tartják. Az ELTE nagyon sok szakot indít a fizikával párban, így szinte bármilyen tantárgyat lehet másiknak választani.

- **A tanári pálya szépségei**

Napjainkban igen sok szó esik a tanári pálya nehézségeiről. Miért lehet mégis érdemes a fizikatanári hivatást választani? Mert nagyon sok szépsége is van! Kreatív, változatos, fiatalok között végzett munka. Egy fizikatanárnak hatalmas lehetőségei vannak arra, hogy megmutassa a gyerekeknek a fizikai világ működésének szépségeit.

- **Hallgatói élet**

A Klebelsberg Képzési Ösztöndíj Program keretében egyetemistaként félévente akár 375 000 Ft-ot lehet kapni, mely több különféle ösztöndíjjal is kiegészíthető. Fontos megemlíteni, hogy lehetőség van oktatással kapcsolatos kutatásokba való becsatlakozásra és doktori tanulmányok folytatására a Fizika Tanítása Doktori Program keretében.

A képzések részleteiről az intézet honlapján (`https://physics.elte.hu`) lehet további információkat szerezni, vagy érdemes ellátogatni az ELTE TTK youtube csatornájára (`https://www.youtube.com/ELTETTKbudapest`).

Térből síkba visszalépés fizikai problémák megoldásánál I. rész (tükröráramok)

Megjegyzések és általánosítások a P. 5399. feladat megoldásához[1]

Bevezetés

A közelmúltban egy kilencrészes matematika cikksorozat jelent meg a KöMaL-ban[2], amely olyan bizonyításokat mutatott be, amikor a síkbeli geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Az itt következőkben a fordított utat járjuk be: megmutatjuk, hogy bizonyos térbeli fizikai (áramvezetési) problémák könnyebben kezelhetők, ha valamilyen módon sikerül átfogalmazni azokat síkbeli feladattá. Olyan feladatokkal fogunk foglalkozni, amelyekben vékony fémlemezben folyó áramok szerepelnek, de a fémlemez nem síkban, hanem térben helyezkedik el. Csak olyan eseteket vizsgálunk, amelyekben a térbeli lemez síkba „kiteríthető”. (Ilyen alakzat például egy kúp vagy egy henger palástja.)

A cikk I. részében olyan síkbeli elektromos árameloszlásokat vizsgálunk, amelyek – néhány „tükör” elhelyezésével – könnyen megoldható feladattá válnak. A cikk

[1] A feladatot és annak megoldását lásd Lapunk 565. oldalán.

[2] Kós Géza: Térbe kilépő bizonyítások I–VII. és egy ráadás, *KöMaL* 2019. évi 10. szám – 2020. évi 5. szám

II. részében megismerkedünk egy olyan módszerrel (az ún. konform leképezésekkel), amely akkor is alkalmazható, amikor a tükrözések módszere nem működik.

Néhány fizikai fogalom, jól használható módszerek és hasznos matematikai összefüggések

Áramsűrűség-vektor. Térben kiterjedt elektromos áramot a felületegységenként átfolyó árammal, az áramsűrűséggel jellemezhetjük: $j = I/A$ (A egy kicsiny, a töltések áramlására merőleges felületdarab területe). Az áramsűrűséget vektornak tekintjük, iránya a (pozitív) töltéshordozók mozgási iránya. (Az áramerősség skaláris mennyiség, ami felírható az áramsűrűség-vektor és a felületvektor skaláris szorzataként: $I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$.)

Az Ohm-törvény differenciális alakja. Egy homogén közegben az – általában helyről helyre változó – áramsűrűség arányos az ottani elektromos térerősséggel: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, ahol σ az anyag vezetőképessége, a fajlagos ellenállás (ϱ) reciproka.

Síkbeli áramlások. Ha egy vékony fémlemezbe valahol áramot vezetünk, akkor az áramsűrűség-vektor (az áram bevezetési helyének szűk környezetét leszámítva) a lemez síkjával párhuzamos, és a lemez egy-egy pontjánál a lemezre merőlegesen haladva állandó. Ha a lemeznek valahol (egyenes vagy görbe) határvonala van, azon a vonalon nem folyhat át áram, tehát az áramsűrűség-vektor a határvonalnál érintőirányú. (Ezt a követelményt *határfeltételnek* nevezik.)

Árameloszlások szuperponálhatósága. Ha egy lemezben valamilyen $\Phi_1(\boldsymbol{r})$ elektromos potenciál hatására $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})$ árameloszlás alakul ki, egy másik, $\Phi_2(\boldsymbol{r})$ potenciál hatására $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ az árameloszlás, akkor

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_1(\boldsymbol{r}) + \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

potenciáltérben az árameloszlás

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$$

alakú lesz. A szuperponálhatóság azért valósulhat meg, mert az Ohm-törvény lineáris, az áramsűrűség egyenesen arányos az elektromos térerősséggel.

