8. Egy vállalkozás olyan négyzet alapú egyenes gúlákat rendel reklámajándéktárgyként, amelyeknek az oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be, és az alapéleinek a hossza 12 centiméter. A négy kiemelkedő termékük reklámját szeretnék elhelyezni a gúla egy-egy oldallapján.

a) Határozzuk meg mekkora területű részre kell megtervezni egy termék reklámját. (*3 pont*)

b) Mekkora a gúla térfogata? (*3 pont*)

c) Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal? (*4 pont*)

d) A gúla alakú dobozok belsejében egy-egy (gömb alakú) ajándék labdát is elhelyeznek, amelyek mind a négy oldallapot és az alaplapot is érintik. Mekkora a labda sugara? (*6 pont*)

9. *a*) Egy matematikatanár tanít a 12. A és a 12. B osztályban is. Íratott egy közös dolgozatot, amelyben 120 pont volt az elérhető legmagasabb pontszám. Az A osztályban 84 pont, a B osztályban 74 pont lett az átlag. Az A osztályos fiúk átlagosan 81, a B osztályos fiúk pedig 71 pontot értek el. Az A osztályban a lányok átlagosan 90, míg a B osztályban a lányok átlagosan 76 pontos dolgozatot írtak. Tudjuk továbbá, hogy az összes fiú átlaga 79 pont lett. Mennyi a két osztályban az összes lány átlagpontszáma?

(*8 pont*)

b) Az A osztályban tanuló Andrásnak hat jegye van matematikából, és a hat jegynek a mediánja 4. Mit mondhatunk a B osztályban tanuló Benedek matematikajegyeinek mediánjáról, ha hat jegye pontosan megegyezik András jegyeivel, de neki van még ezen túl egy hetedik jegye, amely 5-ös? (*4 pont*)

c) Három barátnő, Anna, Bea és Cili matematikából, fizikából és kémiából elért félévi eredményeiket vizsgálta.

I. Kiszámolták mindegyiküknek az átlagát, majd ezeknek az átlagoknak vették az átlagát.

II. Kiszámolták a három tantárgy átlagát, majd ezen átlagok átlagát vették.

Mutassuk meg, hogy a kétféle módon kapott átlag egyenlő egymással. (*4 pont*)

Kozma Katalin Abigél, Győr
Számadó László Budapest

Megoldásvázlatok a 2022/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin x = 0$ *egyenletet a valós számok halmazán.* (*5 pont*) *b) Melyek azok a valós számok, amelyek eleget tesznek az* $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$ *és a*

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenségnek egyaránt? *(8 pont)*

Megoldás. *a*) A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítést használva a következő másodfokú egyenlethez jutunk: $-1 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x + 3 = 0$. Ennek egyik gyöke $\sin x = 3$, aminek nincs valós megoldása az $f(x) = \sin x$ függvény értékkészlete miatt. A másodfokú egyenlet másik gyöke $\sin x = -1$, amiből $x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

b) A másodfokú kifejezés zérushelyei -1 és 5. A megfelelő függvény felfele nyíló parabola, amelynek helyettesítési értékei a két zérushely között negatívak, ezért az egyenlőtlenség megoldása $x \in [-1; 5]$.

A trigonometrikus egyenlőtlenség megoldása:

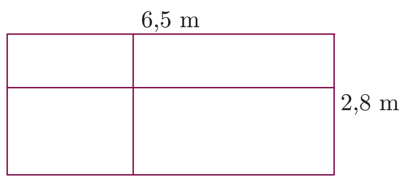
$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi.$$

Ezt rendezve:

$$-\frac{\pi}{6} + k \cdot 4\pi < x < \frac{17\pi}{6} + k \cdot 4\pi.$$

Ez $k = 0$ esetén a $\left]-\frac{\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right[$ intervallumot adja. Mindkét egyenlőtlenségnek a $\left]-\frac{\pi}{6}; 5\right]$ intervallum elemei tesznek eleget.

