évezreddel ezelőtti nyelvek matematikai szerkezetéről. Grafikusok, játékkészítők is tartottak bemutatókat.

Ha gyerekek jöttek, kicsik vagy nagyok, mindig nagyon élvezték a múzeumban eltöltött időt, természetesen leginkább a játékokat, összerakós feladványokat, ördöglakatokat. A múzeum vendégkönyve megőrizte például ezeket a sorokat: „Köszönöm a mai estét. Jó lenne, ha minél többen láthatnák, mennyire szerethető a matematika!” vagy „The museum is absolutely fascinating.” Mosolyt fakasztó például ez: „Itt járt Háromszéki Ilcsike, és csodálta a csodálni valót ... ”

Hosszú betegség győzte le Holló-Szabó Ferencet, de csak a testét. Rövid élete volt, de mindig azt tette, amit szeretett, és ami másoknak is tudást, élményt adott. Végakarata szerint kedves múzeuma közelében temették el. Egyik mondását gyakran idézik: „A matematikát úgy kellene felfogni, mint egy természettudományt. Odamenni, megtapasztalni, kézbe venni, játszani vele.”

Hujter Mihály
Budapest

Projektív geometria és társai – avagy hogyan birkózzunk meg egy feladattal 1.

Bevezetés

Versenyfeladatok megoldásakor előfordul, hogy olyan tételek használatával lehet célbaérni, amelyek a hagyományos középiskolai oktatás tananyagában nem szerepelnek. A cikksorozat ilyen tételeket mutat be. Épp ezért nem célunk a pontos és részletes bizonyítás, de igyekszünk forrásokat adni azok számára, akik mélyebben elmerülnének a témában. Több olyan módszer is van, amivel a KöMaL feladatok megoldásában is lehet találkozni. Ilyen rögtön az inverzió.

1. Az inverzió

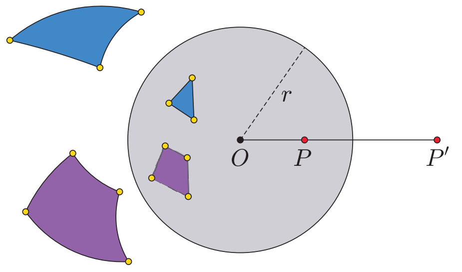
1.1. Ismerkedés az inverzióval

Az inverzió nem más, mint egy körre való „tükrözés”. Érdemes itt inkább a körvonalra gondolni, mint a körlemezre, de ahogy azt később látni fogjuk, a kör középpontja és sugara lesz a meghatározó.

A transzformációt a következő módon definiáljuk:

1.1. definíció (Inverzió). Adott egy O középpontú és r sugarú ω kör (ez az alapkör). Ekkor az ω körre való Ψ inverzió minden $P \neq O$ pontot egy olyan $P' \in OP$ pontba visz, melyre teljesül, hogy

$$OP \cdot OP' = r^2.$$



1. ábra. Az ábrán egy pont és két sokszög inverz képe van. Látható, hogy az inverz geometria nem kezeli jól a háromszögeket, négyszögeket, ezért érdemesebb csak a pontok, egyenesek és körök képeivel foglalkozni

Itt a szakaszokat úgymond irányított szakaszokként kezeljük, azaz P' rajta van az OP **félegyenesen.**

Az inverzió lényegében a kör belsejét viszi ki a körön kívüli síkrészre és fordítva. Sokszor érdemes úgy tekinteni rá, mint egy szimpla tükrözésre. Habár nem hasonlósági transzformáció, az elmondható, hogy ha az X és Y alakzatok tükörképek voltak Z-re nézve (ahol Z kör vagy egyenes), akkor ez X, Y és Z ugyanazon körre való invertálása után is így marad.

