Megjegyzés. Sokan próbálkoztak valamilyen közepek közötti összefüggést használni a megoldásban, például kihozták, hogy az első esetben

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{\dfrac{1+\dfrac{EF}{AB}}{2}},$$

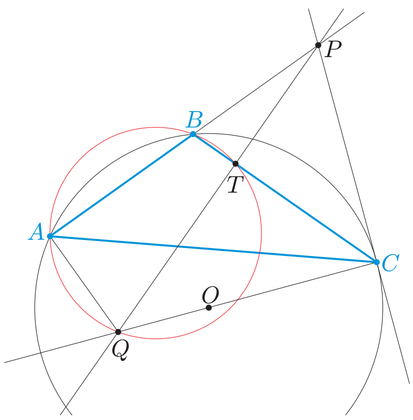
vagyis $\frac{AB}{CD}$ értéke éppen 1-nek, és $\frac{AB}{EF}$-nek a harmonikus közepe. A második esetben pedig $\frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{AB}{EF}}$, ami pedig 1-nek és $\frac{AB}{EF}$-nek a mértani közepe. Mivel a mértani közép legalább akkora, mint a harmonikus közép, ezért a b) esetben nagyobb a kérdéses arány. Miért nem jó gondolatmenet ez és a hozzá hasonlóak, ahol a két esetben egy-egy középértéket vesznek, majd a kettőt összehasonlítják? Azért, mert valójában nem ugyanannak a két számnak veszik a különböző középértékeit. Meg lehet gondolni, például a fenti megoldás alapján, hogy a, b és x közül bármelyik kettő egyértelműen meghatározza a harmadik értékét (vagy nem jöhet létre a trapéz). Vagyis pl. rögzített a érték esetén egy bizonyos x értékre lesz b éppen a számtani, illetve mértani közepe a-nak és x-nek.

58 dolgozat érkezett. 5 pontos 20, 4 pontos 5, 1 pontos 2, 0 pontos 28 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5241. *Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle > 90^\circ$, a körülírt kör középpontja O. A körülírt körhöz C-ben húzott érintő az AB egyenest a P pontban, a P-ből BC-re állított merőleges pedig az OC egyenest Q-ban metszi. Igazoljuk, hogy AB merőleges AQ-ra.*

(*4 pont*) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)



Megoldás. Legyen a P-ből BC-re állított merőleges talppontja T. Ekkor $BTQ\sphericalangle$ derékszög, azaz T rajta van a BQ átmérőjű Thalész-körön. A feladat állítása, mely szerint $BAQ\sphericalangle$ derékszög, azzal ekvivalens a Thalész-tétel alapján, hogy A is rajta van a BQ átmérőjű körön, vagyis az előbbiek alapján a BTQ körön. A feladat állítása tehát ekvivalens azzal, hogy A rajta van a BTQ körön, azaz $BTQA$ húrnégyszög, ezt fogjuk a továbbiakban megmutatni.

Megjegyezzük, hogy PC merőleges $OC \equiv QC$-re, hiszen egy adott pontba húzott érintő merőleges az adott pontba mutató sugárra, azaz a PQC háromszög derékszögű. Ebben a háromszögben $BC \equiv CT \perp PQ$ miatt CT az átfogóhoz tartozó magasság, így felírva a befogótételt: $PT \cdot PQ = PC^2$. Most felhasználva, hogy a P pont ABC körre vonatkozó hatványa állandó (vagy a szelő- és érintőszakaszok tétele alapján): $PC^2 = PB \cdot PA$. Az előbbi kettőt összevetve

$$PT \cdot PQ = PB \cdot PA,$$

ami a szelők tételének megfordítása miatt éppen azt jelenti, hogy T, Q, B, A konciklikus, AQ valóban merőleges AB-re.