2. *Egy adott hosszúságú szakaszt az* aranymetszés *szerint úgy osztunk két részre, hogy az eredeti és a keletkezett hosszabb szakasz hosszának aránya megegyezik a keletkezett hosszabb és a keletkezett rövidebb szakasz hosszának arányával. Bence szobája egyik falának hossza* 6,5 *méter, magassága* 2,8 *méter. Ezt a falfelületet Bence úgy szeretné lefesteni, hogy függőlegesen és vízszintesen is az aranymetszésnek megfelelően osztja fel* 4 *téglalap alakú részre úgy, hogy a bal felső sarok felé legyenek a rövidebb szakaszok.*

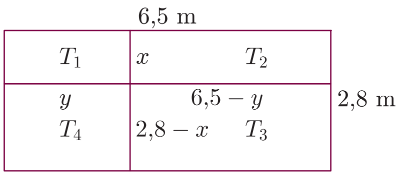


Bence fala

a) Határozzuk meg az egyes téglalapok területét. A számolás során az oldalak hosszát és a területeket is pontosan 3 *tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* *(8 pont)*

b) Bencének otthon 4*-féle színű falfestéke van, ezekből válogat a fal festése során. Hány különböző színezés lehetséges, ha az oldallal egymáshoz illeszkedő téglalapoknak különböző színűeknek kell lennie?* *(4 pont)*

Megoldás. *a*) A fal 2,8 méteres magasságának aranymetszés szerinti felosztása:



$$\frac{2{,}8}{2{,}8-x}=\frac{2{,}8-x}{x}.$$

Rendezve az $x^2-8{,}4x+7{,}84=0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A feladatnak megfelelő megoldás három tizedesjegyre kerekítve 1,070. Ezért a keletkezett téglalapok függőleges oldalainak hossza 1,070 m és 1,730 m.

A fal 6,5 m-es vízszintes hosszúságát tekintve az aranymetszéssel való felosztás:

$$\frac{6{,}5}{6{,}5-y}=\frac{6{,}5-y}{y}.$$

Rendezve az $y^2-19{,}5y+42{,}25=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A feladatnak megfelelő megoldás három tizedesjegyre kerekítve 2,483. Ezért a keletkezett téglalapok vízszintes oldalainak hossza 2,483 m és 4,017 m.

A téglalapok területeinek nagysága:

$$T_1=2{,}657\ \mathrm{m}^2,\quad T_2=4{,}298\ \mathrm{m}^2,\quad T_3=6{,}949\ \mathrm{m}^2\quad \text{és}\quad T_4=4{,}296\ \mathrm{m}^2.$$

c) A fal kétféle színnel 12 különböző módon színezhető, hiszen ki kell választanunk a 4-féle színből azt a kettőt, amelyeket a festésnél felhasználunk. Ezt $\binom{4}{2}=6$-féleképpen tehetjük meg. Majd a bal felső sarokban lévő téglalap színét kiválaszjuk (2 lehetőség), míg a többi téglalap színe már egyértelmű lesz. $\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1=12$. Háromféle színnel történő festés esetén $\binom{4}{3}\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1=48$ az esetek száma. Négyféle színre $4!=24$ különböző festést választhat Bence, ezért összesen $12+48+24=84$ a lehetőségek száma.

3. *A légköri nyomás függ a tengerszinten mérhető nyomás értékétől* (p_0)*, a tengerszint feletti méterben mért magasságtól* (h) *és a levegő Celsius-skálán mért hőmérsékletétől* (T)*. A hozzárendelés szabálya:*

$$p=p_0\cdot e^{-0{,}0342\cdot\frac{h}{T+273}}.$$

a) *Mekkora a nyomás Bolívia fővárosában, La Pazban* 3 600 *méter magasságban, ha a tengerszinten* 101 500 Pa *a nyomás* 20 °C*-on?* (*2 pont*)