Az O pontot nem világos, hogy hova lehetne küldeni. Felmerül az ötlet, hogy önmagába, de ehelyett inkább bevezetünk egy *képzeletbeli* P_∞ pontot. Úgy definiáljuk ezt a pontot, hogy rajta legyen minden egyenesen. Persze ez a valós síknak nem pontja, úgy érdemes tekinteni rá mint valami „végtelenben lévő” pontra. Erre tehát $\Psi : O \mapsto P_\infty$ és persze $P_\infty \mapsto O$.

1.1. lemma. *Az O középpontú r sugarú körre való inverzió főbb tulajdonságai:*

- *involutív, azaz ha A képe B, akkor B képe A;*
- *pontosan az alapkör pontjai maradnak fixen;*
- *egy O-n átmenő egyenes képe önmaga (invariáns), míg egy O-n át nem menő egyenes képe egy O-n átmenő kör;*
- *egy O-n átmenő kör képe egy O-n át nem menő egyenes, míg egy O-n át nem menő kör képe szintén egy O-n át nem menő kör;*
- *szögtartó, azaz körök és egyenesek bezárt szögeit megtartja (viszont vigyázni kell, mert irányított szögekkel számolva az inverzió gyakran ellentettjére változtatja a szöget).*

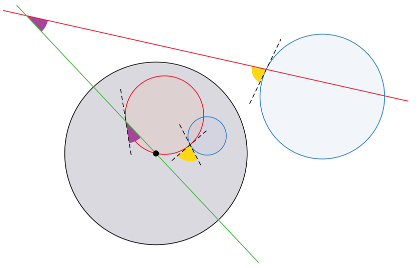
Két metsző kör vagy egy kör és egy őt metsző egyenes bezárt szögét a közös pontban húzott érintők vagy az érintő és az egyenes által bezárt szögeként definiáljuk.

Fontos továbbá megjegyezni, hogy érintő körök vagy egyenesek inverzió után is érintők maradnak, hiszen a bezárt szögük 0°. Illetve ha két érintő kör vagy egyenes érintési pontja körül rajzolunk egy kört és arra invertálunk, akkor két párhuzamos egyenest kapunk. Ugyanis az érintés lényegében azt jelenti, hogy pontosan egy közös pontjuk van, és két párhuzamos egyenesre ez teljesül (P_∞ az egyetlen közös pont.)

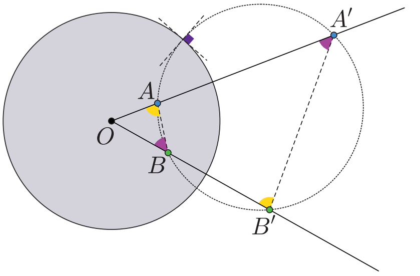
1.2. lemma. *Egy O középpontú r sugarú körre való invertálás során legyen A képe A' és B képe B' (feltesszük, hogy az O, A, B pontok nincsenek egy egyenesen). Ekkor*

$$OAB\triangle \sim OB'A'\triangle.$$

Illetve ebből könnyen következik, hogy



2. ábra. Inverz alakzatpárok és bezárt szögeik



3. ábra. Az 1.2-es lemma

- *$OAB\sphericalangle = OB'A'\sphericalangle$;*
- *az A, B, A', B' pontok egy körön vannak, és ez a kör merőleges az alapkörre (azaz arra a körre, amelyre elvégezzük az inverziót);*
- *$|A'B'| = \frac{|AB|\cdot r^2}{OA\cdot OB}$.*

Érdemes megjegyezni, hogy ha például B az alapkörön van, tehát $B = B'$, akkor az $ABB'A'$ kör (amely így az ABA' kör) érinti az OB egyenest.

1. példafeladat (Ptolemaiosz-egyenlőtlenség). Ha $ABCD$ egy négyszög, akkor

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a négyszög húrnégyszög. (Tehát egy négyszögben a szemközti oldalak szorzata legalább akkora, mint az átlók szorzata.)

