglalapban egyenlő szárú háromszög és annak beírt köre látható az *ábra* szerint. A téglalap és a háromszög közös oldala 6 deciméter, a háromszögbe írt kör sugara 15 centiméter.



a) Mekkora a háromszög területének és kerületének pontos értéke? (*10 pont*)

Feltételezzük, hogy a játékkal játszó kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a körbe talál a lövés? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a háromszög körön kívüli pontját találja el a lövés? (*3 pont*)

8. Adott az $n^4 + 64 \cdot m^4$ kifejezés, ahol n és m pozitív egész számok.

a) Igazoljuk, hogy ha $n = m = 2$, a kifejezés osztható 13-mal. (*2 pont*)

b) Adjunk meg olyan n és m értéket, amelyek relatív prímek és amelyekre a kifejezés értéke osztható 5-tel. (*3 pont*)

c) Igazoljuk, hogy bármely n és m pozitív egész esetén a kifejezés értéke nem prímszám. (*11 pont*)

9. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ függvény.

a) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedben levő síkidom területét. (*6 pont*)

b) Egy egyenes áthalad az előbbi f függvény $P(2;3)$ koordinátájú pontján. Mi lehet ennek az egyenesnek az egyenlete, ha tudjuk, hogy az első negyedben létrejött síkidomot úgy vágja két részre, hogy az egyik rész területe kétszer akkora, mint a másik rész területe? (*10 pont*)

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Megoldásvázlatok a 2022/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Az a_n számtani sorozat különbsége* 4, *az első hét tagjának összege* 105. *Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*3 pont*)

b) *A b_n mértani sorozat hányadosa* 4, *az első hét tagjának összege* 16 383. *Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*3 pont*) *c) A c_n sorozat minden tagja az n elsőfokú függvénye. A sorozat második tagja 7, a hetedik tagja 27. Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A szokásos jelölésekkel: $a_1 + (a_1 + 4) + (a_1 + 8) + (a_1 + 12) + (a_1 + 16) + (a_1 + 20) + (a_1 + 24) = 105$, amelyből $7a_1 + 84 = 105$, $a_1 = 3$.

b) A mértani sorozat összegképlete alapján: $b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 16\,383$, behelyettesítés után $b_1 \cdot \frac{4^7-1}{4-1} = 16\,383$, amelyből megkapjuk, hogy $b_1 = 3$.

c) A feltételek alapján: $c_n = a \cdot n + b$, ahol a, b valós számok, de $a \neq 0$. Továbbá, $c_2 = a \cdot 2 + b = 7$ és $c_7 = a \cdot 7 + b = 27$, így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$2a + b = 7,$$

$$7a + b = 27.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 4$, illetve $b = -1$, amelyből $c_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$.

2. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$5^{-x+1} - 10 \cdot 5^{-x-1} + 6 \cdot 5^{-x-2} = 16{,}2. \qquad (6\ pont)$$

b) *Igazoljuk, hogy*

$$\lg 3^{2x} \cdot \lg 7^{2x} \leqslant \left(\lg 3^x + \lg 7^x\right)^2$$

minden valós x esetén fennáll. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A hatványozás azonosságait használva:

$$5 \cdot 5^{-x} - 2 \cdot 5^{-x} + 0{,}24 \cdot 5^{-x} = 16{,}2,$$

amelyből $3{,}24 \cdot 5^{-x} = 16{,}2$, ezért $5^{-x} = 5^1$. Az 5-ös alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $x = -1$. Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy hivatkozás az ekvivalens átalakításokra.

b) A bizonyítandó állításban szereplő kifejezések minden valós x-re értelmezettek. Rendezzük 0-ra, és hajtsunk végre néhány ekvivalens átalakítást:

$$0 \leqslant (\lg 3^x + \lg 7^x)^2 - \lg 3^{2x} \cdot \lg 7^{2x} = (\lg 3^x + \lg 7^x)^2 - \lg (3^x)^2 \cdot \lg (7^x)^2,$$

$$0 \leqslant (\lg 3^x + \lg 7^x)^2 - 4 \cdot \lg 3^x \cdot \lg 7^x, \quad \text{amelyből}$$

$$0 \leqslant (\lg 3^x - \lg 7^x)^2.$$

A kapott egyenlőtlenség igaz, és ezzel állításunkat igazoltuk.

3. *Egy üzemben* 5 *milliméter vastagságú,* 80 *centiméter oldalhosszúságú négyzet alakú acéllapokból a lehető legnagyobb, szabályos tizenkétszögeket vágnak ki úgy, hogy a tizenkétszögek két-két oldala illeszkedjen a négyzetlapok oldalára. Tudjuk, hogy az acél sűrűsége* $7{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

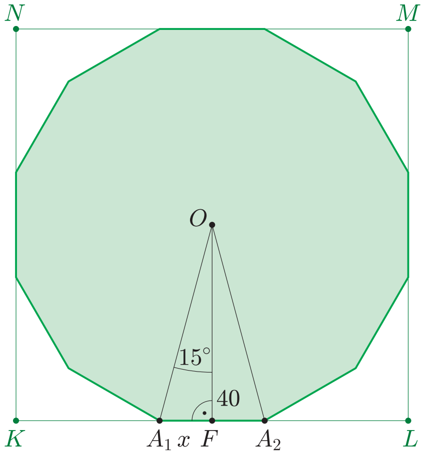
a) *Mekkora lesz* 75 *darab legyártott tizenkétszög tömege?* (*7 pont*)

A szabályos tizenkétszög csúcsait megszámozzuk sorban 1-től 12-ig. A sorszámozott csúcsok közül bármelyik három egy-egy háromszöget alkot.

b) Adjuk meg az így kapott derékszögű és nem derékszögű háromszögek számát. (6 pont)

Megoldás. *a*) Legyen a kiinduló négyzet a $KLMN$, és a tizenkétszög A_1A_2 oldala illeszkedjen a négyzet KL oldalára. Legyen továbbá a négyzet átlóinak metszéspontja O, a KL felezőpontja pedig F.

Használjuk az *ábra* jelöléseit. A szabályos tizenkétszög tulajdonságai és a megadott adatok alapján: $A_1OA_2\sphericalangle = 30°$, $OF = 40$ cm, vagyis $A_1OF\sphericalangle = 15°$. Az A_1OF derékszögű háromszögből kapjuk, hogy $x = 40 \cdot \operatorname{tg} 15°$. A tizenkétszög területe (cm^2-ben):



$$T = 12 \cdot T_{A_1A_2O} = 12 \cdot \frac{A_1A_2 \cdot OF}{2} =$$

$$= 12 \cdot x \cdot OF = 12 \cdot (40 \cdot \operatorname{tg} 15°) \cdot 40 =$$

$$= 19\,200 \cdot \operatorname{tg} 15°.$$

A megadott sűrűséggel a 75 darab, 0,5 centiméter vastagságú tizenkétszög tömege

$$75 \cdot 19200 \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}8 \approx 1\,504\,803 \text{ (gramm)},$$

amely kerekítve 1505 kilogramm.

b) A Thalész-tétel (megfordítása) miatt derékszögű háromszöget akkor kapunk, ha a háromszög leghosszabb oldala a tizenkétszög köré írt körének átmérője, tehát ennek az oldalnak a két végpontja a tizenkétszög két átellenes csúcsa. Ilyen módon két csúcsot hatféleképpen tudunk választani: A_1A_7, A_2A_8, A_3A_9, A_4A_{10}, A_5A_{11}, A_6A_{12}. A háromszög harmadik, a derékszögű csúcsa a maradék 10 csúcs közül bármelyik lehet. Ez mind a hat esetben 10 lehetőséget jelent, vagyis a derékszögű háromszögek száma: $6 \cdot 10 = 60$. Az összes háromszög számát úgy kapjuk, ha a 12 csúcs közül az összes lehetséges módon kiválasztunk három darabot. Ezeknek a száma: $\binom{12}{3} = 220$, azaz a nem derékszögű háromszögek száma: $220 - 60 = 160$.