b) *A Kékestetőn* 1 014 *méter magasságban hány* %*-os nyomásváltozás észlelhető, ha a hőmérséklet* 8 °C*-ról* 22 °C*-ra emelkedik?* (*3 pont*)

c) *Milyen magasságban mérhető feleakkora nyomás, mint a tengerszinten, amikor a levegő hőmérséklete* 24 °C? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A megfelelő értékek behelyettesítése után

$$p=101\,500\cdot e^{-0{,}0342\cdot\frac{3600}{20+273}}=66\,676{,}6\approx 66\,680\ \mathrm{Pa}$$

a légköri nyomás La Pazban.

b) A Kékestetőn 8°C-on a nyomás értéke $p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{1014}{8+273}} = p_0 \cdot 0{,}8839$, 22°C-on pedig $p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{1014}{22+273}} = p_0 \cdot 0{,}8891$. Mivel

$$0{,}8891 - 0{,}8839 = 0{,}0052 \quad \text{és} \quad \frac{0{,}0052}{0{,}8839} = 0{,}0059,$$

azért 0,59%-os növekedés tapasztalható a légköri nyomásban.

c) Megoldandó a

$$0{,}5 \cdot p_0 = p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{h}{24+273}}$$

egyenlet. Oszthatunk a p_0 tengerszinten mérhető nyomással, majd vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát (ln). Így

$$\ln 0{,}5 = -0{,}0342 \cdot \frac{h}{297}.$$

Rendezés után $h = 6\,019{,}4$ tehát körülbelül 6 020 m magasságban lesz a nyomás fele a tengerszinten mérhetőnek.

4. *Az* **AB0** *vércsoportrendszerben az emberek négy alapvető fenotípusba sorolhatók. A magyarországi populációt figyelembe véve az* **A** *vércsoportúak a népesség* 44%*-át teszik ki, a* **0** *vércsoportúak* 40%*-ot. A* **B** *vércsoportúak aránya* 11%*, míg az* **AB** *vércsoportúak mindössze* 5%*-ot adnak. Ettől a csoportosítástól függetlenül a vörösvértestek felszínén található* D *antigén megléte esetén* Rh^+ *vércsoportról beszélünk, a* D *antigén hiánya esetén* Rh^- *a vércsoport, ahová az emberek* 15%*-a tartozik.*

a) *Igazoljuk Réka állítását, aki azt mondja, hogy a Magyarországon élő* 9,7 *millió lakosból mindössze körülbelül* 72 750 *ember tartozik a legritkább* **AB** Rh^- *vércsoportba.* (*2 pont*)

b) *Csengéről tudjuk, hogy van* D *antigén a vérében. Mekkora valószínűséggel* **B** *vércsoportú Csenge? Válaszunkat indokoljuk.* (*2 pont*)

c) *Készítsünk kördiagramot a szükséges középponti szögek meghatározása után, amely mutatja a magyar embereket vércsoportjuk alapján, figyelembe véve mind az* **AB0** *rendszert, mind a* D *antigén meglétét.* (*5 pont*)

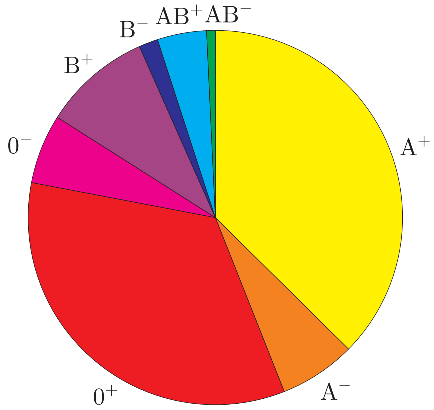
d) *Egy véradásról szóló teltházas előadáson a* 150 *fős teremben férfiak, nők és gyerekek ülnek. Ha a teremből kimenne* 2 *férfi, akkor az ott maradó férfiak és nők aránya* 2 : 3 *lenne. Ha a terembe bejönne még* 2 *gyerek, akkor a nők pontosan háromszor annyian lennének, mint a gyerekek. Hány nő vett részt ezen az előadáson?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az **AB0** vércsoportrendszer és a D antigén megléte egymástól független, így az **AB** Rh^- vércsoportba tartozó emberek száma Magyarországon $9\,700\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}15 = 72\,750$.