Tükrözések módszere. Egy véges síkbeli tartomány határfeltételeit bizonyos esetekben úgy biztosíthatjuk, hogy egy (vagy több), a tartományon kívül folyó, elképzelt (fiktív) árameloszlás és a valódi lemezben folyó árameloszlás szuperpozícióját képezzük. Ha például egy „végtelen” félsík alakú lemezbe valahol I erősségű áramot vezetünk, akkor a kialakuló árameloszlás olyan, mintha az áram bevezetési pontjának a félsík határoló egyenesére vett tükörképénél is I áramot vezetnénk be a teljes (végtelen) síklemezbe.

Végtelen síklemezbe vezetett, adott erősségű áram szétoszlása a lemezen. Ha egy nagyon nagy méretű („végtelen”), δ vastagságú lemez O pontjánál I erősségű áramot vezetünk be, akkor a kialakuló áramsűrűség az O ponttól r távolságban

$$|\boldsymbol{j}(r)| = \frac{I}{2\pi r\delta}, \tag{1}$$

és az áramsűrűség iránya mindenhol az O pontból az adott pontba húzott egyenessel párhuzamos, tehát „sugárirányú”. (Ez az elrendezés szimmetriájából következik, és abból, hogy $A = 2\pi r\delta$ nagyságú hengerfelületen összesen I erősségű áram folyik át.)

Bizonyos függvények kicsiny változása. Ha pl. az $y = f(x) \equiv K\,x^{\lambda}$ függvény argumentumát x-ről $x + \Delta x$-re növeljük ($\Delta x \ll x$), akkor a függvény értékének megváltozása

$$\Delta y = K(x+\Delta x)^{\lambda} - Kx^{\lambda} = Kx^{\lambda}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\lambda} - 1\right] \approx K\lambda x^{\lambda-1}\cdot \Delta x.$$

(Az utolsó lépésben felhasználtuk a Newton-féle $(1+\varepsilon)^{\lambda} \approx 1 + \lambda\varepsilon$ összefüggést, ami $\varepsilon \ll 1$ esetén tetszőleges λ kitevőre érvényes. Zsebszámológépen kipróbálhatjuk, hogy pl. $1{,}002^{1{,}5} = 1{,}003\,001\,5 \approx 1{,}003 = 1 + 0{,}002\cdot 1{,}5$.)

A kapott közelítő összefüggést így is felírhatjuk:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \lambda\frac{\Delta x}{x}, \qquad \text{ha} \qquad y = K\,x^{\lambda}. \tag{2}$$

Hasonló megfontolással kaphatjuk meg, hogy az exponenciális függvény növekedése:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \lambda\cdot \Delta x, \qquad \text{ha} \qquad y = K\,\mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{3}$$

Ezt az összefüggést is érdemes „kipróbálni” egy zsebszámológépen, valamekkora konkrét K, λ, x és Δx esetén.

Megjegyzés. A (3) képlet a radioaktív bomlások exponenciális bomlástörvényéből is ismerős lehet a fizika feladatok megoldóinak a következő jelölésekkel:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda\cdot N(t), \qquad \text{ha} \qquad N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

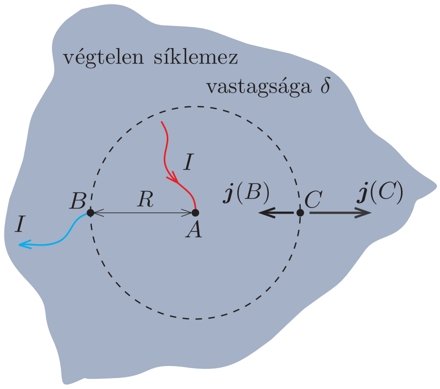
A kúpba vezetett áram eloszlása

A **P. 5399.** feladat megoldásának végeredményét nézve feltűnhet, hogy a C pontban az áramsűrűség ugyanakkora, mintha egy „végtelen” síklemezbe annak A pontjánál I erősségű áramot vezetnénk be, az A ponttól R távolságra lévő B pontból pedig elvezetnénk azt, és a C pont a B pont A-ra vett tükörképe (*1. ábra*).

