Nyakláncok, lyukas négyzetek és oszthatóság

Ebben az írásban egy olyan módszert mutatunk be, amely számos leszámlálási feladatnál jól használható.

I. Nyakláncok

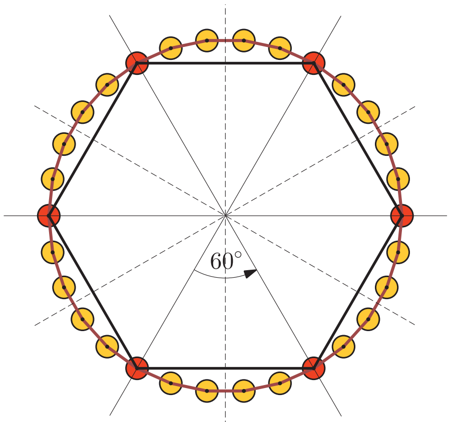
1. feladat. *Van* 30 *egyforma gyöngyünk,* 2 *piros, a többi sárga. Hányféle nyaklánc készíthető belőlük?*

Megoldás. A nyakláncot bárhogyan forgatva ugyanaz marad. Így csak az számít, hogy az egyik piroshoz milyen közel van a másik. A kettő közötti sárgák száma lehet $0, 1, \ldots, 14$, tehát 15-féle nyaklánc készíthető.

2. feladat. *Van* 30 *egyforma gyöngyünk,* 6 *piros, a többi sárga. Hányféle nyaklánc készíthető belőlük?*

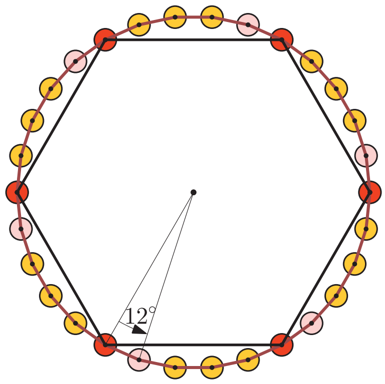
Ismerkedés a nehézségekkel. Erre az esetre reménytelen az előző módszert adaptálni (látni fogjuk, hogy a lehetséges nyakláncok száma 10 133).

Ha a szimmetriáktól eltekintenénk, akkor 24 sárga és 6 piros gyöngyöt kellene sorba raknunk, tehát a 30 helyből a 6 pirosnak a helyét kellene kiválasztanunk, ami $\binom{30}{6}$ lehetőség. Azonban azok a piros hatosok, amelyek egymásba a szimmetriák alapján átvihetők, ugyanazt a nyakláncot jelentik. Mik ezek a szimmetriák? A nyakláncot kifeszítve a gyöngyök egy szabályos 30-szög csúcsainak tekinthetők, és ha egy nyakláncot a sokszög középpontja körül $12k$ fokkal elforgatunk (ahol $1 \leqslant k \leqslant 30$), vagy a sokszög valamelyik szimmetriatengelyére tükrözünk, akkor ugyanaz a nyaklánc marad. Tehát egy piros hatosra ezen 60 darab egybevágóságot alkalmazva mindig ugyanazt a nyakláncot kapjuk. Első közelítésben azt gondolhatnánk, hogy akkor a piros hatosok 60-asával jelentik ugyanazt a nyakláncot, tehát a piros hatosok számát a transzformációk számával osztva $\binom{30}{6}/60$ adja a nyakláncok számát. Ez viszont nem is egész szám.