Megoldás. Invertáljunk egy D középpontú r sugarú körre. Jelölje A', B', C' rendre az A, B, C pontok képét az inverzió során. Az $A'B'C'$ háromszögre felírva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$A'B' + B'C' \geqslant A'C',$$

ami az **1.2. lemma** miatt

$$AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB} + BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC} \geqslant AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}.$$

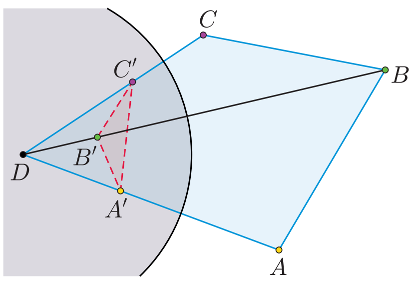
Szorozva $\frac{DA\cdot DB\cdot DC}{r^2}$-nal:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

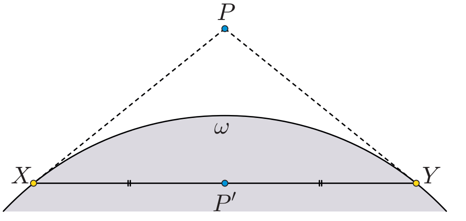
Egyenlőség akkor teljesül, ha a háromszög-egyenlőtlenségben is fennáll az egyenlőség, ami akkor történik, ha az A', B', C' pontok egy egyenesen vannak (és B' az A', C' pontok között van). Ez persze azt jelenti, hogy az A, B, C, D pontok egy körön vannak (továbbá, hogy B és D átellenes csúcsok).

Ahogy most is láttuk, nem mindig fontos az alapkör sugara, sokszor elég a középpontját meghatározni, ezért bevett szófordulat, hogy „invertáljunk O középpontra”.

1.3. lemma. *Egy alapkörtől különböző kör (vagy egyenes) képe akkor és csak akkor lesz önmaga, ha merőleges az alapkörre.*



4. ábra. Ábra a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséghez



5. ábra. Ábra az 1.4-es lemmához

Legyen ω_1, ω_2 két kör, melyeknek középpontjait jelölje O_1 és O_2, illetve melyek egymást az A, B pontokban metszik. Érdemes geometriai feltételt adni ω_1 és ω_2 merőlegességére:

- az O_1A, O_1B egyenesek közül bármelyik érinti ω_2-t (és persze fordítva);
- az O_1AO_2B négyszög (deltoid) A és B csúcsánál derékszög van.

Ha egy P pont két kör hatványvonalán van, vagy éppen három kör hatványpontja, akkor amennyiben P a körökön kívül helyezkedik el, létezik egy P középpontú kör, amely merőleges a körökre (húzzunk érintőket P-ből és azoknak az érintési pontjai egy körön lesznek). Általában célszerű erre a körre invertálni.

1.4. lemma. *Legyen P egy ω körön kívüli pont, és húzzunk P-ből érintőket ω-hoz. Ha az érintési pontok X és Y, akkor P inverze ω-ra az XY szakasz felezőpontja.*

Majd később, a pólus-poláris témakörnél fogjuk látni ennek a lemmának az igazi hasznát.

Mikor érdemes inverzióval próbálkoznunk?

- ha sok a kör és kevés az egyenes;
- ha van egy kiemelt jelentőségű pont, amelyen sok kör/egyenes átmegy;
- ha közös végpont nélküli szakaszok szorzata, vagy közös szögszár nélküli szögek összege vagy különbsége szerepel a feladatban, erre egy jó példa az IMO1993/2[1];
- ha érintő körök vannak – ezt az inverzió remekül kezeli.

[1] `http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199318`

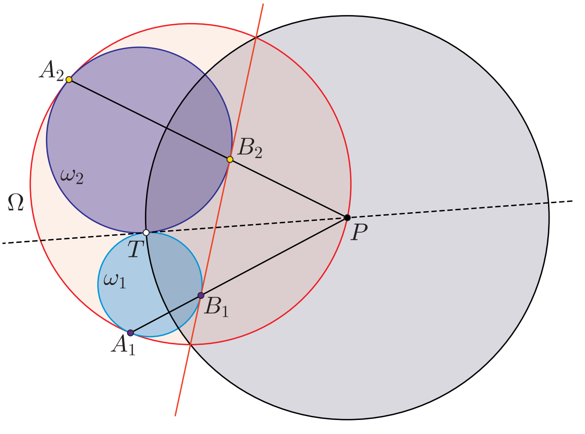
Mikor nem érdemes inverziót használnunk?

- ha sok az egyenes és kevés a kör (kivétel, ha az egyenesek átmennek egy közös ponton, hiszen ekkor a közös metszéspont körül invertálva az egyenesek helyben maradnak);
- ha olyan szögekkel kell számolnunk, melyek nem írhatóak fel az inverzió középpontja segítségével;
- ha területek vagy mérőszámok szerepelnek (a szimpla inverziós távolságképletünkön kívül nincs sok használható képlet).

2. példafeladat. Az ω_1, ω_2 körök kívülről érintik egymást a T pontban, míg az Ω kör mindkét kört érinti, rendre az A_1, A_2 pontokban úgy, hogy Ω tartalmazza a másik két kört. A $P \in \Omega$ pontra teljesül, hogy PT érinti az ω_1, ω_2 köröket. Igazoljuk, hogy ha $PA_1 \cap \omega_1 = B_1 \neq A_1$ és $PA_2 \cap \omega_2 = B_2 \neq A_2$, akkor a B_1B_2 egyenes érinti az ω_1, ω_2 köröket.

Megoldás: A P ponton egy kör és két egyenes is átmegy, így eszünkbe juthat invertálni egy P középpontú körre, speciálisan a P középpontú, PT sugarú körre. Mivel ez a kör merőleges az ω_1, ω_2 körökre, ezért azok az inverzióra nézve invariánsak. Viszont A_1, A_2 nincs rajta az alapkörön, ezért egyik sem önmagába megy át. Mivel A_1 képe rajta lesz a PA_1 egyenesen és ω_1-en is, ezért $A_1 \leftrightarrow B_1$. Hasonlóan $A_2 \leftrightarrow B_2$.

Mivel Ω átmegy az alapkör P középpontján, egyenes lesz a képe, amely átmegy az A_1 és az A_2 pont képén is, ami a B_1B_2 egyenes. Így, mivel Ω érintette az ω_1, ω_2 köröket, Ω képe, azaz a B_1B_2 egyenes is érinteni fogja a két kört (hiszen mindkettő képe önmaga).



6. ábra. Ábra a 2. példafeladathoz

Források: Általában a KöMaL archívumát érdemes megnézni, lehet benne címre / szövegre / kategóriára keresni.

1. Surányi László – Tusnády Gábor: Az inverzióról, 1968. nov., 97–101. o., `http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=196810`.

2. Hajós György: Bevezetés a geometriába,
https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/handle/123456789/13101.
3. Hutai Dániel Gábor: Az inverzió és alkalmazásai (szakdolgozat),
https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2016/hutai_daniel_gabor.pdf.

Gyakorlófeladatok[2]

F/1. Adott négy kör, k_1, k_2, k_3, k_4 úgy, hogy k_i érinti k_{i+1}-et minden $i = 1, 2, 3, 4$-re ($k_5 = k_1$). Igazoljuk, hogy a négy érintési pont vagy egy körön vagy egy egyenesen van.

F/2. Legyen Ω egy PQ átmérőjű félkör. Az ω kör Ω-t és a PQ szakaszt is érinti, az utóbbi szakaszt C-ben. Az $A \in \Omega$, $B \in PQ$ pontokra teljesül, hogy C a PB szakasz belső pontja, és az AB egyenes érinti az ω kört és merőleges a PQ egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy AC felezi a $PAB\sphericalangle$-et.

F/3. (IMO 1996.) Legyen P az ABC háromszög olyan belső pontja, amelyre

$$APB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = APC\sphericalangle - ABC\sphericalangle$$

teljesül. Legyen D, illetve E az APB, illetve APC háromszögek beírt körének középpontja. Mutassuk meg, hogy az AP, BD és CE egyenesek egy ponton mennek át.

F/4. (P. 196., KöMaL 1973. dec., megoldás:
http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=23855.)
Adott a síkon véges számú pont úgy, hogy

a) semelyik három sincs egy egyenesen;

b) bármelyik három által meghatározott körön van közülük legalább egy további.

Igaz-e, hogy a megadott pontok mind egy körön vannak?

F/5. (B. 3796., KöMaL 2005. febr., megoldás:
http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=46489.)
A k körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok E és F, az EF szakasz felezőpontja G. Egy A-n átmenő egyenes a B, C pontokban metszi a k kört. Bizonyítsuk be, hogy az EF egyenes felezi a BGC szöget.

F/6. (B. 4175., KöMaL 2009. ápr., megoldás:
http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=53512.)
Legyenek A, B, C, D általános helyzetű pontok a síkon. Igazoljuk, hogy ha az ABC és az ABD körök merőlegesen metszik egymást, akkor ugyanez igaz az ACD és a BCD körökre is.

[2] Az első három feladat megoldásának vázlatos gondolatmenete ugyanebben a számban a 22. oldaltól olvasható. A KöMaL archívumban még vannak inverzió témakörben feladatok.

F/7. (B. 4765., KöMaL 2016. jan., megoldás:
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4765&l=hu`.)
Az $ABCD$ húrnégyszögben az $ADB\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögek felezői az AB oldalt rendre az E és F pontokban, a $CBD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ szögek felezői pedig a CD oldalt rendre a G és H pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az E, F, G, H pontok egy körön vannak.

Bán-Szabó Áron
Budapest

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő feladatokat:

a) $|\sin x| > \cos x - 1$; (*5 pont*)

b) $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$. (*7 pont*)

2. Egy fagráf éleit újabb 435 él behúzásával kiegészítettük, így egy egyszerű, összefüggő teljes gráfot kaptunk. Hány pontú ez a gráf? (*4 pont*)

b) Igazoljuk a következő állítást: bármely n pontú fagráf annyi újabb él behúzásával tehető egyszerű, összefüggő teljes gráffá, amennyi az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma. (*4 pont*)

Leonardo Pisano (kb. 1170 – kb. 1250?) olasz matematikus Fibonacci néven lett ismert. Több érdekes könyve, feladata maradt fenn. Róla nevezték el a következő sorozatot: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$. A sorozat tetszőleges tagja úgy kapható meg, hogy az előző két tagot összeadjuk. Az első és második tag is 1.

c) Egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagjának összege 700. Ha az első számhoz 44-et, a második számhoz 33-at adunk, a harmadik számból pedig 23-at kivonunk, a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Melyek ezek a számok? (*6 pont*)

3. A Derelye pékségben jártunk.

a) A pékség polcán 30 darab mákos kifli van. Vannak közte olyan darabok, amelyek nem felelnek meg a szigorú minőségi követelményeknek. Ha két kiflit – visszatevés nélkül – kiveszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mind a kettő hibátlan $\frac{38}{9}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy mindkét kivett darab hibás. Hány nem megfelelő mákos kifli van a polcon? (*7 pont*)

A túrós batyukat is szigorú ellenőrzés alá vonjuk a pékségben. Lemérve a polcon található darabokat, a következő értékeket kapjuk grammban: 132, 132, 133, 132, 130, 129, 129, 131, 130, 130, 132, 130, 130, 128, 127, 129, 132, 131, 133, 131, 129, 127, 128, 127, 129.