4. *Magyarországon 2022-ig a gépkocsik (nem egyedi) rendszáma három betűből és három számjegyből állt. Az ábécé 26 betűje használható ezekben a rendszámokban.*

a) Hány autó kaphat ilyen módon rendszámot? (4 pont)

b) Hány olyan rendszám lehet, amelyikben kétféle betű, és kétféle számjegy szerepel? (5 pont)

c) Az elképzelhető összes rendszámból véletlenszerűen választunk egy darabot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy három különböző betűből és három különböző számjegyből áll ez a rendszám? (5 pont)

Megoldás. a) Mivel többször is szerepelhetnek a betűk és a számjegyek is egy-egy rendszámban, ezért a három betű 26^3, a három számjegy pedig 10^3 darab lehet, az összes lehetőség ezek alapján: $26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$.

b) Legyen a rendszámban szereplő kétféle betű az A és a B. Ezek 6-féleképpen fordulhatnak elő: AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA. Mivel a 26 betű közül $\binom{26}{2}$-féleképpen választhatunk ki két betűt, ezért minden választás esetén $6 \cdot \binom{26}{2}$, azaz 1950 rendszám betűit tudjuk előállítani. A számjegyek esetén is hasonlóan gondolkodhatunk: $6 \cdot \binom{10}{2} = 270$. Ezek alapján az összes megfelelő rendszám darabszáma: $1950 \cdot 270 = 526\,500$.

c) Az összes elképzelhető rendszám száma: $26^3 \cdot 10^3$. Mivel most csak egyszer szerepelhetnek a betűk és a számjegyek is egy-egy rendszámban, ezért a három betű $26 \cdot 25 \cdot 24$, a három számjegy pedig $10 \cdot 9 \cdot 8$ darab lehet. A kedvező lehetőségek száma ezek alapján: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$. A keresett valószínűséget a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa adja, vagyis annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott rendszám három különböző betűből és három különböző számjegyből fog állni:

$$p = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{26^3 \cdot 10^3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 8}{26^2 \cdot 10^2} \approx 0{,}639.$$

II. rész

5. *Adott a következő két függvény:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = -x - 1, \quad \textit{és} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) = -x^2 - 10x - 19.$$

a) Oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet a valós számok halmazán. *(3 pont)*

b) Írjuk fel az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y = g(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét. *(7 pont)*

c) Számítsuk ki az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok által közbezárt síkidom területét. *(6 pont)*

Megoldás. a) Rendezés után a következő másodfokú egyenletet kell megoldanunk: $x^2 + 9x + 18 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával látható, hogy $x_1 = -3$, $x_2 = -6$.

b) Adott pontban a függvénygrafikon érintőjének meredeksége egyenlő a függvény első deriváltjának értékével. Mivel $g'(x) = -2x - 10$, ezért az e_1 érintő meredeksége $m_1 = g'(-3) = -4$, az e_2 érintő meredeksége $m_2 = g'(-6) = 2$. Az e_1 egyenes átmegy a $g(x)$ grafikonjának $P_1(-3; 2)$ pontján, ezért $2 = -4 \cdot (-3) + b_1$, amelyből $b_1 = -10$, így $e_1 : y = -4x - 10$. Hasonlóképpen, a $P_2(-6; 5)$ pont illeszkedik az e_2 egyenesre, ezért $5 = 2 \cdot (-6) + b_2$, ebből $b_2 = 17$, tehát $e_2 : y = 2x + 17$.

c) A grafikonok által meghatározott síkidom területét a következő határozott integrál kiszámításával kaphatjuk meg:

$$\int_{-6}^{-3}\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int_{-6}^{-3}(-x^2-9x-18)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-4{,}5x^2-18x\right]_{-6}^{-3}=$$

$$=22{,}5-18=4{,}5.$$

A síkidom területe 4,5 területegység.

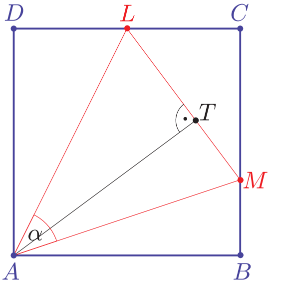
6. *Egy* 600 *méter oldalhosszúságú, négyzet alakú parkot futópálya határol. A park egyik csúcsától indítja András, az edző a két futóatlétáját, akik egyszerre indulnak, de más irányban. András helyben marad, Lali* 9 km/h, *Máté* 8 km/h *egyenletes sebességgel fut az edzésen.* 6 *perc elteltével a három szereplő az* ALM *háromszög csúcsaiban van, ahol a háromszög csúcsait a szereplők nevének a kezdőbetűjével jelöltük.*

a) *Milyen messze van ekkor Andrástól Lali és Máté?* (*4 pont*)

b) *Milyen messze van ekkor egymástól a két futó?* (*2 pont*)

c) *Igazoljuk, hogy ekkor András pontosan* 45°*-os szögben látja az* LM *szakaszt.* (*5 pont*)

d) *A parkban az* L *és* M *között van egy egyenes sétaút is. Milyen messze van András ettől az úttól?* (*5 pont*)



Megoldás. *a*) 6 perc, azaz 0,1 óra alatt Lali 900 métert, Máté pedig 800 métert fut. Ezek alapján: $AD+DL=600+300=900$ méter, $AB+BM=$ $=600+200=800$ méter. A Pitagorasz-tételt használva az ADL derékszögű háromszögben András és Lali távolsága: $AL^2=AD^2+DL^2=600^2+300^2=450\,000$, amelyből $AL=\sqrt{450\,000}=300\sqrt{5}\approx 671$ méter.

A Pitagorasz-tételt használva az ABM derékszögű háromszögben András és Máté távolsága: $AM^2=AB^2+BM^2=600^2+200^2=400\,000$, amely alapján $AM=\sqrt{400\,000}=200\sqrt{10}\approx 632$ méter. Andrástól Lali 671 méterre, Máté pedig 632 méterre van.

b) Mivel $DL=300$, ezért $LC=300$. Mivel $BM=200$, ezért $MC=400$. A Pitagorasz-tételt használva az LCM derékszögű háromszögben Lali és Máté távolsága: $LM=\sqrt{LC^2+MC^2}=\sqrt{300^2+400^2}=500$ (méter).

A két sportoló 500 méterre van egymástól.

c) Az ALM háromszögre használjuk a koszinusztételt:

$$LM^2=AL^2+AM^2-2\cdot AL\cdot AM\cdot\cos\alpha.$$

A háromszög oldalainak hosszát már ismerjük, végezzük el a behelyettesítést, de az igazolás miatt csakis a pontos értékeket használhatjuk:

$$250\,000=450\,000+400\,000-2\cdot 300\sqrt{5}\cdot 200\sqrt{10}\cdot\cos\alpha,$$

amelyből azt kapjuk, hogy

$$\cos\alpha = \frac{450\,000 + 400\,000 - 250\,000}{2 \cdot 300\sqrt{5} \cdot 200\sqrt{10}} = \frac{600\,000}{120\,000 \cdot \sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az α egy háromszög belső szöge, ezért a $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlet megoldását a $]0°; 180°[$-on keressük. Az egyedüli megoldás $\alpha = 45°$, és ezzel az állítást igazoltuk.

d) Az AT szakasz hosszát kell meghatároznunk. Írjuk fel az ALM háromszög területét kétféleképpen:

$$T = \frac{LM \cdot AT}{2} = \frac{500 \cdot AT}{2} = 250 \cdot AT,$$

illetve

$$T = \frac{AL \cdot AM \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{300\sqrt{5} \cdot 200\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 150\,000.$$

Ebből következik, hogy $250 \cdot AT = 150\,000$, azaz $AT = 600$ (m).

András 600 méterre van az úttól.

7. *Boglárka érdekes számhármasokat gyűjtött, és a következőket állapította meg:*

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2,$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2.$$

a) *Béla meglátta Boglárka egyenleteit és elgondolkodott azon, hogy lehet-e egy ilyen tulajdonságú számhármas legkisebb eleme a* 2023. *Segítsünk Bélának, határozzuk meg $k \in \mathbb{Z}$ értékét, ha $2023^2 + k^2 = (k+1)^2$.* (*4 pont*)

b) *Bálint azt állítja, hogy a végtelenségig folytatható az egyenlőségek sorozata, azaz minden $2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ alakú páratlan szám négyzetéhez hozzáadva a $2n(n+1)$ négyzetét, éppen a következő négyzetszámot kapjuk. Igazoljuk Bálint állítását.* (*6 pont*)

c) *Bizonyítsuk be, hogy $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023} + 5^{2023}$ osztható* 5*-tel.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Bontsuk fel a zárójelet, majd az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki k^2-t:

$$2023^2 + k^2 = k^2 + 2k + 1,$$
$$2023^2 = 2k + 1.$$

Ebből rendezés után azt kapjuk, hogy

$$k = \frac{2023^2 - 1}{2} = 2\,046\,264.$$

Ellenőrzés: $2023^2 + 2\,046\,264^2 = 4\,187\,200\,450\,225 = 2\,046\,265^2$.