1. ábra

A problémát az okozza, hogy vannak olyan piros hatosok, amelyekre a 60 transzformációt alkalmazva nem kapunk 60 különböző piros hatost. Nézzünk például egy olyan esetet, amikor minden ötödik gyöngy piros (*1. ábra*). Azonnal látszik, hogy erre a 60 transzformációt alkalmazva összesen 5 különböző piros hatost kapunk. Vizsgáljuk meg ezt alaposabban, hogy jobban lássuk az összefüggéseket. A piros gyöngyök ekkor egy szabályos hatszög csúcsait alkotják. Így a nyakláncot $60j$ fokkal elforgatva (ahol $1 \leqslant j \leqslant 6$), vagy a hatszög bármelyik szimmetriatengelyére tükrözve az adott piros hatos önmagába megy át. Ezt röviden úgy fogjuk hívni, hogy ez a piros hatos ennek a 12 transzformációnak *fixalakzata.* Jelölje ezt a 12 transzformációt $\tau_1, \ldots, \tau_{12}$, és legyen ϱ (mondjuk) a 12 fokkal történő elforgatás (*2. ábra*), ami tehát egy másik piros hatost eredményez (de ugyanazt a nyakláncot). Mely másik transzformációk viszik át ugyanide az eredeti piros hatost? Az összes $\rho\tau_i$ (előbb a τ_i, utána a ρ) megfelel, hiszen akkor először önmagába megy az eredeti piros hatos, majd elfordul 12 fokkal. És ez az összes! Ugyanis ha π is ugyanide viszi az eredeti piros hatost, akkor ezután a -12 fokos forgatást, azaz a ϱ inverzét, ϱ^{-1}-et alkalmazva visszakerülünk az eredeti piros hatosba. Ez azt jelenti, hogy $\varrho^{-1}\pi$-nek az eredeti piros hatos fixalakzata, vagyis $\varrho^{-1}\pi = \tau_i$, azaz $\pi = \varrho\tau_i$. Ebből következik, hogy minden pozícióba pontosan ugyanannyi transzformáció viszi az eredeti piros hatost. Ezért a létrejövő pozíciók számát úgy kapjuk meg, hogy az összes transzformáció számát elosztjuk azoknak a transzformációknak a számával, amelyeknek az adott piros hatos fixalakzata: $60/12 = 5$. Ez az észrevétel általánosan is érvényes. Ez azt mutatja, hogy a fixalakzatok száma fontos szerepet játszik a leszámlálásban.



2. ábra

Pályák. Legyen az x piros hatos $P = P_x$ *pályája* az összes olyan piros hatos, ahová a transzformációk x-et átviszik. Egy szabálytalan piros hatos pályája tipikusan 60 elemű. A minden ötödik gyöngy piros pályája 5 elemű. Az egy pályába tartozó piros hatosok jelentik ugyanazt a nyakláncot. Így a feladat a pályák számának a meghatározása.

Jelölje F_x azoknak a τ transzformációknak a halmazát, amelyeknek x fixalakzata, tehát amelyek x-et önmagába viszik. Ha x egy minden ötödik gyöngy piros típusú hatos, akkor F_x a szabályos hatszög 12 szimmetriájának megfelelő τ_i forgatásokat és tükrözéseket jelenti. Jelölje végül az összes transzformáció halmazát T, példánkban ez a szabályos 30-szög 60 szimmetriájából áll.

Az előző rész gondolatmenetéből általánosan is azt kapjuk, hogy egy x piros hatost a P_x pálya bármely y piros hatosába ugyanannyi transzformáció visz át, mint amennyi x-et helyben hagyja. Ebből az elemszámokra az következik, hogy $|T| = |P_x| \cdot |F_x|$.

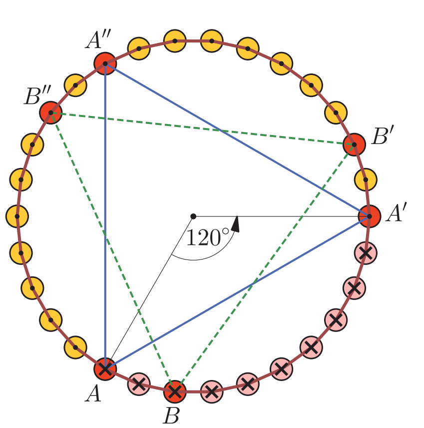
A feladat megoldásához az összes transzformációhoz tartozó összes fixalakzatot számoljuk össze, vagyis összegezzük minden transzformációra a fixalakzatok számát: $\sum\limits_{\tau \in T} \tau$ fixalakzatainak a száma. Ha ezt most a piros hatosok szerint számoljuk össze, akkor ugyanez az összeg $\sum\limits_{x} |F_x| = \sum\limits_{x} |T|/|P_x|$. Átosztva $|T|$-vel azt kapjuk, hogy a transzformációk fixalakzatainak átlagos száma éppen a piros hatosokhoz tartozó pályaméretek reciprokösszege $\sum_x 1/|P_x|$. Mivel egy P pályában levő mind a $|P|$ darab y piros hatosra $P_y = P$, ezért egy adott P pálya hatosait tekintve a reciprokösszeg $|P| \cdot 1/|P| = 1$. Vagyis a teljes reciprokösszeg éppen a pályák keresett száma! Ezzel beláttuk:

Burnside-lemma. *A pályák száma egyenlő a transzformációk fixalakzatainak átlagos számával.*

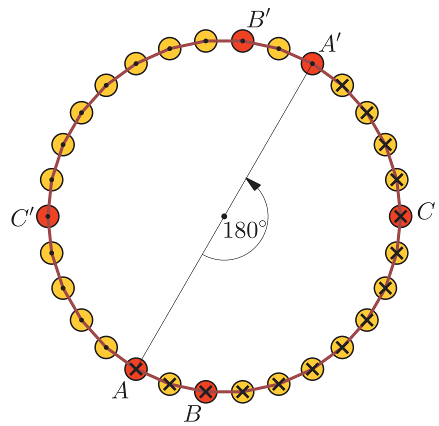
A 2. feladat megoldása előtt bemelegítésként oldjuk meg az 1. feladatot, tehát a 2 piros gyöngy esetét a Burnside-lemmával.

A szabályos 30-szög szimmetriái közül a helyben hagyás minden piros párt önmagába visz, tehát annak $\binom{30}{2}$ fixalakzata van. A forgatások közül egyedül a 180 fokos forgatásnak van fixalakzata, mégpedig az a 15 piros pár, amikor a 2 piros gyöngy között mindkét oldalon 14–14 sárga helyezkedik el. Ha a tükrözés tengelye két átellenes oldalfelező pontot összekötő egyenes, akkor az ennek egyik oldalán levő 15 gyöngyből bármelyik lehet piros, a másik piros pedig ennek a tengelyre vonatkozó tükörképe, tehát itt is 15 fixalakzat van. Ha a tükrözés tengelye két szemközti csúcsot összekötő átló, akkor vagy az átló két végpontja piros, vagy pedig az egyik oldalon levő 14 pont bármelyike és annak tükörképe lesz piros, tehát itt is 15 a fixalakzatok száma. Vagyis a fixalakzatok számának átlaga $\left(\binom{30}{2} + 31 \cdot 15\right)/60 = 15$.

Nézzük akkor ugyanezt a módszert a 6 piros gyöngy esetére. A helyben hagyásnak mind a $\binom{30}{6}$ piros hatos fixalakzata. A 60, illetve -60 fokos forgatás fixalakzatai a szabályos hatszögek (1. ábra), tehát 5–5 ilyen van. A ± 120 fokos forgatások fixalakzatai két szabályos háromszög egyesítései (*3. ábra*), azaz 10 (az ábrán **x**-szel jelölt) szomszédos pontból kiválasztunk 2-t, és ezek elforgatottjai adják a másik 4 pontot, tehát mindkét forgatásnak $\binom{10}{2}$ fixalakzata van. Ugyanígy adódik, hogy a 180 fokos forgatásnak $\binom{15}{3}$ fixalakzata van (*4. ábra*).

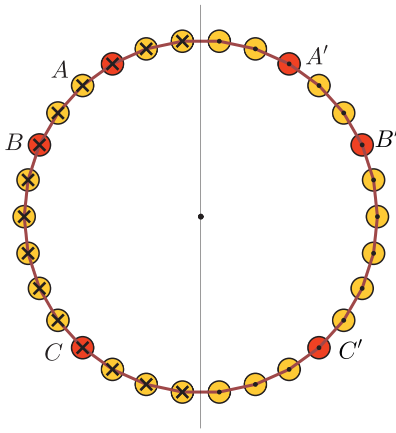


3. ábra

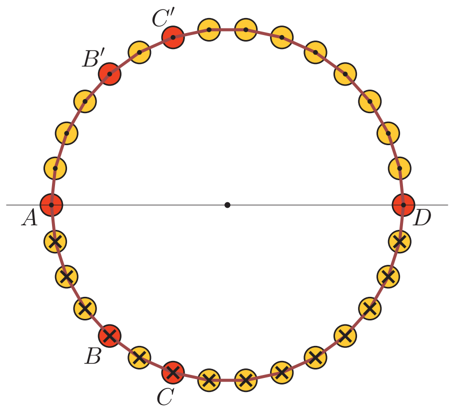


4. ábra

Ugyanez áll az oldalfelező szimmetriatengelyekre tükrözésnél: a tengely egyik oldalán levő 15 pontból 3 szabadon választható és ezek tükörképe a másik 3 pont (*5. ábra*). Az átló szimmetriatengelyeknél a tengelyen lehet 0 vagy 2 pont és a tengely egyik oldalán levő 14 pontból így 3 vagy 2 választható szabadon, ez $\binom{14}{3}+\binom{14}{2}=\binom{15}{3}$ fixalakzat (*6. ábra*).