b) Az **AB0** vércsoportrendszer és a D antigén megléte egymástól független, ezért Csenge 0,11 valószínűséggel **B** vércsoportú.

c) Az **AB0** rendszert, valamint a D antigén meglétét figyelembe véve a keresett valószínűségek és középponti szögek, illetve a kördiagram:

A	Rh^+	0,3740	134,64°
A	Rh^-	0,0660	23,76°
0	Rh^+	0,3400	122,40°
0	Rh^-	0,0600	21,60°
B	Rh^+	0,0935	33,66°
B	Rh^-	0,0165	5,94°
AB	Rh^+	0,0425	15,30°
AB	Rh^-	0,0075	2,70°



d) Jelölje a teremben lévő férfiak számát f, nők számát n, a gyerekek számát pedig g. A feladat szövege alapján a következő egyenletek írhatóak fel:

$$f+n+g=150, \qquad \frac{f-2}{n}=\frac{2}{3}, \qquad 3(g+2)=n.$$

A második egyenletből kifejezzük a férfiak számát: $f=\frac{2}{3}n+2$. A harmadik egyenletből kifejezzük a gyerekek számát: $g=\frac{1}{3}n-2$. Ezeket behelyettesítjük az első egyenletbe, és rendezzük. Az eredmény $n=75$, tehát az előadáson 75 nő vett részt.

Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről. A férfiak száma 52 volt a teremben. Ha ketten elmennek, valóban $2:3$ lesz a férfiak és nők aránya. Ha a teremben lévő 23 gyerekhez még ketten bejönnek, akkor a nők tényleg háromszor annyian lesznek.

II. rész

5. *a*) *Elkezdtük összeadni a 7-tel osztva 5 maradékot adó pozitív egész számokat a legkisebb ilyen tulajdonságú számtól kezdve. Hány tagot adtunk össze, és mi az utolsó szám, ha a kapott összeg 54 875?* *(4 pont)*

b) *Egy mértani sorozat hatodik és nyolcadik tagja egyaránt 6. Számítsuk ki a sorozat első 35 tagjának összegét.* *(4 pont)*

c) *Egy számtani sorozat három egymást követő elemének összege 72. Ha az első számból elveszünk 4-et, a középsőt változatlanul hagyjuk, az utolsóhoz pedig hozzáadunk 16-ot, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát.* *(8 pont)*

Megoldás. *a*) Az összeg tagjai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja $a_1=5$, differenciája $d=7$. A számtani sorozat összegképletébe behelyettesítve az ismert értékeket:

$$\frac{n\cdot\left[2\cdot 5+(n-1)\cdot 7\right]}{2}=54\,875.$$

Rendezzük az egyenletet: $7n^2 + 3n - 109\,750 = 0$. Ennek pozitív egész megoldása $n = 125$. Tehát 125 tagot adtunk össze. Az utolsó szám a sorozat 125. eleme: $a_{125} = 5 + 124 \cdot 7 = 873$.

b) Az adott mértani sorozat esetén $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 6$ és $a_8 = a_1 \cdot q^7 = 6$. A két egyenlet hányadosát vesszük, így $q^2 = 1$, amiből $q = \pm 1$.

Ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja $a_i = 6$, az első 35 tag összege $S_{35} = 35 \cdot 6 = 210$.

Ha $q = -1$, akkor a sorozat első tagja $a_1 = -6$, az első 35 tag összege

$$S_{35} = (-6) \cdot \frac{(-1)^{35} - 1}{(-1) - 1} = -6.$$

c) Jelölje a számtani sorozat középső tagját a, differenciáját d. Ekkor a sorozatok három egymást követő tagja:

számtani sorozat:	$a - d$,	a,	$a + d$;
mértani sorozat:	$a - d - 4$,	a,	$a + d + 16$.

A számtani sorozat tagjainak összege 72. Tehát $(a - d) + a + (a + d) = 72$, amiből $a = 24$. Ezt felhasználva a mértani sorozat egymást követő tagjai:

$$20 - d, \quad 24 \quad \text{és} \quad 40 + d.$$

Felhasználjuk, hogy a mértani sorozat egymást követő tagjai esetén a középső tag négyzete megegyezik a két szélső tag szorzatával:

$$(20 - d)(40 + d) = 24^2.$$

A zárójelek felbontása után $d^2 + 20d - 224 = 0$. Az egyenlet két megoldása $d = 8$, illetve $d = -28$. Az első esetben a mértani sorozat tagjai 12, 24 és 48, hányadosa $q = 2$. A második esetben a mértani sorozat tagjai 48, 24 és 12, hányadosa pedig $q = \frac{1}{2}$.

6. *Tekintsük az* $f(x) = \frac{4x-14}{x-2}$ *függvényt.*

a) Adjunk meg egy olyan egész számot, amelyre az $f(x)$ *függvény helyettesítési értéke is egész szám.* (*2 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy pontosan 8 *darab rácsponton halad át az* $f(x)$ *függvény képe a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben.* (*8 pont*)

c) Oldjuk meg a $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x-3}$ *egyenletet a valós számok halmazán.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Például $x = 1$ esetén $f(1) = 10$. (A *b*) feladatrész megoldásánál látható táblázatban szerepel a 8 db lehetséges érték.)

b) Végezzük el az egészrész leválasztást:

$$f(x) = \frac{4x - 14}{x - 2} = \frac{4(x - 2) - 6}{x - 2} = 4 - \frac{6}{x - 2}.$$

A függvény helyettesítési értékei akkor lesznek egészek, ha a $\frac{6}{x-2}$ tört értéke egész. A nevező értéke -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3 és 6 lehet. Tehát a függvény valóban 8 db rácsponton halad át.

$x-2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-4	-1	0	1	3	4	5	8
$y=f(x)$	5	6	7	10	-2	1	2	3

c) Négyzetre emelés után a $\frac{4x-14}{x-2}=x-3$ egyenlethez jutunk. Szorozzunk be a nevezővel, majd bontsunk zárójelet. Rendezés után $x^2-9x+20=0$. A másodfokú egyenlet két megoldása $x_1=4$, illetve $x_2=5$.

Az egyenlet ellenőrzéséről ne feledkezzünk meg, hiszen nem vizsgáltuk az értelmezési tartományt, és a négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás. Mindkét megoldás kielégíti az eredeti egyenletet.

7. *Egy konyhai műanyag tölcsér alsó része henger alakú, belső átmérője* 18 *milliméter, magassága* 5 *centiméter. Felső része a hengerre pontosan illeszkedő csonkakúp, amelynek felső átmérője* 7 *centiméter, illetve magassága* 4 *centiméter.*

a) *A tölcsér alját befogjuk, és teljes magasságának* 90%*-áig megtöltjük vízzel. Hány deciliter víz lesz a tölcsérben?* (*6 pont*)

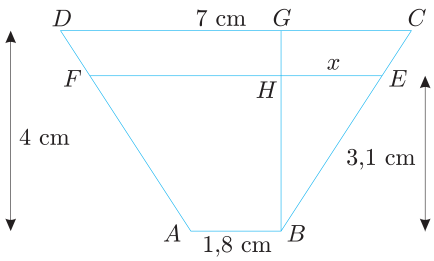
b) *Mekkora egy tölcsér tömege, ha a falvastagsága mindenhol* 1 *milliméter, a műanyag sűrűsége* $0{,}92\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$? *A műanyag térfogatának kiszámításához használjuk azt a közelítést, amely szerint a tölcsér belső felszínét szorozzuk a falvastagsággal.* (*4 pont*)

c) *Lézerfénnyel felülről függőlegesen belevilágítunk a tölcsérbe. Mekkora a valószínűsége, hogy a lézerfény a tölcsér alsó nyílásán jön ki?* (*3 pont*)

d) 50 *darab tölcsérből átlagosan* 2 *anyaghibásat készít a gyártósor. Mekkora a valószínűsége, hogy* 135 *darab elkészített tölcsér között van anyaghibás? A választ négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Vezessük be a következő jelöléseket: az alsó, henger alakú rész sugara $r=0{,}9$ cm, magassága $m=5$ cm. A felső, csonkakúp alakú rész fedőkörének sugara $R=3{,}5$ cm, magassága $M_1=4$ cm. A teljes tölcsér magassága $M_{\text{teljes}}=M_1+m=9$ cm, vízzel töltve 90%-áig, tehát 8,1 cm-ig van.

Az alsó henger tele van vízzel, ennek térfogata $V_h=r^2\pi\cdot m=0{,}9^2\cdot\pi\cdot 5=12{,}72\ \mathrm{cm}^3$. A csonkakúp $M_2=8{,}1-5=3{,}1$ cm-es magasságig van töltve, ennek keresztmetszete:



$CG=\frac{7-1{,}8}{2}=2{,}6$ cm. A $BCG\triangle\sim BEH\triangle$, mert a megfelelő szögek nagysága egyenlő. Írjuk fel a háromszögek megfelelő oldalainak arányát:

$$\frac{CG}{GB}=\frac{EH}{HB},\qquad \frac{2{,}6}{4}=\frac{x}{3{,}1},$$

ebből $x=2{,}015$ cm. Ezzel $FE=2\cdot 2{,}015+1{,}8=5{,}83$ cm, a víz felszínének sugara $R_2=\frac{FE}{2}=2{,}915$ cm. A csonkakúp alakú részben lévő víz térfogata:

$$V_{\text{csk}}=\frac{M_2\cdot\pi}{3}\big(R_2^2+R_2r+r^2\big)=\frac{3{,}1\cdot\pi}{3}\big(2{,}915^2+2{,}915\cdot 0{,}9+0{,}9^2\big)=38{,}73\ \text{cm}^3.$$

Így a beletöltött víz teljes térfogata $12{,}72+38{,}73=51{,}45\ \text{cm}^3$, ami kerekítve 0,51 dl.

b) A henger belső felszínének (palástjának) nagysága

$$A_h=2r\pi m=2\cdot 0{,}9\cdot\pi\cdot 5=28{,}27\ \text{cm}^2.$$

A csonkakúp belső felszínéhez is csak a palástjának területét kell kiszámítani. Ehhez szükségünk van a csonkakúp alkotójának, a BC szakasz hosszának kiszámítására. Írjunk fel Pitagorasz-tételt a BCG háromszögben: $BC^2=2{,}6^2+4^2$. Ebből $a=BC=4{,}77$ cm.

$$A_{\text{csk}}=(R+r)a\pi=(3{,}5+0{,}9)\cdot 4{,}77\cdot\pi=65{,}94\ \text{cm}^2.$$

A teljes belső felszín $94{,}21\ \text{cm}^2$. A műanyag térfogata a felszín és az anyagvastagság (1 mm $=0{,}1$ cm) szorzata: $9{,}421\ \text{cm}^3$. A műanyag tömege a térfogatának és a sűrűségének összeszorzásával számítható ki, ezért egy tölcsér 8,67 gramm.

c) A keresett valószínűséget a tölcsér felső körének területe (T), és alsó nyílásának területe (t) meghatározása után tudjuk megadni geometriai valószínűségi modell alapján.

$$T=3{,}5^2\pi=\frac{49}{4}\pi,\quad t=0{,}9^2\pi=\frac{81}{100}\pi.$$

Így $p=\frac{t}{T}=\frac{81}{1225}$ annak valószínűsége, hogy a tölcsér alján jön ki a lézerfény.

d) Annak a valószínűsége, hogy egy tölcsér anyaghibás $p=\frac{2}{50}=0{,}04$; annak, hogy jó $(1-p)=0{,}96$. Először számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy az összes elkészített tölcsér hibátlan. Ez 135 hibátlan terméket jelent, ezért ennek valószínűsége $0{,}96^{135}$. A komplementer esemény jelenti azt, hogy van a tölcsérek között anyaghibás. Négy tizedesjegyre kerekítve $P(A)=1-0{,}96^{135}=0{,}9960$.

8. *a*) *Sheldon Cooper kedvenc száma a* 73, *mert ez a* 21. *prím és* $7\cdot 3$ *éppen* 21. *Sőt, a* 73 *kettes számrendszerbeli alakja palindromszám, vagyis visszafelé olvasva az eredetivel azonos. Igazoljuk ez utóbbi kijelentést.* (*2 pont*)

b) *Egy adott alapú, és az ennél* 2*-vel nagyobb alapú számrendszerben tekintsük a* $\overline{345}$ *alakú háromjegyű számokat, ezek összege* 696_{10}. *Adjuk meg az összeadandó számok értékét a* 10*-es számrendszerben felírva.* (*8 pont*)

c) *Véletlenszerűen kiválasztunk egy* 10*-es számrendszerbeli háromjegyű számot. Mekkora a valószínűsége, hogy a szám 9-es számrendszerbeli alakja is háromjegyű?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A 73 kettes számrendszerbeli alakja 1001001_2, mert

helyiértékek	64	32	16	8	4	2	1
alaki értékek	1	0	0	1	0	0	1

Ez a szám visszafelé olvasva valóban az eredetivel azonos.

b) A k alapú számrendszerben a háromjegyű számok számjegyeihez tartozó helyiértékek rendre k^2, k és 1. Így a $\overline{345}$ alakú háromjegyű szám 10-es számrendszerbeli értéke $3\cdot k^2+4\cdot k+5$. A 2-vel nagyobb alapú számrendszerben a helyiértékek hasonlóan $(k+2)^2$; $(k+2)$ és 1, így a $\overline{345}$ alakú háromjegyű szám 10-es számrendszerbeli értéke $3\cdot(k+2)^2+4\cdot(k+2)+5$. Ezek összege ad 696-ot. Írjuk fel a megfelelő egyenletet:

$$3\cdot k^2+4\cdot k+5+3\cdot(k+2)^2+4\cdot(k+2)+5=696.$$

A zárójelek felbontása és a lehetséges összevonások után $6k^2+20k-666=0$. Az egyenlet egész megoldása $k=9$. A számrendszerek alapszáma tehát 9 és 11. A 9-es számrendszerbeli $\overline{345}$ szám 10-es számrendszerbeli értéke 284, a 11-es számrendszerbelié pedig 412. A két szám összege valóban 696.

c) A legkisebb 10-es számrendszerbeli háromjegyű szám a 100, ennek 9-es alapú számrendszerbeli alakja 121_9. Ez háromjegyű szám. A legnagyobb 9-es számrendszerbeli háromjegyű szám a 888_9, ennek 10-es számrendszerbeli értéke $8\cdot 9^2+8\cdot 9+8=728$. Így 100-tól 728-ig bármely szám megfelel a feltételnek, ezért a kedvező esetek száma $728-100+1=629$. Az összes eset száma 900, mert ennyi háromjegyű szám van a 10-es számrendszerben. A keresett valószínűség $p=\frac{629}{900}=0{,}6989$.