b) Bálint állítása a következő: Minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz, hogy

$$(2n+1)^2 + \big(2n(n+1)\big)^2 = \big(2n(n+1)+1\big)^2.$$

Az egyenlet bal oldalából kiindulva, azonos átalakításokat végzünk:

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^2(n^2+2n+1) = 4n^2(n^2+2n+1) + 4n(n+1) + 1 =$$

$$= \big(2n(n+1)\big)^2 + 2 \cdot 2n(n+1) + 1 = \big(2n(n+1)+1\big)^2,$$

így éppen a jobb oldalon álló kifejezést kapjuk. Ezzel a bizonyítás végére értünk, megmutattuk, hogy Bálint állítása igaz.

c) *I. megoldás.* Az $1^{2023} = 1$, a 2 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései négyesével ismétlődnek $(2, 4, 8, 6, 2, \ldots)$, és $2023 = 505 \cdot 4 + 3$, ezért a 2^{2023} utolsó számjegye 8. A 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései is négyesével ismétlődnek $(3, 9, 7, 1, 3, \ldots)$, ezért a 3^{2023} utolsó számjegye 7. A 4 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései kettesével ismétlődnek $(4, 6, 4, \ldots)$, tehát páratlan kitevő esetén 4-re végződnek, ezért a 4^{2023} utolsó számjegye 4. Az 5 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződése mindig 5, tehát az 5^{2023} utolsó jegye 5. Ezek alapján az öttagú összeg utolsó jegye 5, vagyis osztható 5-tel. Ezzel a bizonyítás kész.

II. megoldás. Mivel az 5 bármelyik pozitív egész kitevőjű hatványa osztható 5-tel, így elég megmutatnunk, hogy $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023}$ osztható 5-tel. A kifejezés tagjait alkalmasan csoportosítjuk:

$$1^{2023} + 4^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023},$$

majd alkalmazzuk az

$$a^n + b^n = (a+b)\big(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$$

azonosságot, amelyben n pozitív, páratlan szám:

$$\big(1^{2023} + 4^{2023}\big) + \big(2^{2023} + 3^{2023}\big) =$$

$$= (1+4) \cdot (\text{egész szám}) + (2+3) \cdot (\text{egész szám}) = 5 \cdot (\text{egész szám}),$$

azaz beláttuk, hogy a kifejezés osztható 5-tel.

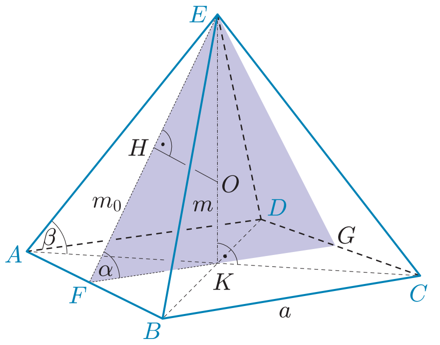
8. *Egy vállalkozás olyan négyzet alapú egyenes gúlákat rendel reklámajándéktárgyként, amelyeknek az oldallapjai az alaplappal* $60°$*-os szöget zárnak be, és az alapéleinek a hossza* 12 *centiméter. A négy kiemelkedő termékük reklámját szeretnék elhelyezni a gúla egy-egy oldallapján.*

a) *Határozzuk meg mekkora területű részre kell megtervezni egy termék reklámját.* (*3 pont*)

b) *Mekkora a gúla térfogata?* (*3 pont*)

c) *Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal?* (*4 pont*)

d) *A gúla alakú dobozok belsejében egy-egy (gömb alakú) ajándék labdát is elhelyeznek, amelyek mind a négy oldallapot és az alaplapot is érintik. Mekkora a labda sugara?* (*6 pont*)



Megoldás. a) Legyen az AC és a BD átló metszéspontja K, a gúla testmagassága $EK = m$. Az AB él felezőpontja F, így $FE = m_0$ az ABE oldallap magassága, és $KFE\sphericalangle = \alpha = 60^\circ$ az alaplap és az oldallapok bezárt szöge.

