Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Az a_n számtani sorozat különbsége 4, az első hét tagjának összege 105. Adjuk meg a sorozat első tagját. (*3 pont*)

b) A b_n mértani sorozat hányadosa 4, az első hét tagjának összege 16 383. Adjuk meg a sorozat első tagját. (*3 pont*)

c) A c_n sorozat minden tagja az n elsőfokú függvénye. A sorozat második tagja 7, a hetedik tagja 27. Adjuk meg a sorozat első tagját. (*5 pont*)

2. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$5^{-x+1}-10\cdot 5^{-x-1}+6\cdot 5^{-x-2}=16{,}2. \qquad (6\ pont)$$

b) Igazoljuk, hogy

$$\lg 3^{2x}\cdot \lg 7^{2x}\leqslant \left(\lg 3^{x}+\lg 7^{x}\right)^{2}$$

minden valós x esetén fennáll. (*7 pont*)

3. Egy üzemben 5 milliméter vastagságú, 80 centiméter oldalhosszúságú négyzet alakú acéllapokból a lehető legnagyobb, szabályos tizenkétszögeket vágnak ki úgy, hogy a tizenkétszögek két-két oldala illeszkedjen a négyzetlapok oldalára. Tudjuk, hogy az acél sűrűsége 7,8 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

a) Mekkora lesz 75 darab legyártott tizenkétszög tömege? (*7 pont*)

A szabályos tizenkétszög csúcsait megszámozzuk sorban 1-től 12-ig. A sorszámozott csúcsok közül bármelyik három egy-egy háromszöget alkot.

b) Adjuk meg az így kapott derékszögű és nem derékszögű háromszögek számát. (*6 pont*)

4. Magyarországon 2022-ig a gépkocsik (nem egyedi) rendszáma három betűből és három számjegyből állt. Az ábécé 26 betűje használható ezekben a rendszámokban.

a) Hány autó kaphat ilyen módon rendszámot? (*4 pont*)

b) Hány olyan rendszám lehet, amelyikben kétféle betű, és kétféle számjegy szerepel? (*5 pont*)

c) Az elképzelhető összes rendszámból véletlenszerűen választunk egy darabot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy három különböző betűből és három különböző számjegyből áll ez a rendszám? (*5 pont*)

II. rész

5. Adott a következő két függvény:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=-x-1,\quad \text{és}\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad g(x)=-x^2-10x-19.$$

a) Oldjuk meg az $f(x)=g(x)$ egyenletet a valós számok halmazán. (*3 pont*)

b) Írjuk fel az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y=g(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét. (*7 pont*)

c) Számítsuk ki az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ egyenletű alakzatok által közbezárt síkidom területét. (*6 pont*)

6. Egy 600 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú parkot futópálya határol. A park egyik csúcsától indítja András, az edző a két futóatlétáját, akik egyszerre indulnak, de más irányban. András helyben marad, Lali 9 km/h, Máté 8 km/h egyenletes sebességgel fut az edzésen. 6 perc elteltével a három szereplő az ALM háromszög csúcsaiban van, ahol a háromszög csúcsait a szereplők nevének a kezdőbetűjével jelöltük.

a) Milyen messze van ekkor Andrástól Lali és Máté? (*4 pont*)

b) Milyen messze van ekkor egymástól a két futó? (*2 pont*)

c) Igazoljuk, hogy ekkor András pontosan 45°-os szögben látja az LM szakaszt. (*5 pont*)

d) A parkban az L és M között van egy egyenes sétaút is. Milyen messze van András ettől az úttól? (*5 pont*)

7. Boglárka érdekes számhármasokat gyűjtött, és a következőket állapította meg:

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$5^2+12^2=13^2,$$
$$7^2+24^2=25^2,$$
$$9^2+40^2=41^2.$$

a) Béla meglátta Boglárka egyenleteit és elgondolkodott azon, hogy lehet-e egy ilyen tulajdonságú számhármas legkisebb eleme a 2023. Segítsünk Bélának, határozzuk meg $k\in\mathbb{Z}$ értékét, ha $2023^2+k^2=(k+1)^2$. (*4 pont*)

b) Bálint azt állítja, hogy a végtelenségig folytatható az egyenlőségek sorozata, azaz minden $2n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ alakú páratlan szám négyzetéhez hozzáadva a $2n(n+1)$ négyzetét, éppen a következő négyzetszámot kapjuk. Igazoljuk Bálint állítását. (*6 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+4^{2023}+5^{2023}$ osztható 5-tel. (*6 pont*)

8. Egy vállalkozás olyan négyzet alapú egyenes gúlákat rendel reklámajándéktárgyként, amelyeknek az oldallapjai az alaplappal $60°$-os szöget zárnak be, és az alapéleinek a hossza 12 centiméter. A négy kiemelkedő termékük reklámját szeretnék elhelyezni a gúla egy-egy oldallapján.

a) Határozzuk meg mekkora területű részre kell megtervezni egy termék reklámját. (*3 pont*)

b) Mekkora a gúla térfogata? (*3 pont*)

c) Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal? (*4 pont*)

d) A gúla alakú dobozok belsejében egy-egy (gömb alakú) ajándék labdát is elhelyeznek, amelyek mind a négy oldallapot és az alaplapot is érintik. Mekkora a labda sugara? (*6 pont*)

9. *a*) Egy matematikatanár tanít a 12. A és a 12. B osztályban is. Íratott egy közös dolgozatot, amelyben 120 pont volt az elérhető legmagasabb pontszám. Az A osztályban 84 pont, a B osztályban 74 pont lett az átlag. Az A osztályos fiúk átlagosan 81, a B osztályos fiúk pedig 71 pontot értek el. Az A osztályban a lányok átlagosan 90, míg a B osztályban a lányok átlagosan 76 pontos dolgozatot írtak. Tudjuk továbbá, hogy az összes fiú átlaga 79 pont lett. Mennyi a két osztályban az összes lány átlagpontszáma?

(*8 pont*)

b) Az A osztályban tanuló Andrásnak hat jegye van matematikából, és a hat jegynek a mediánja 4. Mit mondhatunk a B osztályban tanuló Benedek matematikajegyeinek mediánjáról, ha hat jegye pontosan megegyezik András jegyeivel, de neki van még ezen túl egy hetedik jegye, amely 5-ös? (*4 pont*)

c) Három barátnő, Anna, Bea és Cili matematikából, fizikából és kémiából elért félévi eredményeiket vizsgálta.

I. Kiszámolták mindegyiküknek az átlagát, majd ezeknek az átlagoknak vették az átlagát.

II. Kiszámolták a három tantárgy átlagát, majd ezen átlagok átlagát vették.

Mutassuk meg, hogy a kétféle módon kapott átlag egyenlő egymással. (*4 pont*)

Kozma Katalin Abigél, Győr
Számadó László Budapest

Megoldásvázlatok a 2022/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $2\cdot\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x+2\cdot\sin x=0$ *egyenletet a valós számok halmazán.* (*5 pont*)