5. ábra



6. ábra

A többi transzformációnak nincs fixalakzata. Így a pályák száma

$$\frac{\binom{30}{6}+2\cdot 5+2\binom{10}{2}+31\binom{15}{3}}{60}=10\,133.$$

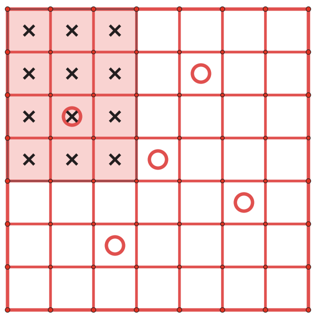
II. Lyukas négyzetek

Ebben a részben nem lesz újdonság, csak egy másik feladatra alkalmazzuk a tanult módszert.

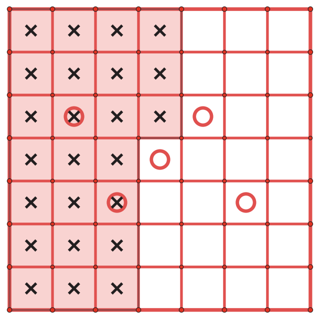
3. feladat. *Vagabundus Modernissimus, a kiváló képzőművész legújabb műalkotása egy kézben vihető* 70×70 *centiméteres vékony vaslemez, amelynek mindkét egyformán piros oldala* 49 *egybevágó kis négyzetre van osztva, és ezek közül* 5 *kis négyzet középen át van lyukasztva. Hányféle lehetősége volt a zseninek ily módon kifejeznie korszakalkotó kreativitását?*

Megoldás. Itt a lyukas négyzetötösök száma a kérdés, de a nagy négyzet szimmetriáival egymásba vihető ötösök ugyanazt a művet jelentik. A 8 transzformáció tehát a 4 darab $90k$ fokos forgatás ($1\leqslant k\leqslant 4$) és a 4 szimmetriatengelyre vonatkozó tükrözés. A pályák számát keressük, ez a Burnside-lemma szerint a fixalakzat ötösök átlagos száma.

A helyben hagyásnak mind a $\binom{49}{5}$ ötös fixalakzata. A ± 90 fokos forgatásnál a fixalakzatban a középső kis négyzet mindenképpen benne van, egy másik az egyik saroknál levő 3×4-es téglalapból szabadon választható, a maradék három pedig ennek a 90, 180 és 270 fokos elforgatottja, tehát 12 fixalakzat van (*7. ábra*). Hasonló a helyzet a 180 fokos forgatásnál: a középső négyzet kötelezően benne van a fixalakzatban, a középpontra szimmetrikus 24 négyzetpár közül pedig kettőt kell teljesen kiválasztani, a fixalakzatok száma így $\binom{24}{2}$ (*8. ábra*).



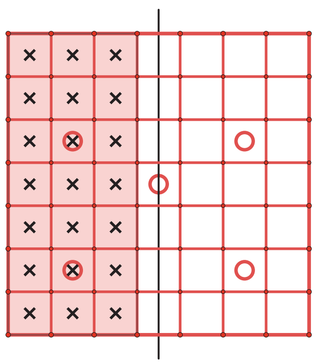
7. ábra



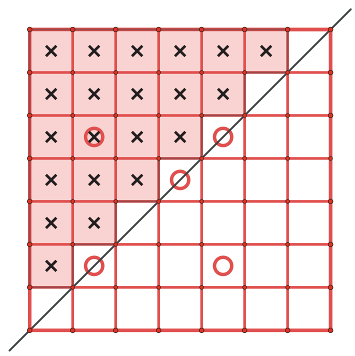
8. ábra

Egy tükrözésnél egy ötös akkor fixalakzat, ha a tengelyen választunk 1, 3 vagy 5 négyzetet, és hozzá ennek megfelelően 2, 1 vagy 0 a tengelyre szimmetrikus négyzetpárt, ilyen ötösből tehát $7\binom{21}{2}+\binom{7}{3}\cdot 21+\binom{7}{5}$ van (*9.* és *10. ábra*). A pályák száma, azaz a fixalakzatok átlagos száma így

$$\frac{\binom{49}{5}+2\cdot 12+\binom{24}{2}+4\cdot\left(7\cdot\binom{21}{2}+\binom{7}{3}\cdot 21+\binom{7}{5}\right)}{8}=239\,511.$$