9. *a*) *Ábrázoljuk koordinátarendszerben a következő A ponthalmazt:*

$$A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x+3y\geqslant 15\right\}. \qquad (3\ pont)$$

b) *Ábrázoljuk koordinátarendszerben a B ponthalmazt:*

$$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-14x-8y+40\leqslant 0\right\}. \qquad (5\ pont)$$

c) *Igazoljuk, hogy az $F(-3;-4)$ fókuszpontú $v:\ y=-6$ vezéregyenesű parabola egyenlete $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$.* *(4 pont)*

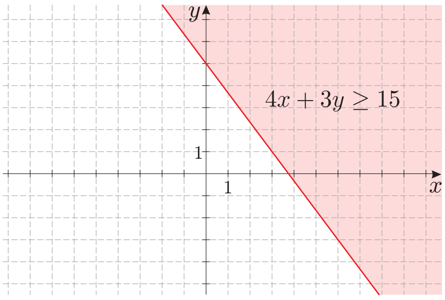
d) *Írjuk fel a $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ parabola $(-1;-4)$ pontjába húzott érintőjének egyenletét.* *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Rendezzük y-ra az egyenlőtlenséget: $y\geqslant-\frac{4}{3}x+5$. A kifejezés az y-tengelyt az 5-nél metsző, $-\frac{4}{3}$ meredekségű egyenest, és a felette lévő síkrészt adja meg, ez az A ponthalmaz.

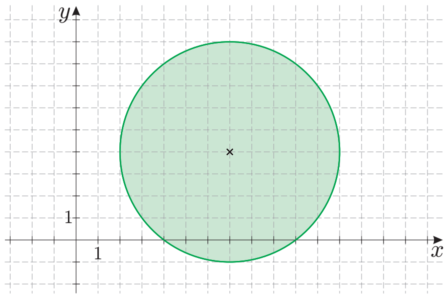
b) Teljes négyzetté alakítással rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$(x-7)^2-49+(y-4)^2-16+40\leqslant 0,$$

$$(x-7)^2+(y-4)^2\leqslant 25.$$



a)



b)

A B ponthalmaz egy $(7;4)$ középpontú, $r=5$ egység sugarú zárt körlap.

c) A parabola paramétere a fókuszpontjának és vezéregyenesének távolsága: $p=2$, a parabola tengelypontjának koordinátái $T(-3;-5)$. A fókuszpont a vezéregyenes felett helyezkedik el, ezért a keresett alakzat felfelé nyíló parabola. Ezek felhasználásával a parabola egyenlete:

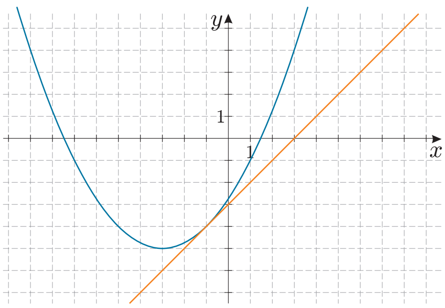
$$y-(-5)=\frac{1}{2\cdot 2}\big(x-(-3)\big)^2.$$

A nevezetes azonosság alkalmazása után végezzük el a beszorzásokat és a rendezést. Valóban az $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ egyenletet kapjuk.

d) Az alakzat érintőjének meredekségét az $f(x)=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ függvény deriválása után kapjuk, ha kiszámítjuk annak $x=-1$ helyen felvett helyettesítési értékét:

$$f'(x)=0{,}5x+1{,}5;\qquad f'(-1)=1.$$

Az érintő egyenlete: $y-(-4)=$ $=x-(-1)$, rendezve $y=x-3$.



Jócsik Csilla
Győr

C gyakorlatok megoldása

C. 1729. *Az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalára mint átmérőre a k_1, illetve k_2 félköröket rajzoljuk a négyzeten kívülre. A két félkörív felezőpontja E, illetve F. A DE és AF szakasz felezőpontja P, illetve Q. Mutassuk meg, hogy P a négyzet AC átlójára, Q pedig a négyzet BD átlójára illeszkedik.*