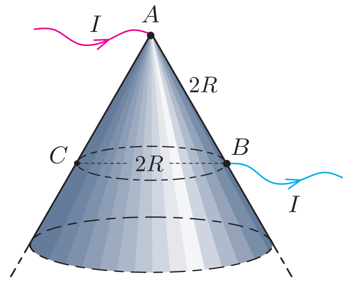
Valóban, ebben az esetben (a megoldás jelöléseit követve):

$$j(C) = j_A(C) - j_B(C) = \frac{I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{R} - \frac{I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{2R} = \frac{I}{4\pi\delta R}.$$

Vajon hogyan módosul az eredmény, ha az eredeti feladat AB távolságát $3R$-ről $2R$-re változtatjuk (*2. ábra*)? A kúppalástot most is felvághatjuk az AC egyenes mentén, majd kiterítve egy félsíkot kapunk. Most is az A pontban bevezetett és a B pontnál elvezetett, I erősségű áram hatását vizsgáljuk a C pont(ok)ban olyan

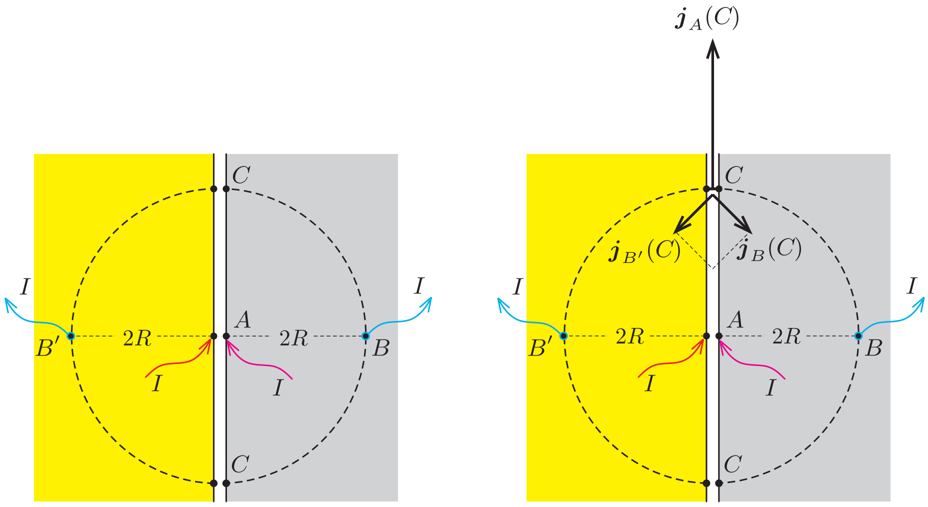


1. ábra



2. ábra

feltétel mellett, hogy az AC egyenesen keresztül ne folyjon áram. Ezt a feltételt úgy teljesíthetjük, hogy az elrendezést tükrözzük az AC egyenesre (így kapjuk a sárga félsíkot), majd az eredő árameloszlást számítjuk ki a C pontban (*3. ábra bal oldali* része).



3. ábra

Az A pontba összesen $2I$ erősségű áram (a valódi és a tükrözött áramok összege) folyik be, így a $2R$ távol lévő C pontban az áramsűrűség:

$$j_A(C) = \frac{2I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{2R} = \frac{I}{2\pi\delta R}.$$

A B és a B' pont egyaránt $\sqrt{2}\cdot 2R$ távol van C-től, tehát a C pontban a megfelelő áramsűrűségek nagysága (lásd a *3. ábra jobb oldali* részét):

$$j_B(C) = j_{B'}(C) = \frac{I}{2\pi\delta R}\,\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2R},$$

az eredőjük pedig az A pont felé mutat, és

$$\left|\boldsymbol{j}_B(C)+\boldsymbol{j}_{B'}(C)\right| = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\boldsymbol{j}_B(C)\right| = \frac{I}{4\pi\delta R}.$$

A teljes áramsűrűség a C pontban:

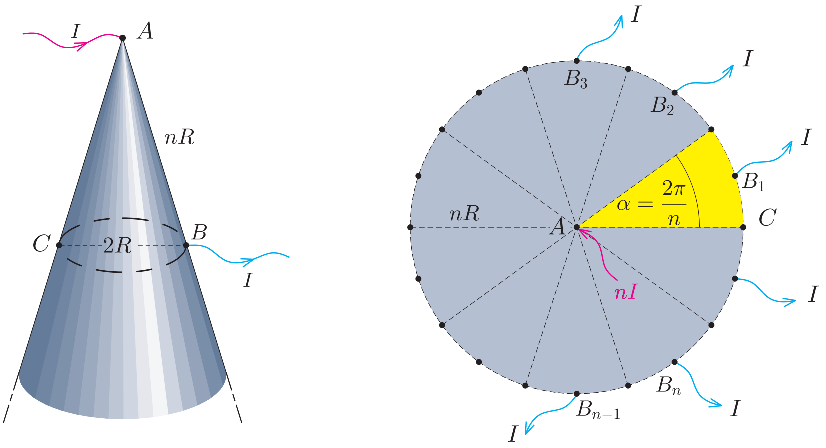
$$j_C = \frac{I}{2\pi\delta R}-\frac{I}{4\pi\delta R}=\frac{I}{4\pi\delta R}$$

nagyságú, iránya pedig A-tól C felé mutat. Ez megegyezik a korábban vizsgált két eset végeredményével.

A feladat általánosítása tükrözéssel megoldható esetekre

Kiváncsiak lehetünk arra, hogy milyen eredményt kapunk a legáltalánosabb, tükrözésekkel megoldható esetben. Legyen az AB távolság nR, ahol n tetszőleges pozitív egész szám.

Sejtésünk: Tetszőleges egész n-re ugyanazt az eredményt fogjuk kapni, mint az $n=1,2,3$ esetekben.

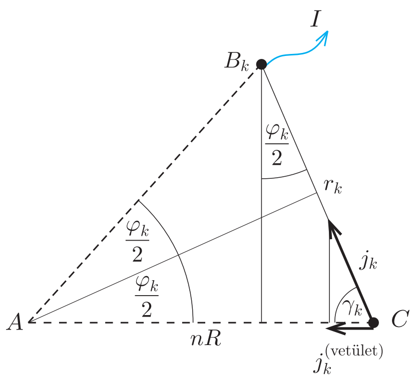


4. ábra

A fémlemezt most is felvághatjuk az AC egyenes mentén (*4. ábra*), majd síkba kiterítve egy $\alpha=2\pi/n$ nyílásszögű szögtartományt kapunk. (A jobb oldali ábrán a kiterített kúppalástnak csak azt a részét (a sárga színnel jelölt körcikket) tüntettük fel, amelynek pontjai a kúp csúcsától legfeljebb nR távolságra vannak. A fémlemez természetesen a körcikknek a köríven kívüli részén is folytatódik, hiszen a kúp „nagy méretű” volt, ezt azonban az ábrán nem ábrázoltuk.) A szögtartományt az egyenes oldalai mentén többször tükrözhetjük, így végül a teljes síkot megkapjuk. Az eredeti és a tükrözött terület árameloszlása: az A pontba összesen nI áramot vezetünk be, a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontok mindegyikénél pedig I erősségű áramot vezetünk el. Ezzel elérjük, hogy a sárga szögtartomány egyenes oldalain keresztül nem folyik át áram, azok áramvonalak. Kérdés most az, hogy mekkora az áramsűrűség a C pontban?

Az elrendezés szimmetriája miatt a C pontbeli eredő áramsűrűség AC irányú, elegendő tehát az egyes áramok járulékának AC irányú komponensét kiszámítanunk, majd ezeket összegeznünk kell. A végtelen síkba vezetett áram (1) formulája szerint az A pontból induló áram járuléka:

$$j_A(C) = \frac{nI}{2\pi\delta}\,\frac{1}{nR} = \frac{I}{2\pi\delta R}.$$



5. ábra

Jelöljük a B_kAC szöget φ_k-val (*5. ábra*). Könnyen kiszámíthatjuk, hogy

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha,\ \varphi_2 = \frac{3}{2}\alpha,\ \ldots,\ \varphi_k = \frac{2k-1}{2}\,\alpha,$$

de – mint látni fogjuk – ezen szögek konkrét értékére nem is lesz szükségünk.

Tekintsük a B_k pontot, és az onnan elvezetett áram járulékát a C pontbeli áramsűrűséghez. Mivel (az ábra jelöléseivel)

$$B_kC = r_k = 2nR\sin\frac{\varphi_k}{2}, \qquad j_k = \frac{I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{r_k},$$

azért a $\boldsymbol{j}_k$ vektornak az $A \to C$ irányú összetevője:

$$j_k^{(\text{vetület})} = -j_k\,\cos\gamma_k = -\frac{I}{4\pi\delta}\,\frac{1}{nR}.$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\gamma_k = 90^\circ - \frac{\varphi_k}{2}$, és így $\cos\gamma_k = \sin(\varphi_k/2)$.

Azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy az elvezetett áramok mindegyikének járuléka a C-beli áramsűrűséghez *ugyanakkora*, tehát az összegük:

$$\sum_{k=1}^{n} j_k^{(\text{vetület})} = n \cdot j_1^{(\text{vetület})} = -\frac{I}{4\pi\delta R.}$$

Ezt az áramsűrűséget hozzáadva az A-pontban bevezetett áram járulékához, végeredményünk:

$$j(C) = \frac{I}{2\pi\delta R} - \frac{I}{4\pi\delta R} = \frac{I}{4\pi\delta R},$$

összhangban a korábban (az $n = 1, 2, 3$ eseteknél) kapott eredményekkel.

Ha a geometriai viszonyok olyanok, hogy a felvágott és kiterített kúppalásttal és annak tükrözöttjeivel nem tudjuk hézag- és átfedésmentesen lefedni a teljes síkot, akkor a tükrözések módszere nyilván csődöt mond. A cikk II. részében megmutatjuk, hogy egy alapvetően másfajta eljárás, a konform leképezések módszere még ebben az esetben is eredményre vezet.

Gnädig Péter