F/7. (B. 4765., KöMaL 2016. jan., megoldás:
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4765&l=hu`.)
Az $ABCD$ húrnégyszögben az $ADB\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögek felezői az AB oldalt rendre az E és F pontokban, a $CBD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ szögek felezői pedig a CD oldalt rendre a G és H pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az E, F, G, H pontok egy körön vannak.

Bán-Szabó Áron
Budapest

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő feladatokat:

a) $|\sin x| > \cos x - 1$; (*5 pont*)

b) $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$. (*7 pont*)

2. Egy fagráf éleit újabb 435 él behúzásával kiegészítettük, így egy egyszerű, összefüggő teljes gráfot kaptunk. Hány pontú ez a gráf? (*4 pont*)

b) Igazoljuk a következő állítást: bármely n pontú fagráf annyi újabb él behúzásával tehető egyszerű, összefüggő teljes gráffá, amennyi az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma. (*4 pont*)

Leonardo Pisano (kb. 1170 – kb. 1250?) olasz matematikus Fibonacci néven lett ismert. Több érdekes könyve, feladata maradt fenn. Róla nevezték el a következő sorozatot: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$. A sorozat tetszőleges tagja úgy kapható meg, hogy az előző két tagot összeadjuk. Az első és második tag is 1.

c) Egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagjának összege 700. Ha az első számhoz 44-et, a második számhoz 33-at adunk, a harmadik számból pedig 23-at kivonunk, a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Melyek ezek a számok? (*6 pont*)

3. A Derelye pékségben jártunk.

a) A pékség polcán 30 darab mákos kifli van. Vannak közte olyan darabok, amelyek nem felelnek meg a szigorú minőségi követelményeknek. Ha két kiflit – visszatevés nélkül – kiveszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mind a kettő hibátlan $\frac{38}{9}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy mindkét kivett darab hibás. Hány nem megfelelő mákos kifli van a polcon? (*7 pont*)

A túrós batyukat is szigorú ellenőrzés alá vonjuk a pékségben. Lemérve a polcon található darabokat, a következő értékeket kapjuk grammban: 132, 132, 133, 132, 130, 129, 129, 131, 130, 130, 132, 130, 130, 128, 127, 129, 132, 131, 133, 131, 129, 127, 128, 127, 129.

b) Készítsünk az adatokból gyakorisági táblázatot. Igazoljuk, hogy az adatok szórása nem haladja meg a megengedett 2 értéket. (*5 pont*)

4. Bármely szabályos sokszögnek van beírt és köréírt köre is.

a) Mekkora a szabályos nyolcszögnél a beírható és köré írható kör sugarának aránya? (*3 pont*)

Egy szabályos sokszög beírható körének sugara (r) és köré írható körének sugara (R) között a következő összefüggés áll fenn:

$$4r^2 + 3R^2 = 4\sqrt{3}rR.$$

b) Mekkora az $\frac{r}{R}$ arány értéke? (*6 pont*)

c) Hány oldalú lehet a sokszög? (*4 pont*)

II. rész

5. Adott két, pozitív valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = x^{2-\log_2 x} + x \quad \text{és} \quad g(x) = x^{3-\log_2 x} - x.$$

a) Igazak, vagy hamisak az alábbi állítások? (*5 pont*)

A) $f(1) = 2$;

B) $2 \cdot f(2) = g(2)$;

C) $g(1) + g(2) + g(4) + g(8) = -5$.

b) Adjuk meg az összes olyan $a \in D_f \cap D_g$ valós számot, melyre $f(a) - g(a) = 2$. (*11 pont*)

6. Egy baráti társaság együtt lottózik. Minden alkalommal a hagyományos ötöslottón töltenek ki szelvényeket (kilencven számból kell ötöt eltalálni). Az egyik héten a nagy nyeremény reményében újra összeültek és megtervezték a kitöltés módszerét. A csoport minden tagja ugyanannyi szelvényt töltött ki, de ügyeltek arra, hogy minden szelvény különbözőképpen legyen kitöltve.

a) Hányan voltak a csoportban, ha ügyes szervezéssel mindenki 25 különböző szelvényt töltött ki és így pontosan annyi különbözően kitöltött szelvényük lett, amennyi egy sorsolásnál a különböző négytalálatos szelvények lehetséges száma? (*6 pont*)

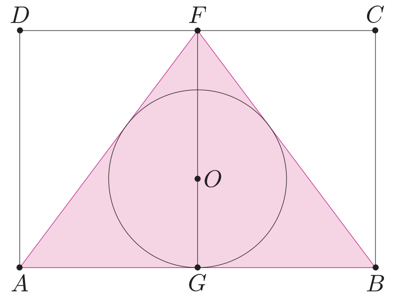
b) Az azon a héten kihúzott öt szám (x, y, z, u, v) értékére a következő összefüggések írhatók fel:

$$x + y + z = 49, \qquad y + z + u = 101, \qquad z + u + v = 173,$$
$$u + v + x = 147, \qquad v + x + y = 109.$$

Mik voltak a nyerőszámok? (*10 pont*)

7. Gábor egy különleges kis dartstáblát készít kisfiának: egy téglalapban egyenlő szárú háromszög és annak beírt köre látható az *ábra* szerint. A téglalap és a háromszög közös oldala 6 deciméter, a háromszögbe írt kör sugara 15 centiméter.

a) Mekkora a háromszög területének és kerületének pontos értéke? (*10 pont*)



Feltételezzük, hogy a játékkal játszó kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a körbe talál a lövés? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a háromszög körön kívüli pontját találja el a lövés? (*3 pont*)

8. Adott az $n^4 + 64 \cdot m^4$ kifejezés, ahol n és m pozitív egész számok.

a) Igazoljuk, hogy ha $n = m = 2$, a kifejezés osztható 13-mal. (*2 pont*)

b) Adjunk meg olyan n és m értéket, amelyek relatív prímek és amelyekre a kifejezés értéke osztható 5-tel. (*3 pont*)

c) Igazoljuk, hogy bármely n és m pozitív egész esetén a kifejezés értéke nem prímszám. (*11 pont*)

9. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ függvény.

a) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedben levő síkidom területét. (*6 pont*)

b) Egy egyenes áthalad az előbbi f függvény $P(2;3)$ koordinátájú pontján. Mi lehet ennek az egyenesnek az egyenlete, ha tudjuk, hogy az első negyedben létrejött síkidomot úgy vágja két részre, hogy az egyik rész területe kétszer akkora, mint a másik rész területe? (*10 pont*)

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Megoldásvázlatok a 2022/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Az a_n számtani sorozat különbsége* 4, *az első hét tagjának összege* 105. *Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*3 pont*)

b) *A b_n mértani sorozat hányadosa* 4, *az első hét tagjának összege* 16 383. *Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*3 pont*)