9. ábra



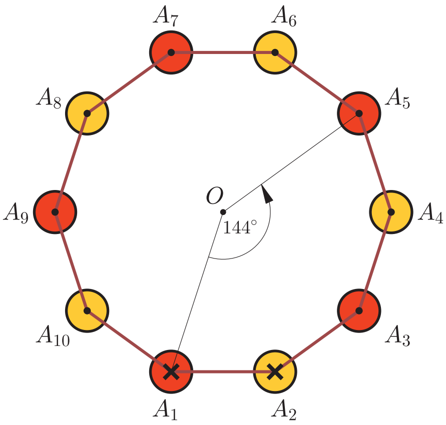
10. ábra

III. Egy oszthatósági feladat

4. feladat. *Lássuk be, hogy bármely c és n pozitív egészre* $c^{(1,n)}+c^{(2,n)}+\ldots+$ $+\,c^{(n,n)}$ *osztható n-nel.*

Megjegyzés. Ha $n=p=$ prím, akkor az összeg $(p-1)c+c^p=c^p-c+pc$, tehát kapjuk, hogy c^p-c osztható p-vel, ami a kis Fermat-tétel.

Bizonyítás. Tekintsük a következő problémát. Egy szabályos n-szög csúcsait c színnel tetszőlegesen kiszínezzük. Hányféle színezés adódik, ha az egymásba forgatással átvihető színezések között nem teszünk különbséget?



11. ábra

Itt n transzformációnk van, a $360k/n$ fokos forgatások a középpont körül (ahol $1 \leqslant k \leqslant n$), és a pályák száma a kérdés. A Burnside-lemma alkalmazásához megszámoljuk a $360k/n$ fokos forgatás fixalakzatait. Legyen például $n=10$ és $k=4$, azaz a transzformáció a 144 fokos forgatás (*11. ábra*). Ez minden csúcsot a tőle a forgatás irányába eső negyedik csúcsba visz. Ha például az 1-es csúcs piros, akkor ennek alapján az 5-ös, 9-es, 3-as és 7-es csúcsnak is pirosnak kell lennie, de a többi csúcs színét ez nem befolyásolja. Vagyis minden második csúcs lesz azonos színű. Ez onnan adódott, hogy az 1-ből kiindulva az $1, 1+4, 1+2\cdot 4, \ldots$ csúcsokba jutunk, pontosabban ezeknek a számoknak a 10-zel való osztási maradékait kell vennünk. Az 1-hez tehát hozzáadjuk a 4 többszöröseit és ebből levonjuk a 10 megfelelő többszöröseit: $1+4y-10z$. Mivel a $4y-10z$ alakú egészek éppen a 4 és 10 legnagyobb közös osztójának, a 2-nek a többszörösei, ezért az $1+2t$ számokhoz jutunk, így jöttek ki az 1, 3, 5, 7, 9 csúcsok.

Általában is ez a helyzet tetszőleges n és k esetén. Egy i csúcs ekkor a $360k/n$ fokos forgatás többszöri alkalmazásával az $i+k, i+2k, i+3k, \ldots$ csúcsokba kerül, pontosabban ezeknek a számoknak az n szerinti maradékát kell vennünk. Mivel az $yk-zn$ számok (ahol y és z végigfutnak az egészeken) megegyeznek a legnagyobb közös osztó (k,n) többszöröseivel, ezért az i csúcs képei éppen az $i+t(k,n)$ csúcsok lesznek (ahol t egész szám). Azok a színezések lesznek a fixalakzatok, ahol ezek a csúcsok mind azonos színűek. Ennek megfelelően (k,n) csúcsot tetszőlegesen színezhetünk, a többi színe viszont már egyértelmű. Tehát a $360k/n$ fokos forgatásnak $c^{(k,n)}$ fixalakzata van. A keresett színezések száma így

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c^{(k,n)}}{n}.$$

Ez egész szám, ami bizonyítja az oszthatóságot.

Megjegyzés. Kevésbé elegánsan, egy n szerinti elég bonyolult teljes indukcióval is bizonyíthatjuk az oszthatóságot. Itt az indukciós lépésnél minden $k<n$-re (és minden c-re) feltesszük az állítást, és abból bizonyítunk n-re. Ehhez n-et $n=p^k r$ alakban írjuk, ahol p prím és $(p,r)=1$, majd támaszkodunk arra, hogy az állítás igaz n/p-re, r-re, sőt további n-nél kisebb számokra is, ráadásul c helyett esetenként más c' egésszel.

Freud Róbert, Horváth Eszter