A KFE derékszögű háromszögből

$$m_0 = \frac{a}{2 \cdot \cos 60^\circ} = \frac{12}{2 \cdot \cos 60^\circ} = 12 \text{ (cm)}.$$

Ezt felhasználva a gúla egy oldallapjának a területe, ahová egy terméknek a reklámját kell megtervezni:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{a \cdot m_0}{2} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2.$$

b) A KFE derékszögű háromszögből

$$m = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{12}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{a^2 \cdot m}{3} = \frac{12^2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 288 \cdot \sqrt{3} \approx 498{,}8 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

c) A gúla forgásszimmetrikus, ezért az oldalélek az alaplappal ugyanakkora szöget zárnak be. Az EA oldalél alaplappal alkotott β szögét az EAK derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{EK}{KA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

innen $\beta \approx 50{,}77^\circ$.

d) A gúla beírt gömbjének sugarát kell meghatároznunk. Ez a gömb az oldallapokat azok lapmagasságain, az alaplapot a négyzet átlóinak metszéspontjában érinti. Legyen a CD él felezőpontja G, a gúlának egy alaplapra merőleges síkmetszete a GFE háromszög. A beírt gömb O középpontja az EK tengelyre illeszkedik, ezért a GFE sík egy olyan főkört metsz ki a gömbből, amely egyúttal a GFE háromszög beírt köre. A GFE háromszögben FO szögfelező, ezért $OFK\sphericalangle = 30^\circ$. A gömb sugara:

$$r = KO = KF \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}5.$$

A gúla alakú dobozokban 3,5 cm sugarú labdákat helyeztek el.

Megjegyzés. A GFE háromszög beírt körének r sugara többféleképpen is meghatározható. Alkalmazhattuk volna az $r = \frac{t}{s}$ képletet, de hasonlósággal is célt lehetne érni. Ha a kör az EF szakaszt H-ban érinti, akkor az EHO és az EKF háromszögek hasonlók.

9. *a) Egy matematikatanár tanít a* 12. A *és a* 12. B *osztályban is. Íratott egy közös dolgozatot, amelyben* 120 *pont volt az elérhető legmagasabb pontszám. Az* A *osztályban* 84 *pont, a* B *osztályban* 74 *pont lett az átlag. Az* A *osztályos fiúk átlagosan* 81*, a* B *osztályos fiúk pedig* 71 *pontot értek el. Az* A *osztályban a lányok átlagosan* 90*, míg a* B *osztályban a lányok átlagosan* 76 *pontos dolgozatot írtak. Tudjuk továbbá, hogy az összes fiú átlaga* 79 *pont lett. Mennyi a két osztályban az összes lány átlagpontszáma?* (*8 pont*)

b) Az A *osztályban tanuló Andrásnak hat jegye van matematikából, és a hat jegynek a mediánja* 4*. Mit mondhatunk a* B *osztályban tanuló Benedek matematikajegyeinek mediánjáról, ha hat jegye pontosan megegyezik András jegyeivel, de neki van még ezen túl egy hetedik jegye, amely* 5*-ös?* (*4 pont*)

c) Három barátnő, Anna, Bea és Cili matematikából, fizikából és kémiából elért félévi eredményeiket vizsgálta.

I. *Kiszámolták mindegyiküknek az átlagát, majd ezeknek az átlagoknak vették az átlagát.*

II. *Kiszámolták a három tantárgy átlagát, majd ezen átlagok átlagát vették.*

Mutassuk meg, hogy a kétféle módon kapott átlag egyenlő egymással. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A következő *táblázat* tartalmazza az ismert átlagokat, az összes lány átlagpontszámát jelölje x:

	fiúk átlaga	lányok átlaga	osztály átlaga
12. A	81	90	84
12. B	71	76	74
átlag	79	x	

A 12. A osztályban a fiú, a 12. B osztályban b fiú, a 12. A osztályban c lány, a 12. B osztályban d lány van. A táblázat első sora alapján a következő egyenletet írhatjuk fel: $81a + 90c = 84(a + c)$, amelyből $a = 2c$. A táblázat második sora alapján pedig a következő: $71b + 76d = 74(b + d)$, amelyből $d = 1{,}5b$. A táblázat első oszlopa alapján: $81a + 71b = 79(a + b)$, ebből $a = 4b$. A táblázat második oszlopa alapján: $90c + 76d = x(c + d)$, vagyis $x = \frac{90c+76d}{c+d}$. Mivel $a = 2c$ és $a = 4b$, ezért $2c = 4b$, vagyis $c = 2b$. Alkalmazzuk az x-re kapott összefüggésben a $c = 2b$ és a korábban kapott $d = 1{,}5b$ helyettesítést:

$$x = \frac{90 \cdot 2b + 76 \cdot 1{,}5b}{2b + 1{,}5b} = \frac{180 + 114}{3{,}5} = 84.$$

A két osztályban az összes lány átlagpontszáma 84.

b) Legyen András hat jegye: $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant f$. Mivel ezeknek az érdemjegyeknek a mediánja 4, és páros darabszámú jegyről van szó, ezért $\frac{c+d}{2} = 4$. Benedek hét jegyével kapcsolatban három eset lehetséges. Ha $c = 3$ és $d = 5$, akkor a sorrend: $a, b, c, 5, d, e, f$, vagyis a medián 5. Ha $c = 4$ és $d = 4$, akkor a sorrend: $a, b, c, d, \ldots$, vagyis a medián $d = 4$-gyel egyenlő. Ezek alapján, ha a hat érdemjegyhez hozzáveszünk egy 5-öst, akkor a hét számnak a mediánja, azaz Benedek matematikajegyeinek mediánja vagy 4, vagy 5 lesz.

c) A megfelelő félévi jegyet a következő táblázatban rögzítettük ($a, b, \ldots, i \in$ $\in \{1; 2; 3; 4; 5\}$):

	matematika	fizika	kémia
Anna	a	b	c
Bea	d	e	f
Cila	g	h	i

Anna átlaga: $\frac{a+b+c}{3}$, Bea átlaga: $\frac{d+e+f}{3}$, Cili átlaga: $\frac{g+h+i}{3}$. A három tanuló átlagának az átlaga:

$$\frac{\frac{a+b+c}{3}+\frac{d+e+f}{3}+\frac{g+h+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

A matematika átlaga: $\frac{a+d+g}{3}$, a fizika átlaga: $\frac{b+e+h}{3}$, a kémia átlaga: $\frac{c+f+i}{3}$. A három tantárgy átlagának az átlaga:

$$\frac{\frac{a+d+g}{3}+\frac{b+e+h}{3}+\frac{c+f+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

Láthatjuk, hogy a három tanuló átlagának az átlaga és a három tantárgy átlagának az átlaga egyenlő.

Kozma Katalin Abigél, Győr **Számadó László** Budapest

Projektív geometria és társai – avagy hogyan birkózzunk meg egy feladattal 1. első három gyakorlófeladatának megoldásvázlata

F/1. Megoldásvázlat. Legyen a négy érintési pont A, B, C és D (ebben a sorrendben). Invertáljunk egy A középpontú körre. Ekkor k_1 és k_2 (melyek az A-n átmenő érintő körök voltak) párhuzamos k_1', k_2' egyenesekbe mennek és a k_3, k_4 körök k_3', k_4' képei olyan körök, melyek C'-ben érintik egymást, és k_2'-t B'-ben, míg k_1'-et D'-ben érintik. Igen egyszerű szögszámolással adódik, hogy B', C', D' egy egyenesen van. Visszainvertálva: ha ez az egyenes átment A-n, akkor A, B, C, D egy egyenesen van, és ha ez az egyenes nem ment át A-n, akkor az egyenes képe az $ABCD$ kör lesz.

F/2. Megoldásvázlat. Invertáljunk egy C középpontú körre. A PQ átmérőjű félkör a $P'Q'$ átmérőjű félkörbe megy (hiszen a középpont rajta marad a $P-C-Q$ egyenesen), míg ω egy e egyenesbe, amely érinti a $P'Q'$ átmérőjű félkört és párhuzamos $P'Q'$-vel, hiszen az inverzió szögtartó és eredetileg is érintették egymást. Az AB egyenes képe egy olyan k kör lesz, amelynek a középpontja $P'Q'$-n van és érinti ω'-t. Így Ω' és k kongruens lesz. A k kör Ω'-t A'-ben, míg