Diszkusszió. A bizonyítás során sehol sem használtunk szögszámításokat, csupán derékszögek szerepeltek a megoldásban, és ilyenkor nyilván nem számít (irányítatlan szögekkel sem), hogy az adott egyenes melyik félegyenesén van a szög harmadik csúcsa, mindenképpen derékszöget kapunk. A körre felírt hatványok is igazak előjeles szakaszok nélkül is, ugyanis P-ből húzható érintő a körhöz, és így külső pont, azaz a hatvány során felírt távolságok mindig azonos irányúak, és így nincs szükség előjeles szakaszokra. Az egyetlen eset, amikor a bizonyításunk nem mondható el az euklideszi síkon (bár a projektív síkon, némi kiegészítéssel elmondható lenne) az, amikor valamelyik metszéspont nem jön létre, azaz a két megrajzolt egyenes párhuzamos.

Ez a két egyenes nem lehet OC és a P-ből BC-re állított merőleges, ugyanis ez esetben OC merőleges lenne BC-re, de ekkor BC érintené a körülírt kört, ami lehetetlen, hiszen akkor BC-nek csak egy közös pontja lehetne a körülírt körrel, azaz BC ponttá fajulna. Marad tehát az az eset, hogy AB és a C-ben húzott érintő párhuzamosak. Egy húrral párhuzamosan két érintő húzható, a húr mindkét érintési ponttal egyenlő szárú háromszöget alkot. Tehát ekkor az ABC háromszög egyenlő szárú, melynek alapja AB, és így $ABC\sphericalangle < 90°$, ami ellentmond a feladat feltételeinek.

Így a bizonyítás minden tompaszögű háromszögre elmondható az euklideszi síkon, a megoldást ezzel befejeztük.

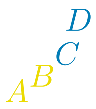
Varga Boldizsár (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.) megoldása

Összesen 56 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 51, 3 pontot 2 tanuló. 0 pontos 3 versenyző dolgozata.

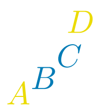
B. 5246. 14 *ember ül egy asztal körül, mindenki kék vagy sárga pólóban. Legfeljebb hány emberre teljesülhet, hogy a két szomszédja különböző színű pólóban van?* (*3 pont*)

Megoldás. A különböző színű szomszédokkal rendelkező emberek száma legfeljebb 14. Először azt mutatjuk meg, hogy sem 14, sem pedig 13 nem lehet.

Tegyük fel, hogy a kérdéses szám legalább 13. Ekkor legfeljebb egy olyan ember van, akire nem teljesül a feltétel, tehát a 13 ember valakitől kezdve sorban egymás mellett ül. Vegyük a sor egyik szélső tagját (A). Legyen a pólója sárga színű. Ekkor a mellette ülő, a feltételeket teljesítő ember (B) sárga és kék színű pólót is viselhet. Eszerint két esetet vizsgálunk.



1. ábra



2. ábra

1. eset: B sárga pólót visel. Mivel ő is vegyes színű szomszédokkal rendelkezik, ezért C színe kék, így D színe kék (*1. ábra*), E színe sárga, F színe sárga, és így tovább: ss után mindig kk, azután pedig ss következik.

2. eset: B kék pólót visel. Ekkor C-nek is kéket kell viselnie ahhoz, hogy B-re teljesüljön a feltétel (*2. ábra*). A mellette ülő ember pedig sárga pólót kell, hogy viseljen. Itt is felváltva két kék és kék sárga pólós embernek kell követnie egymást ahhoz, hogy sorra mindegyik emberről elmondható legyen az, hogy mellettük különböző színű pólós emberek ülnek.

A másik szomszédja (N) az első esetben kék, a másodikban pedig sárga pólót kell viseljen.

Ezek alapján $A, B, \ldots, L, M, N$ színe rendre

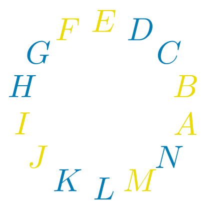
$$sskk \mid sskk \mid sskk \mid sk,$$

vagy pedig

$$s \mid kk \mid sskk \mid sskk \mid sss.$$

Mindkét esetben látható, hogy M szomszédjainak, L-nek és N-nek a pólószíne megegyezik, ami ellentmondás.

Végül egy konkrét elhelyezést mutatunk arra, hogy a kérdéses szám lehet 12:



Geretovszky Márton László (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

81 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 67, 2 pontot 6 tanuló, 1 pontos 5, 0 pontos 2 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein.