KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 9. szám Budapest, 2022. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Nyakláncok, lyukas négyzetek és oszthatóság

Ebben az írásban egy olyan módszert mutatunk be, amely számos leszámlálási feladatnál jól használható.

I. Nyakláncok

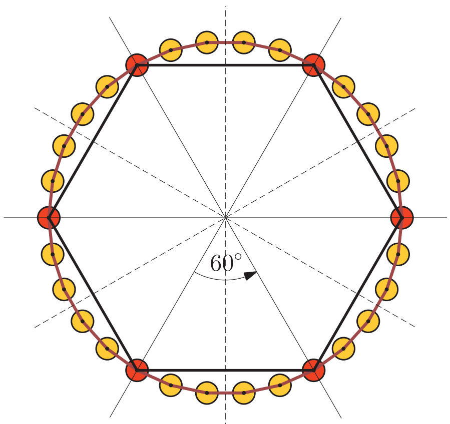
1. feladat. *Van* 30 *egyforma gyöngyünk,* 2 *piros, a többi sárga. Hányféle nyaklánc készíthető belőlük?*

Megoldás. A nyakláncot bárhogyan forgatva ugyanaz marad. Így csak az számít, hogy az egyik piroshoz milyen közel van a másik. A kettő közötti sárgák száma lehet $0, 1, \ldots, 14$, tehát 15-féle nyaklánc készíthető.

2. feladat. *Van* 30 *egyforma gyöngyünk,* 6 *piros, a többi sárga. Hányféle nyaklánc készíthető belőlük?*

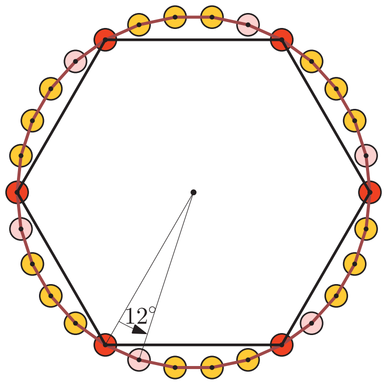
Ismerkedés a nehézségekkel. Erre az esetre reménytelen az előző módszert adaptálni (látni fogjuk, hogy a lehetséges nyakláncok száma 10 133).

Ha a szimmetriáktól eltekintenénk, akkor 24 sárga és 6 piros gyöngyöt kellene sorba raknunk, tehát a 30 helyből a 6 pirosnak a helyét kellene kiválasztanunk, ami $\binom{30}{6}$ lehetőség. Azonban azok a piros hatosok, amelyek egymásba a szimmetriák alapján átvihetők, ugyanazt a nyakláncot jelentik. Mik ezek a szimmetriák? A nyakláncot kifeszítve a gyöngyök egy szabályos 30-szög csúcsainak tekinthetők, és ha egy nyakláncot a sokszög középpontja körül $12k$ fokkal elforgatunk (ahol $1 \leqslant k \leqslant 30$), vagy a sokszög valamelyik szimmetriatengelyére tükrözünk, akkor ugyanaz a nyaklánc marad. Tehát egy piros hatosra ezen 60 darab egybevágóságot alkalmazva mindig ugyanazt a nyakláncot kapjuk. Első közelítésben azt gondolhatnánk, hogy akkor a piros hatosok 60-asával jelentik ugyanazt a nyakláncot, tehát a piros hatosok számát a transzformációk számával osztva $\binom{30}{6}/60$ adja a nyakláncok számát. Ez viszont nem is egész szám.



1. ábra

A problémát az okozza, hogy vannak olyan piros hatosok, amelyekre a 60 transzformációt alkalmazva nem kapunk 60 különböző piros hatost. Nézzünk például egy olyan esetet, amikor minden ötödik gyöngy piros (*1. ábra*). Azonnal látszik, hogy erre a 60 transzformációt alkalmazva összesen 5 különböző piros hatost kapunk. Vizsgáljuk meg ezt alaposabban, hogy jobban lássuk az összefüggéseket. A piros gyöngyök ekkor egy szabályos hatszög csúcsait alkotják. Így a nyakláncot $60j$ fokkal elforgatva (ahol $1 \leqslant j \leqslant 6$), vagy a hatszög bármelyik szimmetriatengelyére tükrözve az adott piros hatos önmagába megy át. Ezt röviden úgy fogjuk hívni, hogy ez a piros hatos ennek a 12 transzformációnak *fixalakzata.* Jelölje ezt a 12 transzformációt $\tau_1, \dots, \tau_{12}$, és legyen ϱ (mondjuk) a 12 fokkal történő elforgatás (*2. ábra*), ami tehát egy másik piros hatost eredményez (de ugyanazt a nyakláncot). Mely másik transzformációk viszik át ugyanide az eredeti piros hatost? Az összes $\rho\tau_i$ (előbb a τ_i, utána a ρ) megfelel, hiszen akkor először önmagába megy az eredeti piros hatos, majd elfordul 12 fokkal. És ez az összes! Ugyanis ha π is ugyanide viszi az eredeti piros hatost, akkor ezután a -12 fokos forgatást, azaz a ϱ inverzét, ϱ^{-1}-et alkalmazva visszakerülünk az eredeti piros hatosba. Ez azt jelenti, hogy $\varrho^{-1}\pi$-nek az eredeti piros hatos fixalakzata, vagyis $\varrho^{-1}\pi = \tau_i$, azaz $\pi = \varrho\tau_i$. Ebből következik, hogy minden pozícióba pontosan ugyanannyi transzformáció viszi az eredeti piros hatost. Ezért a létrejövő pozíciók számát úgy kapjuk meg, hogy az összes transzformáció számát elosztjuk azoknak a transzformációknak a számával, amelyeknek az adott piros hatos fixalakzata: $60/12 = 5$. Ez az észrevétel általánosan is érvényes. Ez azt mutatja, hogy a fixalakzatok száma fontos szerepet játszik a leszámlálásban.



2. ábra

Pályák. Legyen az x piros hatos $P = P_x$ *pályája* az összes olyan piros hatos, ahová a transzformációk x-et átviszik. Egy szabálytalan piros hatos pályája tipikusan 60 elemű. A minden ötödik gyöngy piros pályája 5 elemű. Az egy pályába tartozó piros hatosok jelentik ugyanazt a nyakláncot. Így a feladat a pályák számának a meghatározása.

Jelölje F_x azoknak a τ transzformációknak a halmazát, amelyeknek x fixalakzata, tehát amelyek x-et önmagába viszik. Ha x egy minden ötödik gyöngy piros típusú hatos, akkor F_x a szabályos hatszög 12 szimmetriájának megfelelő τ_i forgatásokat és tükrözéseket jelenti. Jelölje végül az összes transzformáció halmazát T, példánkban ez a szabályos 30-szög 60 szimmetriájából áll.

Az előző rész gondolatmenetéből általánosan is azt kapjuk, hogy egy x piros hatost a P_x pálya bármely y piros hatosába ugyanannyi transzformáció visz át, mint amennyi x-et helyben hagyja. Ebből az elemszámokra az következik, hogy $|T| = |P_x| \cdot |F_x|$.

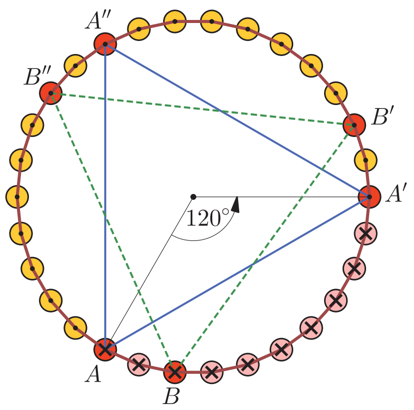
A feladat megoldásához az összes transzformációhoz tartozó összes fixalakzatot számoljuk össze, vagyis összegezzük minden transzformációra a fixalakzatok számát: $\sum\limits_{\tau \in T} \tau$ fixalakzatainak a száma. Ha ezt most a piros hatosok szerint számoljuk össze, akkor ugyanez az összeg $\sum\limits_{x} |F_x| = \sum\limits_{x} |T|/|P_x|$. Átosztva $|T|$-vel azt kapjuk, hogy a transzformációk fixalakzatainak átlagos száma éppen a piros hatosokhoz tartozó pályaméretek reciprokösszege $\sum\limits_x 1/|P_x|$. Mivel egy P pályában levő mind a $|P|$ darab y piros hatosra $P_y = P$, ezért egy adott P pálya hatosait tekintve a reciprokösszeg $|P| \cdot 1/|P| = 1$. Vagyis a teljes reciprokösszeg éppen a pályák keresett száma! Ezzel beláttuk:

Burnside-lemma. *A pályák száma egyenlő a transzformációk fixalakzatainak átlagos számával.*

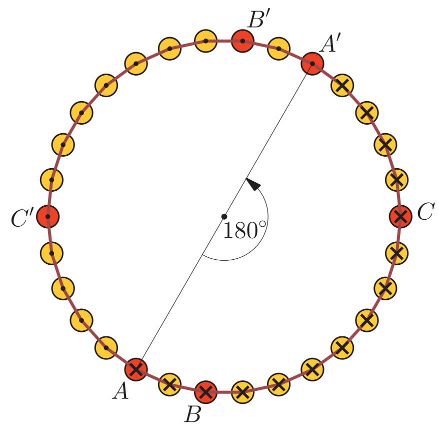
A 2. feladat megoldása előtt bemelegítésként oldjuk meg az 1. feladatot, tehát a 2 piros gyöngy esetét a Burnside-lemmával.

A szabályos 30-szög szimmetriái közül a helyben hagyás minden piros párt önmagába visz, tehát annak $\binom{30}{2}$ fixalakzata van. A forgatások közül egyedül a 180 fokos forgatásnak van fixalakzata, mégpedig az a 15 piros pár, amikor a 2 piros gyöngy között mindkét oldalon 14–14 sárga helyezkedik el. Ha a tükrözés tengelye két átellenes oldalfelező pontot összekötő egyenes, akkor az ennek egyik oldalán levő 15 gyöngyből bármelyik lehet piros, a másik piros pedig ennek a tengelyre vonatkozó tükörképe, tehát itt is 15 fixalakzat van. Ha a tükrözés tengelye két szemközti csúcsot összekötő átló, akkor vagy az átló két végpontja piros, vagy pedig az egyik oldalon levő 14 pont bármelyike és annak tükörképe lesz piros, tehát itt is 15 a fixalakzatok száma. Vagyis a fixalakzatok számának átlaga $\left(\binom{30}{2} + 31 \cdot 15\right)/60 = 15$.

Nézzük akkor ugyanezt a módszert a 6 piros gyöngy esetére. A helyben hagyásnak mind a $\binom{30}{6}$ piros hatos fixalakzata. A 60, illetve -60 fokos forgatás fixalakzatai a szabályos hatszögek (1. ábra), tehát 5–5 ilyen van. A ± 120 fokos forgatások fixalakzatai két szabályos háromszög egyesítései (*3. ábra*), azaz 10 (az ábrán **x**-szel jelölt) szomszédos pontból kiválasztunk 2-t, és ezek elforgatottjai adják a másik 4 pontot, tehát mindkét forgatásnak $\binom{10}{2}$ fixalakzata van. Ugyanígy adódik, hogy a 180 fokos forgatásnak $\binom{15}{3}$ fixalakzata van (*4. ábra*).

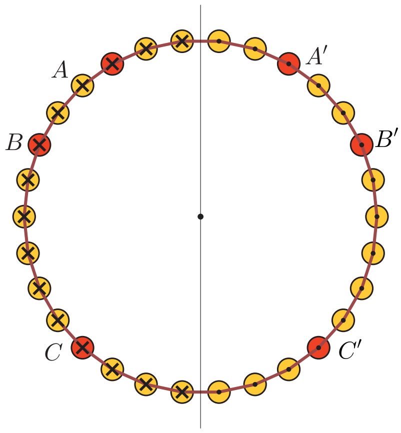


3. ábra

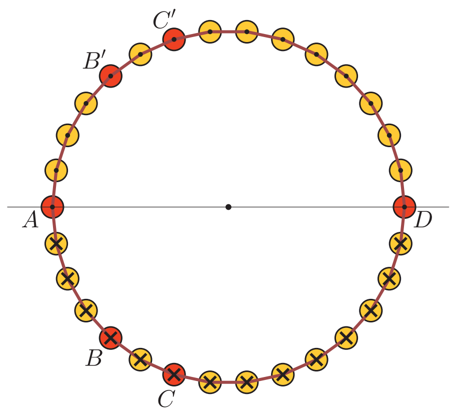


4. ábra

Ugyanez áll az oldalfelező szimmetriatengelyekre tükrözésnél: a tengely egyik oldalán levő 15 pontból 3 szabadon választható és ezek tükörképe a másik 3 pont (*5. ábra*). Az átló szimmetriatengelyeknél a tengelyen lehet 0 vagy 2 pont és a tengely egyik oldalán levő 14 pontból így 3 vagy 2 választható szabadon, ez $\binom{14}{3}+\binom{14}{2}=\binom{15}{3}$ fixalakzat (*6. ábra*).



5. ábra



6. ábra

A többi transzformációnak nincs fixalakzata. Így a pályák száma

$$\frac{\binom{30}{6}+2\cdot 5+2\binom{10}{2}+31\binom{15}{3}}{60}=10\,133.$$

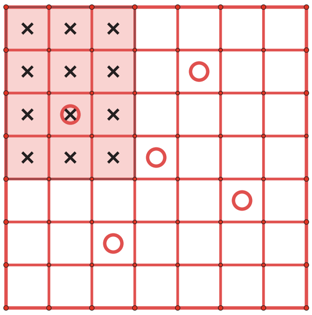
II. Lyukas négyzetek

Ebben a részben nem lesz újdonság, csak egy másik feladatra alkalmazzuk a tanult módszert.

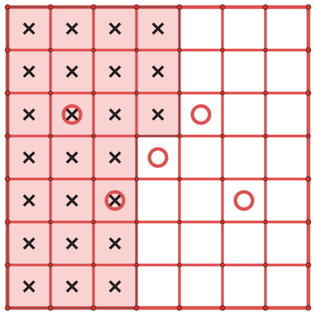
3. feladat. *Vagabundus Modernissimus, a kiváló képzőművész legújabb műalkotása egy kézben vihető* 70×70 *centiméteres vékony vaslemez, amelynek mindkét egyformán piros oldala* 49 *egybevágó kis négyzetre van osztva, és ezek közül* 5 *kis négyzet középen át van lyukasztva. Hányféle lehetősége volt a zseninek ily módon kifejeznie korszakalkotó kreativitását?*

Megoldás. Itt a lyukas négyzetötösök száma a kérdés, de a nagy négyzet szimmetriáival egymásba vihető ötösök ugyanazt a művet jelentik. A 8 transzformáció tehát a 4 darab $90k$ fokos forgatás ($1\leqslant k\leqslant 4$) és a 4 szimmetriatengelyre vonatkozó tükrözés. A pályák számát keressük, ez a Burnside-lemma szerint a fixalakzat ötösök átlagos száma.

A helyben hagyásnak mind a $\binom{49}{5}$ ötös fixalakzata. A ± 90 fokos forgatásnál a fixalakzatban a középső kis négyzet mindenképpen benne van, egy másik az egyik saroknál levő 3×4-es téglalapból szabadon választható, a maradék három pedig ennek a 90, 180 és 270 fokos elforgatottja, tehát 12 fixalakzat van (*7. ábra*). Hasonló a helyzet a 180 fokos forgatásnál: a középső négyzet kötelezően benne van a fixalakzatban, a középpontra szimmetrikus 24 négyzetpár közül pedig kettőt kell teljesen kiválasztani, a fixalakzatok száma így $\binom{24}{2}$ (*8. ábra*).



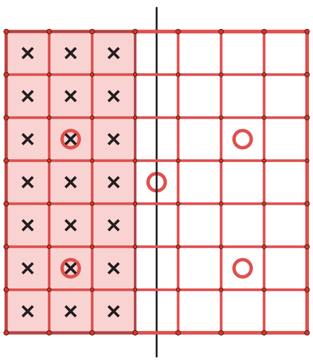
7. ábra



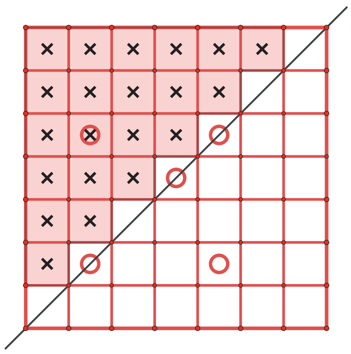
8. ábra

Egy tükrözésnél egy ötös akkor fixalakzat, ha a tengelyen választunk 1, 3 vagy 5 négyzetet, és hozzá ennek megfelelően 2, 1 vagy 0 a tengelyre szimmetrikus négyzetpárt, ilyen ötösből tehát $7\binom{21}{2}+\binom{7}{3}\cdot 21+\binom{7}{5}$ van (*9.* és *10. ábra*). A pályák száma, azaz a fixalakzatok átlagos száma így

$$\frac{\binom{49}{5}+2\cdot 12+\binom{24}{2}+4\cdot\left(7\cdot\binom{21}{2}+\binom{7}{3}\cdot 21+\binom{7}{5}\right)}{8}=239\,511.$$



9. ábra



10. ábra

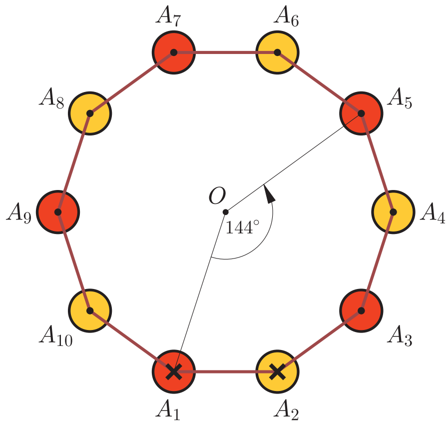
III. Egy oszthatósági feladat

4. feladat. *Lássuk be, hogy bármely c és n pozitív egészre $c^{(1,n)}+c^{(2,n)}+\ldots+c^{(n,n)}$ osztható n-nel.*

Megjegyzés. Ha $n=p=$ prím, akkor az összeg $(p-1)c+c^p=c^p-c+pc$, tehát kapjuk, hogy c^p-c osztható p-vel, ami a kis Fermat-tétel.

Bizonyítás. Tekintsük a következő problémát. Egy szabályos n-szög csúcsait c színnel tetszőlegesen kiszínezzük. Hányféle színezés adódik, ha az egymásba forgatással átvihető színezések között nem teszünk különbséget?

Itt n transzformációnk van, a $360k/n$ fokos forgatások a középpont körül (ahol $1 \leqslant k \leqslant n$), és a pályák száma a kérdés. A Burnside-lemma alkalmazásához megszámoljuk a $360k/n$ fokos forgatás fixalakzatait. Legyen például $n = 10$ és $k = 4$, azaz a transzformáció a 144 fokos forgatás (*11. ábra*). Ez minden csúcsot a tőle a forgatás irányába eső negyedik csúcsba visz. Ha például az 1-es csúcs piros, akkor ennek alapján az 5-ös, 9-es, 3-as és 7-es csúcsnak is pirosnak kell lennie, de a többi csúcs színét ez nem befolyásolja. Vagyis minden második csúcs lesz azonos színű. Ez onnan adódott, hogy az 1-ből kiindulva az $1, 1+4, 1+2\cdot 4, \ldots$ csúcsokba jutunk, pontosabban ezeknek a számoknak a 10-zel való osztási maradékait kell vennünk. Az 1-hez tehát hozzáadjuk a 4 többszöröseit és ebből levonjuk a 10 megfelelő többszöröseit: $1 + 4y - 10z$. Mivel a $4y - 10z$ alakú egészek éppen a 4 és 10 legnagyobb közös osztójának, a 2-nek a többszörösei, ezért az $1 + 2t$ számokhoz jutunk, így jöttek ki az 1, 3, 5, 7, 9 csúcsok.



11. ábra

Általában is ez a helyzet tetszőleges n és k esetén. Egy i csúcs ekkor a $360k/n$ fokos forgatás többszöri alkalmazásával az $i+k, i+2k, i+3k, \ldots$ csúcsokba kerül, pontosabban ezeknek a számoknak az n szerinti maradékát kell vennünk. Mivel az $yk - zn$ számok (ahol y és z végigfutnak az egészeken) megegyeznek a legnagyobb közös osztó (k,n) többszöröseivel, ezért az i csúcs képei éppen az $i + t(k,n)$ csúcsok lesznek (ahol t egész szám). Azok a színezések lesznek a fixalakzatok, ahol ezek a csúcsok mind azonos színűek. Ennek megfelelően (k,n) csúcsot tetszőlegesen színezhetünk, a többi színe viszont már egyértelmű. Tehát a $360k/n$ fokos forgatásnak $c^{(k,n)}$ fixalakzata van. A keresett színezések száma így

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} c^{(k,n)}}{n}.$$

Ez egész szám, ami bizonyítja az oszthatóságot.

Megjegyzés. Kevésbé elegánsan, egy n szerinti elég bonyolult teljes indukcióval is bizonyíthatjuk az oszthatóságot. Itt az indukciós lépésnél minden $k < n$-re (és minden c-re) feltesszük az állítást, és abból bizonyítunk n-re. Ehhez n-et $n = p^k r$ alakban írjuk, ahol p prím és $(p,r) = 1$, majd támaszkodunk arra, hogy az állítás igaz n/p-re, r-re, sőt további n-nél kisebb számokra is, ráadásul c helyett esetenként más c' egésszel.

Freud Róbert, Horváth Eszter

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Az a_n számtani sorozat különbsége 4, az első hét tagjának összege 105. Adjuk meg a sorozat első tagját. (*3 pont*)

b) A b_n mértani sorozat hányadosa 4, az első hét tagjának összege 16 383. Adjuk meg a sorozat első tagját. (*3 pont*)

c) A c_n sorozat minden tagja az n elsőfokú függvénye. A sorozat második tagja 7, a hetedik tagja 27. Adjuk meg a sorozat első tagját. (*5 pont*)

2. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$5^{-x+1} - 10 \cdot 5^{-x-1} + 6 \cdot 5^{-x-2} = 16{,}2. \qquad (6\ pont)$$

b) Igazoljuk, hogy

$$\lg 3^{2x} \cdot \lg 7^{2x} \leqslant \left(\lg 3^x + \lg 7^x\right)^2$$

minden valós x esetén fennáll. (*7 pont*)

3. Egy üzemben 5 milliméter vastagságú, 80 centiméter oldalhosszúságú négyzet alakú acéllapokból a lehető legnagyobb, szabályos tizenkétszögeket vágnak ki úgy, hogy a tizenkétszögek két-két oldala illeszkedjen a négyzetlapok oldalára. Tudjuk, hogy az acél sűrűsége $7{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

a) Mekkora lesz 75 darab legyártott tizenkétszög tömege? (*7 pont*)

A szabályos tizenkétszög csúcsait megszámozzuk sorban 1-től 12-ig. A sorszámozott csúcsok közül bármelyik három egy-egy háromszöget alkot.

b) Adjuk meg az így kapott derékszögű és nem derékszögű háromszögek számát. (*6 pont*)

4. Magyarországon 2022-ig a gépkocsik (nem egyedi) rendszáma három betűből és három számjegyből állt. Az ábécé 26 betűje használható ezekben a rendszámokban.

a) Hány autó kaphat ilyen módon rendszámot? (*4 pont*)

b) Hány olyan rendszám lehet, amelyikben kétféle betű, és kétféle számjegy szerepel? (*5 pont*)

c) Az elképzelhető összes rendszámból véletlenszerűen választunk egy darabot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy három különböző betűből és három különböző számjegyből áll ez a rendszám? (*5 pont*)

II. rész

5. Adott a következő két függvény:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=-x-1,\quad \text{és}\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad g(x)=-x^2-10x-19.$$

a) Oldjuk meg az $f(x)=g(x)$ egyenletet a valós számok halmazán. (*3 pont*)

b) Írjuk fel az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y=g(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét. (*7 pont*)

c) Számítsuk ki az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ egyenletű alakzatok által közbezárt síkidom területét. (*6 pont*)

6. Egy 600 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú parkot futópálya határol. A park egyik csúcsától indítja András, az edző a két futóatlétáját, akik egyszerre indulnak, de más irányban. András helyben marad, Lali 9 km/h, Máté 8 km/h egyenletes sebességgel fut az edzésen. 6 perc elteltével a három szereplő az ALM háromszög csúcsaiban van, ahol a háromszög csúcsait a szereplők nevének a kezdőbetűjével jelöltük.

a) Milyen messze van ekkor Andrástól Lali és Máté? (*4 pont*)

b) Milyen messze van ekkor egymástól a két futó? (*2 pont*)

c) Igazoljuk, hogy ekkor András pontosan 45°-os szögben látja az LM szakaszt. (*5 pont*)

d) A parkban az L és M között van egy egyenes sétaút is. Milyen messze van András ettől az úttól? (*5 pont*)

7. Boglárka érdekes számhármasokat gyűjtött, és a következőket állapította meg:

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$5^2+12^2=13^2,$$
$$7^2+24^2=25^2,$$
$$9^2+40^2=41^2.$$

a) Béla meglátta Boglárka egyenleteit és elgondolkodott azon, hogy lehet-e egy ilyen tulajdonságú számhármas legkisebb eleme a 2023. Segítsünk Bélának, határozzuk meg $k\in\mathbb{Z}$ értékét, ha $2023^2+k^2=(k+1)^2$. (*4 pont*)

b) Bálint azt állítja, hogy a végtelenségig folytatható az egyenlőségek sorozata, azaz minden $2n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ alakú páratlan szám négyzetéhez hozzáadva a $2n(n+1)$ négyzetét, éppen a következő négyzetszámot kapjuk. Igazoljuk Bálint állítását. (*6 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+4^{2023}+5^{2023}$ osztható 5-tel. (*6 pont*)

8. Egy vállalkozás olyan négyzet alapú egyenes gúlákat rendel reklámajándéktárgyként, amelyeknek az oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be, és az alapéleinek a hossza 12 centiméter. A négy kiemelkedő termékük reklámját szeretnék elhelyezni a gúla egy-egy oldallapján.

a) Határozzuk meg mekkora területű részre kell megtervezni egy termék reklámját. (*3 pont*)

b) Mekkora a gúla térfogata? (*3 pont*)

c) Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal? (*4 pont*)

d) A gúla alakú dobozok belsejében egy-egy (gömb alakú) ajándék labdát is elhelyeznek, amelyek mind a négy oldallapot és az alaplapot is érintik. Mekkora a labda sugara? (*6 pont*)

9. *a*) Egy matematikatanár tanít a 12. A és a 12. B osztályban is. Íratott egy közös dolgozatot, amelyben 120 pont volt az elérhető legmagasabb pontszám. Az A osztályban 84 pont, a B osztályban 74 pont lett az átlag. Az A osztályos fiúk átlagosan 81, a B osztályos fiúk pedig 71 pontot értek el. Az A osztályban a lányok átlagosan 90, míg a B osztályban a lányok átlagosan 76 pontos dolgozatot írtak. Tudjuk továbbá, hogy az összes fiú átlaga 79 pont lett. Mennyi a két osztályban az összes lány átlagpontszáma?

(*8 pont*)

b) Az A osztályban tanuló Andrásnak hat jegye van matematikából, és a hat jegynek a mediánja 4. Mit mondhatunk a B osztályban tanuló Benedek matematikajegyeinek mediánjáról, ha hat jegye pontosan megegyezik András jegyeivel, de neki van még ezen túl egy hetedik jegye, amely 5-ös? (*4 pont*)

c) Három barátnő, Anna, Bea és Cili matematikából, fizikából és kémiából elért félévi eredményeiket vizsgálta.

I. Kiszámolták mindegyiküknek az átlagát, majd ezeknek az átlagoknak vették az átlagát.

II. Kiszámolták a három tantárgy átlagát, majd ezen átlagok átlagát vették.

Mutassuk meg, hogy a kétféle módon kapott átlag egyenlő egymással. (*4 pont*)

Kozma Katalin Abigél, Győr
Számadó László, Budapest

Megoldásvázlatok a 2022/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $2\cdot\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x+2\cdot\sin x=0$ *egyenletet a valós számok halmazán.* (*5 pont*) *b) Melyek azok a valós számok, amelyek eleget tesznek az* $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$ *és a*

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenségnek egyaránt? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítést használva a következő másodfokú egyenlethez jutunk: $-1 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x + 3 = 0$. Ennek egyik gyöke $\sin x = 3$, aminek nincs valós megoldása az $f(x) = \sin x$ függvény értékkészlete miatt. A másodfokú egyenlet másik gyöke $\sin x = -1$, amiből $x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

b) A másodfokú kifejezés zérushelyei -1 és 5. A megfelelő függvény felfele nyíló parabola, amelynek helyettesítési értékei a két zérushely között negatívak, ezért az egyenlőtlenség megoldása $x \in [-1; 5]$.

A trigonometrikus egyenlőtlenség megoldása:

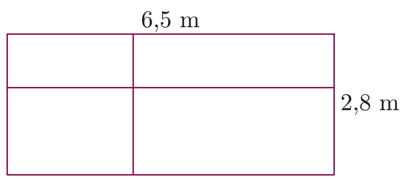
$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi.$$

Ezt rendezve:

$$-\frac{\pi}{6} + k \cdot 4\pi < x < \frac{17\pi}{6} + k \cdot 4\pi.$$

Ez $k = 0$ esetén a $\left]-\frac{\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right[$ intervallumot adja. Mindkét egyenlőtlenségnek a $\left]-\frac{\pi}{6}; 5\right]$ intervallum elemei tesznek eleget.

2. *Egy adott hosszúságú szakaszt az* aranymetszés *szerint úgy osztunk két részre, hogy az eredeti és a keletkezett hosszabb szakasz hosszának aránya megegyezik a keletkezett hosszabb és a keletkezett rövidebb szakasz hosszának arányával. Bence szobája egyik falának hossza* 6,5 *méter, magassága* 2,8 *méter. Ezt a falfelületet Bence úgy szeretné lefesteni, hogy függőlegesen és vízszintesen is az aranymetszésnek megfelelően osztja fel* 4 *téglalap alakú részre úgy, hogy a bal felső sarok felé legyenek a rövidebb szakaszok.*



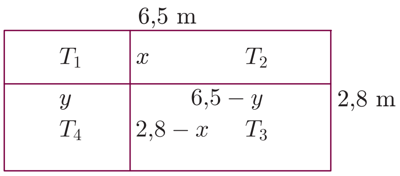
Bence fala

a) Határozzuk meg az egyes téglalapok területét. A számolás során az oldalak hosszát és a területeket is pontosan 3 *tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (*8 pont*)

b) Bencének otthon 4*-féle színű falfestéke van, ezekből válogat a fal festése során. Hány különböző színezés lehetséges, ha az oldallal egymáshoz illeszkedő téglalapoknak különböző színűeknek kell lenniük?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A fal 2,8 méteres magasságának aranymetszés szerinti felosztása:

$$\frac{2{,}8}{2{,}8-x}=\frac{2{,}8-x}{x}.$$



Rendezve az $x^2-8{,}4x+7{,}84=0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A feladatnak megfelelő megoldás három tizedesjegyre kerekítve 1,070. Ezért a keletkezett téglalapok függőleges oldalainak hossza 1,070 m és 1,730 m.

A fal 6,5 m-es vízszintes hosszúságát tekintve az aranymetszéssel való felosztás:

$$\frac{6{,}5}{6{,}5-y}=\frac{6{,}5-y}{y}.$$

Rendezve az $y^2-19{,}5y+42{,}25=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A feladatnak megfelelő megoldás három tizedesjegyre kerekítve 2,483. Ezért a keletkezett téglalapok vízszintes oldalainak hossza 2,483 m és 4,017 m.

A téglalapok területeinek nagysága:

$$T_1=2{,}657\ \mathrm{m}^2,\quad T_2=4{,}298\ \mathrm{m}^2,\quad T_3=6{,}949\ \mathrm{m}^2\quad \text{és}\quad T_4=4{,}296\ \mathrm{m}^2.$$

c) A fal kétféle színnel 12 különböző módon színezhető, hiszen ki kell választanunk a 4-féle színből azt a kettőt, amelyeket a festésnél felhasználunk. Ezt $\binom{4}{2}=6$-féleképpen tehetjük meg. Majd a bal felső sarokban lévő téglalap színét kiválaszjuk (2 lehetőség), míg a többi téglalap színe már egyértelmű lesz. $\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1=12$. Háromféle színnel történő festés esetén $\binom{4}{3}\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1=48$ az esetek száma. Négyféle színre $4!=24$ különböző festést választhat Bence, ezért összesen $12+48+24=84$ a lehetőségek száma.

3. *A légköri nyomás függ a tengerszinten mérhető nyomás értékétől* (p_0)*, a tengerszint feletti méterben mért magasságtól* (h) *és a levegő Celsius-skálán mért hőmérsékletétől* (T)*. A hozzárendelés szabálya:*

$$p=p_0\cdot e^{-0{,}0342\cdot\frac{h}{T+273}}.$$

a) *Mekkora a nyomás Bolívia fővárosában, La Pazban* 3 600 *méter magasságban, ha a tengerszinten* 101 500 Pa *a nyomás* 20 °C*-on?* (*2 pont*)

b) *A Kékestetőn* 1 014 *méter magasságban hány* %*-os nyomásváltozás észlelhető, ha a hőmérséklet* 8 °C*-ról* 22 °C*-ra emelkedik?* (*3 pont*)

c) *Milyen magasságban mérhető feleakkora nyomás, mint a tengerszinten, amikor a levegő hőmérséklete* 24 °C? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A megfelelő értékek behelyettesítése után

$$p=101\,500\cdot e^{-0{,}0342\cdot\frac{3600}{20+273}}=66\,676{,}6\approx 66\,680\ \mathrm{Pa}$$

a légköri nyomás La Pazban.

b) A Kékestetőn 8°C-on a nyomás értéke $p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{1014}{8+273}} = p_0 \cdot 0{,}8839$, 22°C-on pedig $p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{1014}{22+273}} = p_0 \cdot 0{,}8891$. Mivel

$$0{,}8891 - 0{,}8839 = 0{,}0052 \quad \text{és} \quad \frac{0{,}0052}{0{,}8839} = 0{,}0059,$$

azért 0,59%-os növekedés tapasztalható a légköri nyomásban.

c) Megoldandó a

$$0{,}5 \cdot p_0 = p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{h}{24+273}}$$

egyenlet. Oszthatunk a p_0 tengerszinten mérhető nyomással, majd vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát (ln). Így

$$\ln 0{,}5 = -0{,}0342 \cdot \frac{h}{297}.$$

Rendezés után $h = 6\,019{,}4$ tehát körülbelül 6 020 m magasságban lesz a nyomás fele a tengerszinten mérhetőnek.

4. *Az* **AB0** *vércsoportrendszerben az emberek négy alapvető fenotípusba sorolhatók. A magyarországi populációt figyelembe véve az* **A** *vércsoportúak a népesség 44%-át teszik ki, a* **0** *vércsoportúak 40%-ot. A* **B** *vércsoportúak aránya 11%, míg az* **AB** *vércsoportúak mindössze 5%-ot adnak. Ettől a csoportosítástól függetlenül a vörösvértestek felszínén található* D *antigén megléte esetén* Rh^+ *vércsoportról beszélünk, a* D *antigén hiánya esetén* Rh^- *a vércsoport, ahová az emberek 15%-a tartozik.*

a) Igazoljuk Réka állítását, aki azt mondja, hogy a Magyarországon élő 9,7 millió lakosból mindössze körülbelül 72 750 ember tartozik a legritkább **AB** Rh^- *vércsoportba.* (*2 pont*)

b) Csengéről tudjuk, hogy van D *antigén a vérében. Mekkora valószínűséggel* **B** *vércsoportú Csenge? Válaszunkat indokoljuk.* (*2 pont*)

c) Készítsünk kördiagramot a szükséges középponti szögek meghatározása után, amely mutatja a magyar embereket vércsoportjuk alapján, figyelembe véve mind az **AB0** *rendszert, mind a* D *antigén meglétét.* (*5 pont*)

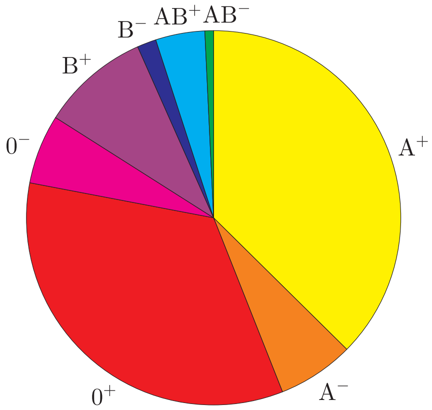
d) Egy véradásról szóló teltházas előadáson a 150 fős teremben férfiak, nők és gyerekek ülnek. Ha a teremből kimenne 2 férfi, akkor az ott maradó férfiak és nők aránya 2 : 3 lenne. Ha a terembe bejönne még 2 gyerek, akkor a nők pontosan háromszor annyian lennének, mint a gyerekek. Hány nő vett részt ezen az előadáson? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az **AB0** vércsoportrendszer és a D antigén megléte egymástól független, így az **AB** Rh^- vércsoportba tartozó emberek száma Magyarországon $9\,700\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}15 = 72\,750$.

b) Az **AB0** vércsoportrendszer és a D antigén megléte egymástól független, ezért Csenge 0,11 valószínűséggel **B** vércsoportú.

c) Az **AB0** rendszert, valamint a D antigén meglétét figyelembe véve a keresett valószínűségek és középponti szögek, illetve a kördiagram:

A	Rh^+	0,3740	134,64°
A	Rh^-	0,0660	23,76°
0	Rh^+	0,3400	122,40°
0	Rh^-	0,0600	21,60°
B	Rh^+	0,0935	33,66°
B	Rh^-	0,0165	5,94°
AB	Rh^+	0,0425	15,30°
AB	Rh^-	0,0075	2,70°



d) Jelölje a teremben lévő férfiak számát f, nők számát n, a gyerekek számát pedig g. A feladat szövege alapján a következő egyenletek írhatóak fel:

$$f+n+g=150, \quad \frac{f-2}{n}=\frac{2}{3}, \quad 3(g+2)=n.$$

A második egyenletből kifejezzük a férfiak számát: $f=\frac{2}{3}n+2$. A harmadik egyenletből kifejezzük a gyerekek számát: $g=\frac{1}{3}n-2$. Ezeket behelyettesítjük az első egyenletbe, és rendezzük. Az eredmény $n=75$, tehát az előadáson 75 nő vett részt.

Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről. A férfiak száma 52 volt a teremben. Ha ketten elmennek, valóban $2:3$ lesz a férfiak és nők aránya. Ha a teremben lévő 23 gyerekhez még ketten bejönnek, akkor a nők tényleg háromszor annyian lesznek.

II. rész

5. *a*) *Elkezdtük összeadni a 7-tel osztva 5 maradékot adó pozitív egész számokat a legkisebb ilyen tulajdonságú számtól kezdve. Hány tagot adtunk össze, és mi az utolsó szám, ha a kapott összeg 54 875?* (*4 pont*)

b) *Egy mértani sorozat hatodik és nyolcadik tagja egyaránt 6. Számítsuk ki a sorozat első 35 tagjának összegét.* (*4 pont*)

c) *Egy számtani sorozat három egymást követő elemének összege 72. Ha az első számból elveszünk 4-et, a középsőt változatlanul hagyjuk, az utolsóhoz pedig hozzáadunk 16-ot, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az összeg tagjai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja $a_1=5$, differenciája $d=7$. A számtani sorozat összegképletébe behelyettesítve az ismert értékeket:

$$\frac{n\cdot\left[2\cdot 5+(n-1)\cdot 7\right]}{2}=54\,875.$$

Rendezzük az egyenletet: $7n^2 + 3n - 109\,750 = 0$. Ennek pozitív egész megoldása $n = 125$. Tehát 125 tagot adtunk össze. Az utolsó szám a sorozat 125. eleme: $a_{125} = 5 + 124 \cdot 7 = 873$.

b) Az adott mértani sorozat esetén $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 6$ és $a_8 = a_1 \cdot q^7 = 6$. A két egyenlet hányadosát vesszük, így $q^2 = 1$, amiből $q = \pm 1$.

Ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja $a_i = 6$, az első 35 tag összege $S_{35} = 35 \cdot 6 = 210$.

Ha $q = -1$, akkor a sorozat első tagja $a_1 = -6$, az első 35 tag összege

$$S_{35} = (-6) \cdot \frac{(-1)^{35} - 1}{(-1) - 1} = -6.$$

c) Jelölje a számtani sorozat középső tagját a, differenciáját d. Ekkor a sorozatok három egymást követő tagja:

számtani sorozat:	$a - d$,	a,	$a + d$;
mértani sorozat:	$a - d - 4$,	a,	$a + d + 16$.

A számtani sorozat tagjainak összege 72. Tehát $(a - d) + a + (a + d) = 72$, amiből $a = 24$. Ezt felhasználva a mértani sorozat egymást követő tagjai:

$$20 - d, \quad 24 \quad \text{és} \quad 40 + d.$$

Felhasználjuk, hogy a mértani sorozat egymást követő tagjai esetén a középső tag négyzete megegyezik a két szélső tag szorzatával:

$$(20 - d)(40 + d) = 24^2.$$

A zárójelek felbontása után $d^2 + 20d - 224 = 0$. Az egyenlet két megoldása $d = 8$, illetve $d = -28$. Az első esetben a mértani sorozat tagjai 12, 24 és 48, hányadosa $q = 2$. A második esetben a mértani sorozat tagjai 48, 24 és 12, hányadosa pedig $q = \frac{1}{2}$.

6. *Tekintsük az $f(x) = \frac{4x-14}{x-2}$ függvényt.*

a) *Adjunk meg egy olyan egész számot, amelyre az $f(x)$ függvény helyettesítési értéke is egész szám.* (*2 pont*)

b) *Bizonyítsuk be, hogy pontosan* 8 *darab rácsponton halad át az $f(x)$ függvény képe a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben.* (*8 pont*)

c) *Oldjuk meg a $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x-3}$ egyenletet a valós számok halmazán.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Például $x = 1$ esetén $f(1) = 10$. (A *b*) feladatrész megoldásánál látható táblázatban szerepel a 8 db lehetséges érték.)

b) Végezzük el az egészrész leválasztást:

$$f(x) = \frac{4x - 14}{x - 2} = \frac{4(x - 2) - 6}{x - 2} = 4 - \frac{6}{x - 2}.$$

A függvény helyettesítési értékei akkor lesznek egészek, ha a $\frac{6}{x-2}$ tört értéke egész. A nevező értéke -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3 és 6 lehet. Tehát a függvény valóban 8 db rácsponton halad át.

$x-2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-4	-1	0	1	3	4	5	8
$y=f(x)$	5	6	7	10	-2	1	2	3

c) Négyzetre emelés után a $\frac{4x-14}{x-2}=x-3$ egyenlethez jutunk. Szorozzunk be a nevezővel, majd bontsunk zárójelet. Rendezés után $x^2-9x+20=0$. A másodfokú egyenlet két megoldása $x_1=4$, illetve $x_2=5$.

Az egyenlet ellenőrzéséről ne feledkezzünk meg, hiszen nem vizsgáltuk az értelmezési tartományt, és a négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás. Mindkét megoldás kielégíti az eredeti egyenletet.

7. *Egy konyhai műanyag tölcsér alsó része henger alakú, belső átmérője* 18 *milliméter, magassága* 5 *centiméter. Felső része a hengerre pontosan illeszkedő csonkakúp, amelynek felső átmérője* 7 *centiméter, illetve magassága* 4 *centiméter.*

a) *A tölcsér alját befogjuk, és teljes magasságának* 90%*-áig megtöltjük vízzel. Hány deciliter víz lesz a tölcsérben?* (*6 pont*)

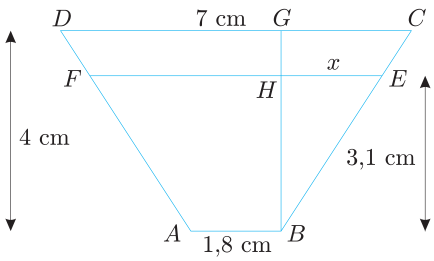
b) *Mekkora egy tölcsér tömege, ha a falvastagsága mindenhol* 1 *milliméter, a műanyag sűrűsége* $0{,}92\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$*? A műanyag térfogatának kiszámításához használjuk azt a közelítést, amely szerint a tölcsér belső felszínét szorozzuk a falvastagsággal.* (*4 pont*)

c) *Lézerfénnyel felülről függőlegesen belevilágítunk a tölcsérbe. Mekkora a valószínűsége, hogy a lézerfény a tölcsér alsó nyílásán jön ki?* (*3 pont*)

d) 50 *darab tölcsérből átlagosan* 2 *anyaghibását készít a gyártósor. Mekkora a valószínűsége, hogy* 135 *darab elkészített tölcsér között van anyaghibás? A választ négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Vezessük be a következő jelöléseket: az alsó, henger alakú rész sugara $r=0{,}9$ cm, magassága $m=5$ cm. A felső, csonkakúp alakú rész fedőkörének sugara $R=3{,}5$ cm, magassága $M_1=4$ cm. A teljes tölcsér magassága $M_{\text{teljes}}=$ $=M_1+m=9$ cm, vízzel töltve 90%-áig, tehát 8,1 cm-ig van.

Az alsó henger tele van vízzel, ennek térfogata $V_h=r^2\pi\cdot m=0{,}9^2\cdot\pi\cdot 5=$ $=12{,}72\ \mathrm{cm}^3$. A csonkakúp $M_2=8{,}1-5=3{,}1$ cm-es magasságig van töltve, ennek keresztmetszete:



$CG=\frac{7-1{,}8}{2}=2{,}6$ cm. A $BCG\triangle\sim BEH\triangle$, mert a megfelelő szögek nagysága egyenlő. Írjuk fel a háromszögek megfelelő oldalainak arányát:

$$\frac{CG}{GB}=\frac{EH}{HB},\qquad \frac{2{,}6}{4}=\frac{x}{3{,}1},$$

ebből $x=2{,}015$ cm. Ezzel $FE=2\cdot 2{,}015+1{,}8=5{,}83$ cm, a víz felszínének sugara $R_2=\frac{FE}{2}=2{,}915$ cm. A csonkakúp alakú részben lévő víz térfogata:

$$V_{\text{csk}}=\frac{M_2\cdot\pi}{3}\big(R_2^2+R_2r+r^2\big)=\frac{3{,}1\cdot\pi}{3}\big(2{,}915^2+2{,}915\cdot 0{,}9+0{,}9^2\big)=38{,}73\ \text{cm}^3.$$

Így a beletöltött víz teljes térfogata $12{,}72+38{,}73=51{,}45\ \text{cm}^3$, ami kerekítve 0,51 dl.

b) A henger belső felszínének (palástjának) nagysága

$$A_h=2r\pi m=2\cdot 0{,}9\cdot\pi\cdot 5=28{,}27\ \text{cm}^2.$$

A csonkakúp belső felszínéhez is csak a palástjának területét kell kiszámítani. Ehhez szükségünk van a csonkakúp alkotójának, a BC szakasz hosszának kiszámítására. Írjunk fel Pitagorasz-tételt a BCG háromszögben: $BC^2=2{,}6^2+4^2$. Ebből $a=BC=4{,}77$ cm.

$$A_{\text{csk}}=(R+r)a\pi=(3{,}5+0{,}9)\cdot 4{,}77\cdot\pi=65{,}94\ \text{cm}^2.$$

A teljes belső felszín $94{,}21\ \text{cm}^2$. A műanyag térfogata a felszín és az anyagvastagság (1 mm = 0,1 cm) szorzata: $9{,}421\ \text{cm}^3$. A műanyag tömege a térfogatának és a sűrűségének összeszorzásával számítható ki, ezért egy tölcsér 8,67 gramm.

c) A keresett valószínűséget a tölcsér felső körének területe (T), és alsó nyílásának területe (t) meghatározása után tudjuk megadni geometriai valószínűségi modell alapján.

$$T=3{,}5^2\pi=\frac{49}{4}\pi,\quad t=0{,}9^2\pi=\frac{81}{100}\pi.$$

Így $p=\frac{t}{T}=\frac{81}{1225}$ annak valószínűsége, hogy a tölcsér alján jön ki a lézerfény.

d) Annak a valószínűsége, hogy egy tölcsér anyaghibás $p=\frac{2}{50}=0{,}04$; annak, hogy jó $(1-p)=0{,}96$. Először számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy az összes elkészített tölcsér hibátlan. Ez 135 hibátlan terméket jelent, ezért ennek valószínűsége $0{,}96^{135}$. A komplementer esemény jelenti azt, hogy van a tölcsérek között anyaghibás. Négy tizedesjegyre kerekítve $P(A)=1-0{,}96^{135}=0{,}9960$.

8. *a*) *Sheldon Cooper kedvenc száma a* 73, *mert ez a* 21. *prím és* $7\cdot 3$ *éppen* 21. *Sőt, a* 73 *kettes számrendszerbeli alakja palindromszám, vagyis visszafelé olvasva az eredetivel azonos. Igazoljuk ez utóbbi kijelentést.* (*2 pont*)

b) *Egy adott alapú, és az ennél* 2*-vel nagyobb alapú számrendszerben tekintsük a* $\overline{345}$ *alakú háromjegyű számokat, ezek összege* 696_{10}. *Adjuk meg az összeadandó számok értékét a* 10*-es számrendszerben felírva.* (*8 pont*)

c) *Véletlenszerűen kiválasztunk egy* 10*-es számrendszerbeli háromjegyű számot. Mekkora a valószínűsége, hogy a szám 9-es számrendszerbeli alakja is háromjegyű?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A 73 kettes számrendszerbeli alakja 1001001_2, mert

helyiértékek	64	32	16	8	4	2	1
alaki értékek	1	0	0	1	0	0	1

Ez a szám visszafelé olvasva valóban az eredetivel azonos.

b) A k alapú számrendszerben a háromjegyű számok számjegyeihez tartozó helyiértékek rendre k^2, k és 1. Így a $\overline{345}$ alakú háromjegyű szám 10-es számrendszerbeli értéke $3 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 5$. A 2-vel nagyobb alapú számrendszerben a helyiértékek hasonlóan $(k+2)^2$; $(k+2)$ és 1, így a $\overline{345}$ alakú háromjegyű szám 10-es számrendszerbeli értéke $3 \cdot (k+2)^2 + 4 \cdot (k+2) + 5$. Ezek összege ad 696-ot. Írjuk fel a megfelelő egyenletet:

$$3 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 5 + 3 \cdot (k+2)^2 + 4 \cdot (k+2) + 5 = 696.$$

A zárójelek felbontása és a lehetséges összevonások után $6k^2 + 20k - 666 = 0$. Az egyenlet egész megoldása $k = 9$. A számrendszerek alapszáma tehát 9 és 11. A 9-es számrendszerbeli $\overline{345}$ szám 10-es számrendszerbeli értéke 284, a 11-es számrendszerbelié pedig 412. A két szám összege valóban 696.

c) A legkisebb 10-es számrendszerbeli háromjegyű szám a 100, ennek 9-es alapú számrendszerbeli alakja 121_9. Ez háromjegyű szám. A legnagyobb 9-es számrendszerbeli háromjegyű szám a 888_9, ennek 10-es számrendszerbeli értéke $8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + 8 = 728$. Így 100-tól 728-ig bármely szám megfelel a feltételnek, ezért a kedvező esetek száma $728 - 100 + 1 = 629$. Az összes eset száma 900, mert ennyi háromjegyű szám van a 10-es számrendszerben. A keresett valószínűség $p = \frac{629}{900} = 0{,}6989$.

9. *a*) *Ábrázoljuk koordinátarendszerben a következő A ponthalmazt:*

$$A = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 3y \geqslant 15\right\}. \qquad (3\ pont)$$

b) *Ábrázoljuk koordinátarendszerben a B ponthalmazt:*

$$B = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 14x - 8y + 40 \leqslant 0\right\}. \qquad (5\ pont)$$

c) *Igazoljuk, hogy az $F(-3;-4)$ fókuszpontú $v:\ y = -6$ vezéregyenesű parabola egyenlete $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}75$.* *(4 pont)*

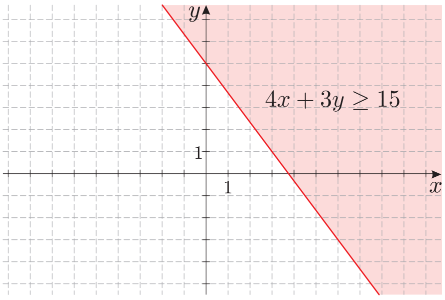
d) *Írjuk fel a $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}75$ parabola $(-1;-4)$ pontjába húzott érintőjének egyenletét.* *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Rendezzük y-ra az egyenlőtlenséget: $y \geqslant -\frac{4}{3}x + 5$. A kifejezés az y-tengelyt az 5-nél metsző, $-\frac{4}{3}$ meredekségű egyenest, és a felette lévő síkrészt adja meg, ez az A ponthalmaz.

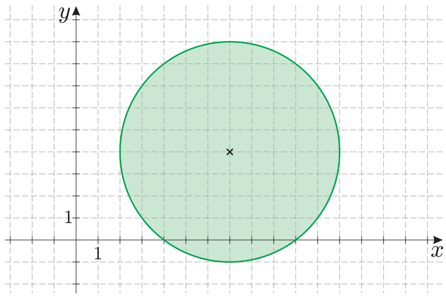
b) Teljes négyzetté alakítással rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$(x-7)^2 - 49 + (y-4)^2 - 16 + 40 \leqslant 0,$$

$$(x-7)^2 + (y-4)^2 \leqslant 25.$$



a)



b)

A B ponthalmaz egy $(7;4)$ középpontú, $r=5$ egység sugarú zárt körlap.

c) A parabola paramétere a fókuszpontjának és vezéregyenesének távolsága: $p=2$, a parabola tengelypontjának koordinátái $T(-3;-5)$. A fókuszpont a vezéregyenes felett helyezkedik el, ezért a keresett alakzat felfelé nyíló parabola. Ezek felhasználásával a parabola egyenlete:

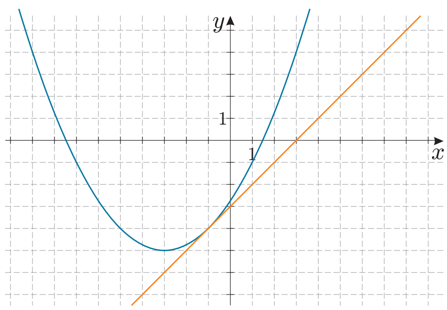
$$y-(-5)=\frac{1}{2\cdot 2}\bigl(x-(-3)\bigr)^2.$$

A nevezetes azonosság alkalmazása után végezzük el a beszorzásokat és a rendezést. Valóban az $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ egyenletet kapjuk.

d) Az alakzat érintőjének meredekségét az $f(x)=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ függvény deriválása után kapjuk, ha kiszámítjuk annak $x=-1$ helyen felvett helyettesítési értékét:

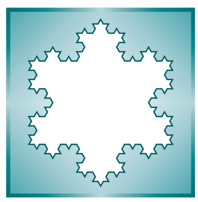
$$f'(x)=0{,}5x+1{,}5; \quad f'(-1)=1.$$

Az érintő egyenlete: $y-(-4)=$ $=x-(-1)$, rendezve $y=x-3$.



Jócsik Csilla
Győr

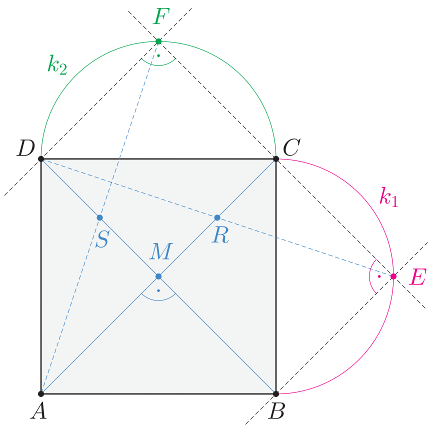
C gyakorlatok megoldása



C. 1729. *Az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalára mint átmérőre a k_1, illetve k_2 félköröket rajzoljuk a négyzeten kívülre. A két félkörív felezőpontja E, illetve F. A DE és AF szakasz felezőpontja P, illetve Q. Mutassuk meg, hogy P a négyzet AC átlójára, Q pedig a négyzet BD átlójára illeszkedik.*

I. megoldás. Legyen DE és AC metszéspontja R, AF és BD metszéspontja pedig S. Elegendő bizonyítanunk, hogy $R = P$ és $S = Q$.

Az $ABCD$ négyzet AC és BD átlói az M pontban merőlegesen metszik egymást.



1. ábra

A Thalész-tétel alapján $BEC\sphericalangle = CFD\sphericalangle = 90°$, továbbá E és F felezik a megfelelő köríveket, ezért $BE = CE$, valamint $CF = DF$, azaz BEC és CFD egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amelyek $BC = CD$ miatt egybevágók is. Tekintsük az *1. ábrát.*

A fentiek szerint BEC és CFD egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért $EC = FC$ is igaz, továbbá $ECB\sphericalangle + BCD\sphericalangle + DCF\sphericalangle = 180°$, vagyis az E, C, F pontok egy egyenesen vannak, és C az EF szakasz felezőpontja. Az AC átló a négyzet BC és CD oldalaival is 45°-os szöget zár be, ez az előzőek alapján azt is jelenti, hogy AC merőleges az EF szakaszra, és így RC párhuzamos DF-fel.

Eszerint RC az EFD háromszög középvonala, és ezért R a DE szakasz felezőpontja, tehát valóban teljesül, hogy $R = P$.

Az előzőek alapján könnyen látható, hogy ACF derékszögű háromszög, amelynek AC befogóját az MS szakasz merőlegesen felezi, és mivel MS párhuzamos CF-fel, ezért MS az ACF háromszög középvonalaként felezi az AF szakaszt.

Így azt is beláttuk, hogy $S = Q$, és ezzel a feladat állítását igazoltuk.

(*A KöMaL honlapon látható megoldás*)

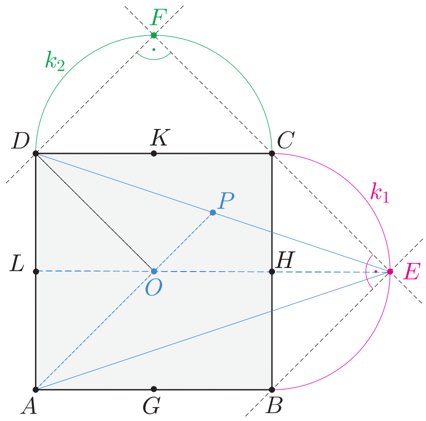
II. megoldás. Legyenek az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai rendre G, H, K, L, és legyen a négyzet oldalhossza a. Nyilvánvaló, hogy a H és K pontok a BC, illetve CD átmérőjű félkörök középpontjai, ezért

$$(1) \qquad HB = HC = HE = \frac{a}{2}; \quad KC = KD = KF = \frac{a}{2}.$$

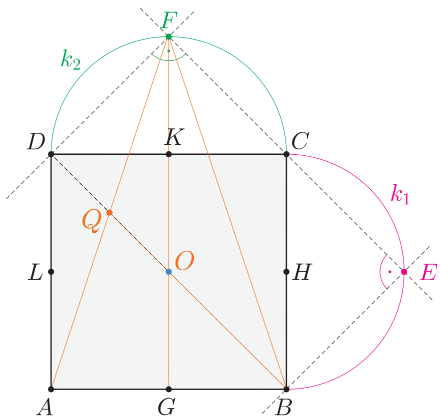
Thalész tétele miatt $BEC\sphericalangle = CFD\sphericalangle = 90°$, így (1) figyelembevételével BEC és CFD egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögek, valamint $HE \perp BC$ és $FK \perp CD$.

Tekintsük a *2. ábrát,* amelyen először az ADE háromszög tulajdonságait vizsgáljuk.

A négyzet LH középvonala átmegy a négyzet O-val jelölt középpontján és merőleges az AD és a BC odalalakra. Mivel HE is merőleges BC-re, így L, O, H és E egy egyenesre esnek, mégpedig a négyzet LH középvonalának egyenesére. Ez azt jelenti, hogy EL a háromszög súlyvonala. Tudjuk még, hogy $LO=OH=HE=\frac{a}{2}$, tehát O a háromszög súlypontja.



2. ábra



3. ábra

Most tekintsük az OP szakaszt. Mivel O a súlypont, ezért ez a szakasz a háromszög súlyvonala, és így P az ED oldal felezőpontja. Másrészt AO a négyzet átlójának egyenese, tehát P illeszkedik az AC átlóra.

A *3. ábra* segítségével igazolhatjuk, hogy az AF szakasz Q felezőpontja illeszkedik a BD átlóra. Az előző esethez hasonlóan beláthatjuk, hogy az ABF háromszögnek GF az egyik súlyvonala, O a súlypontja és így BQ szintén súlyvonal, és Q felezi az AF szakaszt. Másrészt Q illeszkedik BO egyenesére, vagyis a BD átlóra is.

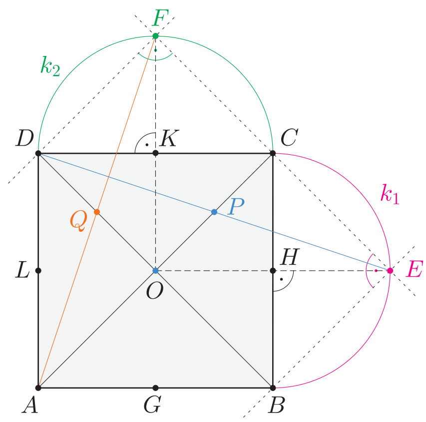
Nagy Anna Éva (Szentendre, Ferences Gimnázium, 10. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Legyenek az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai rendre G, H, K, L, a négyzet átlóinak metszéspontja O, és legyen a négyzet oldalhossza a.

Nyilvánvaló, hogy a H és K pontok a BC, illetve CD átmérőjű félkörök középpontjai, ezért

$$HB=HC=HE=\frac{a}{2};$$

$$KC=KD=KF=\frac{a}{2}.$$



4. ábra

Tudjuk, hogy OH és OK merőleges BC-re, illetve CD-re, valamint

$$OH=OK=\frac{a}{2}, \quad \text{ezért} \quad OE=OH+HE=a.$$

Mivel HE is merőleges BC-re, ezért az O, H, E pontok egy egyenesen vannak, az OE szakasz tehát párhuzamos CD-vel és $OE = CD = a$.

Ez pontosan azt jelenti, hogy $OECD$ paralelogramma, amelynek DE és CO átlói a DE szakasz P felezőpontjában metszik egymást, vagyis P rajta van CO szakaszon és így az AC átlón is.

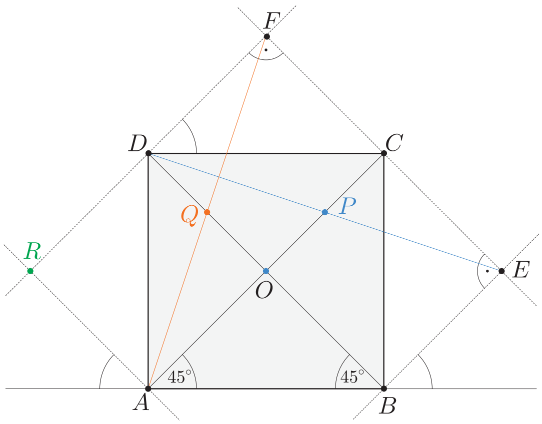
Hasonlóan egyszerű módon láthatjuk be, hogy $OFDA$ is paralelogramma, amelynek AF és DO átlói az AF szakasz Q felezőpontjában metszik egymást, ezért Q illeszkedik a DO szakaszra és így a BD átlóra is.

Vinté csapat: *Hajós-Szabó Máté* és *Krizsán Vince László*
(Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 10. évf.)

IV. megoldás. Mivel E, F a k_1, illetve k_2 félkörök felezőpontjai, ezért a Thalész-tételt is figyelembe véve a BEC és CFD egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért egyrészt $ECF\sphericalangle = ECB\sphericalangle + BCD\sphericalangle + FCD\sphericalangle = 180°$, tehát az E, C, F pontok egy egyenesen vannak, másrészt

$$EBC\sphericalangle = FDC\sphericalangle = 45°. \tag{1}$$

Tekintsük az *5. ábrát,* ahol az A ponton keresztül párhuzamost húztunk az EF egyenessel, ez a DF egyenest az R pontban metszi.



5. ábra

Az (1) összefüggésből $CBA\sphericalangle = 90°$ alapján az is következik, hogy az EB egyenes az AB egyenessel 45°-os szöget zár be, de akkor $AB \parallel CD$ és (1) szerint az EB és FD egyenesek is párhuzamosak. Ugyanakkor a négyzet AC átlója 45°-os szöget zár be az AB egyenessel, ez pedig egyenértékű azzal, hogy

$$AC \parallel EB \parallel FD. \tag{2}$$

Az $EC = FC$ és $BO = DO$, illetve (2) miatt AC az EB és FD egyenesek középpárhuzamosa. Ez azt jelenti, hogy AC tartalmazza az EB és FD egyenesek E és D pontjait összekötő szakasz felezőpontját, azaz a P pontot is.

(1) és $EF \parallel AR$ alapján könnyen beláthatjuk, hogy ARD a BEC és CFD háromszögekkel egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyből az is adódik, hogy az AR egyenes az AB-vel $45°$-os szöget zár be. Mivel a BD átló is $45°$-os szöget zár be AB-vel, ezért

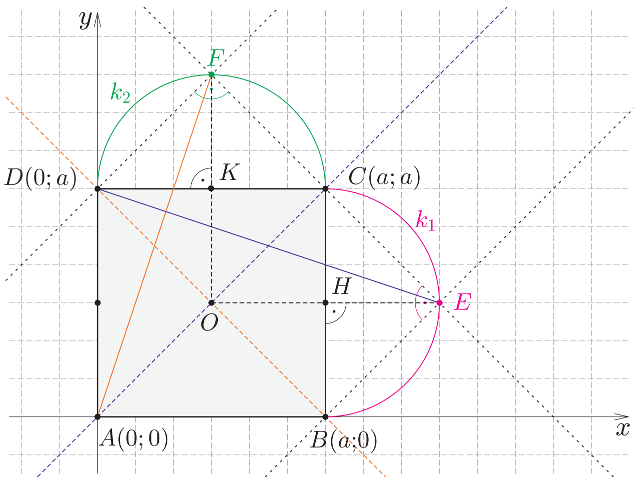
$$BD \parallel EF \parallel AR. \tag{3}$$

Az $FD = RD$ és $CO = AO$, illetve (3) szerint BD az EF és AR egyenesek középpárhuzamosa.

Ezért BD tartalmazza az egyenesek A és F pontjait összekötő szakasz felezőpontját, tehát a Q pontot is.

Gál András (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 10. évf.)
dolgozata alapján

V. megoldás. Legyen a négyzet oldalainak hossza a. Helyezzük el a négyzetet a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az A pont az origó, a B pont koordinátái $B(a;0)$, ebből következően a négyzet többi csúcsa $C(a;a)$ és $D(0;a)$.



6. ábra

Legyen a négyzet középpontja O, ennek koordinátái

$$O\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

Az E, F pontok a k_1, illetve k_2 félkörök felezőpontjai, tehát $BE = CE$, illetve $CF = DF$, ezért az E és F pontok rajta vannak a BC, illetve CD szakaszok felezőmerőlegesén és így OE párhuzamos az x-tengellyel, illetve OF párhuzamos az y-tengellyel.

Ha a BC és CD szakaszok felezőpontjai H és K, akkor

$$HE = KF = \frac{a}{2},$$

hiszen H és K a $BC=CD=a$ átmérőjű k_1, illetve k_2 félkörök középpontjai. Mivel $HO=KO=\frac{a}{2}$, ezért az E, F pontok koordinátái

$$E\left(\frac{3a}{2};\frac{a}{2}\right),\quad F\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2}\right). \tag{1}$$

Szakasz felezőpontjának koordinátái a szakaszvégpontok koordinátáinak számtani közepei, ezért (1) és a D, A pontok koordinátáinak felhasználásával a DE és AF szakaszok P, illetve Q felezőpontjainak koordinátái:

$$P\left(\frac{3a}{4};\frac{3a}{4}\right),\quad Q\left(\frac{a}{4};\frac{3a}{4}\right). \tag{2}$$

A négyzet AC átlójának egyenlete $y=x$, a BD átló egyenlete $y=-x+a$. (2) alapján egyszerű számítással beláthatjuk, hogy a P pont koordinátái kielégítik az $y=x$, Q koordinátái pedig kielégítik az $y=-x+a$ egyenletet, tehát P és Q valóban illeszkednek a megfelelő átlók egyenesére.

A pontok az átlókat alkotó szakaszok belső pontjai, hiszen az AC és BC átlók belső pontjainak x; y koordinátáira egyaránt teljesül, hogy $0<x<a$, $0<y<a$, és (2) szerint ez a P, Q pontokra is fennáll. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

(*Több versenyző dolgozata alapján*)

Összesen 211 dolgozat érkezett. 5 pontos 44, 4 pontos 37, 3 pontos 44, 2 pontos 28 dolgozat. 1 pontot 23, 0 pontot 22 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 13 dolgozat.

Megjegyzések. a) A dolgozatokban sokféle kisebb-nagyobb hiba előfordult a legegyszerűbb elírástól, számolási hibától egészen a bizonyítandó állítás felhasználásának elvi hibájáig.

b) Hibának számított az is, ha a versenyző helyesen igazolta, hogy a P pont illeszkedik AC-re, leírta, hogy a Q pontra a bizonyítás hasonló, de azt ténylegesen nem hajtotta végre. Az ilyen típusú megoldásokban előfordult, hogy a versenyző utalt rá, hogy a feladatbeli DE és AF szakaszok, illetve a P és Q pont átvihető egymásba forgatással, de nem adta meg a forgatás leírását.

c) Sok megoldás készült koordináta-geometriai úton, mégpedig úgy, hogy a négyzetet derékszögű koordináta-rendszerben speciális (például egységnyi) oldalhosszúsággal és helyzetben vizsgálták, de nem utaltak rá, hogy ez elegendő az eredeti feladat igazolásához is.

d) Több olyan megoldás is született, ahol a feltöltött dokumentum mindössze egy szerkesztett ábrát tartalmazott szöveges indoklás nélkül. Az ilyen dolgozatok 0 pontot kaptak.

C. 1731. *Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai $AB>CD$, a trapéz középvonala az AC átlót az E, a BD átlót az F pontban metszi. A CD szakasz hossza az AB és EF szakaszok hosszának*

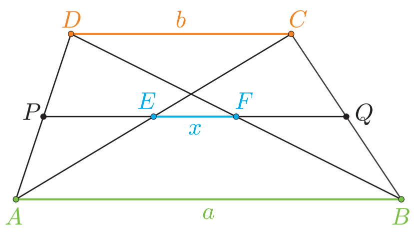
a) *számtani,*

b) *mértani közepe.*

Határozzuk meg, hogy a két eset közül melyikben lesz nagyobb az $\frac{AB}{CD}$ arány értéke.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A trapéz középvonala PQ, így egyrészt $PQ=\frac{a+b}{2}$, másrészt $PQ \parallel a \parallel b$. Ekkor PE és FQ az ACD, illetve a BCD háromszög középvonala, tehát



$$PE=FQ=\frac{b}{2}.$$

Ebből már felírhatjuk EF hosszát:

$$EF=x=PQ-PE-FQ=\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}.$$

Fejezzük ki a két esetben ennek segítségével a kérdezett arányt.

a) $CD=\frac{AB+EF}{2}$. Tehát

$$b=\frac{a+x}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a-b}{4}=\frac{3a-b}{4},$$

$$4b=3a-b,$$

$$3a=5b,$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}=\frac{5}{3}.$$

b) $CD^2=AB\cdot EF$. Vagyis

$$b^2=a\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{a^2-ab}{2},$$

$$2b^2=a^2-ab,$$

mindkét oldalt osztva a pozitív b^2 értékével:

$$2=\frac{a^2}{b^2}-\frac{ab}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-2=0.$$

Ez $\frac{a}{b}$-re nézve egy másodfokú egyenlet, így

$$\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2},$$

ami vagy 2, vagy -1. Utóbbi nyilván nem lehetséges, vagyis ebben az esetben

$$\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}=2.$$

Tehát a *b*) esetben nagyobb az $\frac{AB}{CD}$ arány értéke.

Hochenburger Zoárd (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Sokan próbálkoztak valamilyen közepek közötti összefüggést használni a megoldásban, például kihozták, hogy az első esetben

$$\frac{AB}{CD}=\frac{1}{\frac{1+\frac{EF}{AB}}{2}},$$

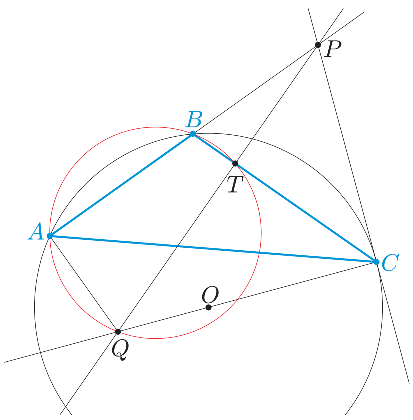
vagyis $\frac{AB}{CD}$ értéke éppen 1-nek, és $\frac{AB}{EF}$-nek a harmonikus közepe. A második esetben pedig $\frac{AB}{CD}=\sqrt{\frac{AB}{EF}}$, ami pedig 1-nek és $\frac{AB}{EF}$-nek a mértani közepe. Mivel a mértani közép legalább akkora, mint a harmonikus közép, ezért a b) esetben nagyobb a kérdéses arány. Miért nem jó gondolatmenet ez és a hozzá hasonlóak, ahol a két esetben egy-egy középértéket vesznek, majd a kettőt összehasonlítják? Azért, mert valójában nem ugyanannak a két számnak veszik a különböző középértékeit. Meg lehet gondolni, például a fenti megoldás alapján, hogy a, b és x közül bármelyik kettő egyértelműen meghatározza a harmadik értékét (vagy nem jöhet létre a trapéz). Vagyis pl. rögzített a érték esetén egy bizonyos x értékre lesz b éppen a számtani, illetve mértani közepe a-nak és x-nek.

58 dolgozat érkezett. 5 pontos 20, 4 pontos 5, 1 pontos 2, 0 pontos 28 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5241. *Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle > 90°$, a körülírt kör középpontja O. A körülírt körhöz C-ben húzott érintő az AB egyenest a P pontban, a P-ből BC-re állított merőleges pedig az OC egyenest Q-ban metszi. Igazoljuk, hogy AB merőleges AQ-ra.*

(*4 pont*) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)



Megoldás. Legyen a P-ből BC-re állított merőleges talppontja T. Ekkor $BTQ\sphericalangle$ derékszög, azaz T rajta van a BQ átmérőjű Thalész-körön. A feladat állítása, mely szerint $BAQ\sphericalangle$ derékszög, azzal ekvivalens a Thalész-tétel alapján, hogy A is rajta van a BQ átmérőjű körön, vagyis az előbbiek alapján a BTQ körön. A feladat állítása tehát ekvivalens azzal, hogy A rajta van a BTQ körön, azaz $BTQA$ húrnégyszög, ezt fogjuk a továbbiakban megmutatni.

Megjegyezzük, hogy PC merőleges $OC\equiv QC$-re, hiszen egy adott pontba húzott érintő merőleges az adott pontba mutató sugárra, azaz a PQC háromszög derékszögű. Ebben a háromszögben $BC \equiv CT \perp PQ$ miatt CT az átfogóhoz tartozó magasság, így felírva a befogótételt: $PT \cdot PQ = PC^2$. Most felhasználva, hogy a P pont ABC körre vonatkozó hatványa állandó (vagy a szelő- és érintőszakaszok tétele alapján): $PC^2 = PB \cdot PA$. Az előbbi kettőt összevetve

$$PT \cdot PQ = PB \cdot PA,$$

ami a szelők tételének megfordítása miatt éppen azt jelenti, hogy T, Q, B, A konciklikus, AQ valóban merőleges AB-re.

Diszkusszió. A bizonyítás során sehol sem használtunk szögszámításokat, csupán derékszögek szerepeltek a megoldásban, és ilyenkor nyilván nem számít (irányítatlan szögekkel sem), hogy az adott egyenes melyik félegyenesén van a szög harmadik csúcsa, mindenképpen derékszöget kapunk. A körre felírt hatványok is igazak előjeles szakaszok nélkül is, ugyanis P-ből húzható érintő a körhöz, és így külső pont, azaz a hatvány során felírt távolságok mindig azonos irányúak, és így nincs szükség előjeles szakaszokra. Az egyetlen eset, amikor a bizonyításunk nem mondható el az euklideszi síkon (bár a projektív síkon, némi kiegészítéssel elmondható lenne) az, amikor valamelyik metszéspont nem jön létre, azaz a két megrajzolt egyenes párhuzamos.

Ez a két egyenes nem lehet OC és a P-ből BC-re állított merőleges, ugyanis ez esetben OC merőleges lenne BC-re, de ekkor BC érintené a körülírt kört, ami lehetetlen, hiszen akkor BC-nek csak egy közös pontja lehetne a körülírt körrel, azaz BC ponttá fajulna. Marad tehát az az eset, hogy AB és a C-ben húzott érintő párhuzamosak. Egy húrral párhuzamosan két érintő húzható, a húr mindkét érintési ponttal egyenlő szárú háromszöget alkot. Tehát ekkor az ABC háromszög egyenlő szárú, melynek alapja AB, és így $ABC\sphericalangle < 90^\circ$, ami ellentmond a feladat feltételeinek.

Így a bizonyítás minden tompaszögű háromszögre elmondható az euklideszi síkon, a megoldást ezzel befejeztük.

Varga Boldizsár (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.) megoldása

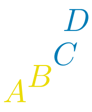
Összesen 56 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 51, 3 pontot 2 tanuló. 0 pontos 3 versenyző dolgozata.

B. 5246. 14 *ember ül egy asztal körül, mindenki kék vagy sárga pólóban. Legfeljebb hány emberre teljesülhet, hogy a két szomszédja különböző színű pólóban van?*

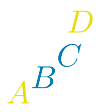
(*3 pont*)

Megoldás. A különböző színű szomszédokkal rendelkező emberek száma legfeljebb 14. Először azt mutatjuk meg, hogy sem 14, sem pedig 13 nem lehet.

Tegyük fel, hogy a kérdéses szám legalább 13. Ekkor legfeljebb egy olyan ember van, akire nem teljesül a feltétel, tehát a 13 ember valakitől kezdve sorban egymás mellett ül. Vegyük a sor egyik szélső tagját (A). Legyen a pólója sárga színű. Ekkor a mellette ülő, a feltételeket teljesítő ember (B) sárga és kék színű pólót is viselhet. Eszerint két esetet vizsgálunk.



1. ábra



2. ábra

1. eset: B sárga pólót visel. Mivel ő is vegyes színű szomszédokkal rendelkezik, ezért C színe kék, így D színe kék (*1. ábra*), E színe sárga, F színe sárga, és így tovább: ss után mindig kk, azután pedig ss következik.

2. eset: B kék pólót visel. Ekkor C-nek is kéket kell viselnie ahhoz, hogy B-re teljesüljön a feltétel (*2. ábra*). A mellette ülő ember pedig sárga pólót kell, hogy viseljen. Itt is felváltva két kék és kék sárga pólós embernek kell követnie egymást ahhoz, hogy sorra mindegyik emberről elmondható legyen az, hogy mellettük különböző színű pólós emberek ülnek.

A másik szomszédja (N) az első esetben kék, a másodikban pedig sárga pólót kell viseljen.

Ezek alapján $A, B, \ldots, L, M, N$ színe rendre

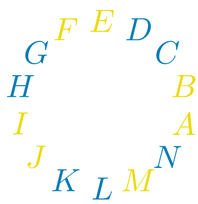
$$sskk \mid sskk \mid sskk \mid sk,$$

vagy pedig

$$s \mid kk \mid sskk \mid sskk \mid sss.$$

Mindkét esetben látható, hogy M szomszédjainak, L-nek és N-nek a pólószíne megegyezik, ami ellentmondás.

Végül egy konkrét elhelyezést mutatunk arra, hogy a kérdéses szám lehet 12:



Geretovszky Márton László (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

81 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 67, 2 pontot 6 tanuló, 1 pontos 5, 0 pontos 2 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein.

Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. A *Fortune* magazin cikke szerint a legjelentősebb változás az üzleti életben az ipari forradalom óta a matematikai algoritmusok térhódítása (`http://fortune.com/2015/01/22/the-algorithmic-ceo/`). Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikust és a szintén matematikai előképzettséget igénylő adattudóst, aktuáriust és statisztikust (`https://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2021`). Mindez Magyarországra is igaz, az ELTE-n végzett matematikusokat nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek várják, hanem számos cég is, igen jó fizetéssel.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, az elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók. Ajánljuk a középiskolásoknak szóló oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében). Az ÚNKP ösztöndíjprogramja már a leendő elsőéveseknek is elérhető! Részletes tájékoztató: `http://csikvarip.web.elte.hu/diak_kutatas.html`.

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén az elmúlt tíz évben kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük.

Bátran állíthatjuk tehát, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Az ELTE TTK novemberi nyílt napja itt visszanézhető: https://ttk.elte.hu/nyiltnap2023, januárban pedig online nyílt napon várjuk az érdeklődőket.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (744–748.)

K. 744. Ha két szendvicset és egy üdítőt veszek, akkor az 1000 Ft-omból ugyanannyi marad meg, mint amennyi hiányzik az 1000 Ft-omhoz, ha három szendvicset és egy üdítőt veszek. Két szendvics és két üdítő ára 1100 Ft.

Mennyibe kerül egy szendvics és mennyibe kerül egy üdítő?

K. 745. Egy társasjátékban a játékosok pontokat gyűjtenek. A játékosok sorban egymás után következnek. Amikor egy játékosra sor kerül, akkor ő (szerencsétől függően) akármennyi, de nemnegatív egész számú pontot gyűjthet (így akár

0 pontot is kaphat). A játékos által a játék során szerzett pontok összeadódnak. Ha az összes játékos által szerzett pontok összege eléri az 1000-et, akkor a játék azonnal véget ér (így a befejező játékos az utolsó körében csak annyi pontot tud szerezni, amennyivel az összeg 1000 lesz). A játékot az nyeri, akinek a legtöbb pontja van, holtverseny esetén az nyer, aki először érte el az adott pontszámot; a második legtöbb pontot gyűjtő játékos ér el második helyezést stb.

A játék állása jelenleg: Kati 314 pont, Sanyi 207 pont, Jancsi 58 pont, Gizi 31 pont, Józsi 0 pont.

a) Ha most Kati következik, minimálisan hány pontot kell szereznie ebben a körben, hogy biztosan legalább második helyezést érjen el?

b) Ha most Sanyi következik, minimálisan hány pontot kell gyűjtenie ebben a körben, hogy biztosan legalább második helyezést érjen el?

c) Ha most Józsi következik, minimálisan hány pontot kell gyűjtenie ebben a körben, hogy biztosan legalább második helyezést érjen el?

K. 746. Egy kis országban bevezették, hogy a földgázfogyasztásért az alábbiak szerint kell fizetni: Az új elszámolás bevezetését követő első évben az első 1700 m^3 gáz ára 100 peták/m^3, a további fogyasztás ára 750 peták/m^3. A kedvezményesen vásárolható mennyiséget az országos éves átlagfogyasztás alapján állapítják meg minden évben, az előző évi fogyasztási adatok alapján. Hétköznapi János ebben az országban él, és egy évig használja a gázt ezekkel a feltételekkel. Tekintettel azonban a túl magas fizetendő összegre elhatározza, hogy takarékoskodni fog, és kevesebb gázt használ el. Sikerül is az éves gázfogyasztását 10%-kal csökkentenie a következő évre, azonban, mivel mindenki hasonlóan gondolkodott, az éves gázfogyasztás országos átlaga 15%-kal csökkent. Hétköznapi János azt vette észre, hogy a második évben hiába fogyasztott kevesebb gázt, mégis többet kellett fizetnie (az egész évet tekintve), mint az első évben. Mennyi lehetett Jánosunk első éves gázfogyasztása?

K/C. 747. Egy negyvenszöget valamelyik átlója két olyan sokszögre bontja, melyeknek összesen 298-cal kevesebb átlója van, mint a negyvenszögnek. Hány oldalúak ezek a sokszögek?

K/C. 748. Egy körvonal mentén leírjuk az egész számokat 1-től 100-ig. Először minden páros számot összekötünk a nála kisebb páratlan számokkal, majd minden páratlan számot összekötünk minden nála kisebb páros számmal. Hány vonalat húztunk be?

❄

Beküldési határidő: 2023. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (747–748., 1743–1747.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 747. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 748. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1743. Mutassuk meg, hogy hét természetes szám között, amelyek egy 30 különbségű számtani sorozat egymás utáni tagjai, pontosan egy 7-tel osztható szám van.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1744. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 45^\circ$ és $ABC\sphericalangle = 60^\circ$. Az AB szakasz egy pontja D. A CAD háromszög körülírt köre áthalad az ABC háromszög magasságpontján. Határozzuk meg az $\frac{AD}{BD}$ arány pontos értékét úgy, hogy a megoldás során nem használunk szögfüggvényeket.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1745. Oldjuk meg az $x^2+8x-y=\frac{y-5}{y+6}$ egyenletet, ha x, y egész számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1746. Az $ABCD$ négyzet AB oldalát az A ponton túl meghosszabbítjuk az $AE=2$ szakasszal, a B ponton túl pedig a $BF=3$ szakasszal. Az ED és FC egyenesek 45°-os szöget zárnak be. Határozzuk meg a négyzet oldalának lehetséges értékeit.

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

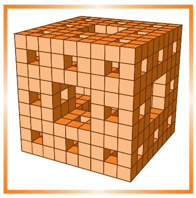
C. 1747. Legyen az $n\geqslant 3$ pozitív egész szám, a $10^n-4!$ számban a számjegyek összege k. Mennyi ekkor a $\frac{10^{n+1}-7}{3}$ számban a számjegyek összege?

Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

❄

Beküldési határidő: 2023. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5278–5285.)

B. 5278. Nevesincs iskolában a végzős reálosok négy csoportot alkotnak, vannak matekosok, fizikások, kémiások és bioszosok. Egy napon a menzán mindannyian egy nagy, kerek asztalnál ülnek együtt, mindenkivel szemben ül valaki és mindenkinek van bal oldali és jobb oldali szomszédja. Bárkit választunk ki, két szomszédjával és a vele szemben ülővel csupa különböző csoport tagjai. Hányan lehetnek a végzős reálosok, ha 20-nál kevesebben vannak?

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5279. Egy derékszögű szögtartományba két kört írtunk. Az egyik kör az egyik szögszárat az A pontban, a másik kör a másik szögszárat a B pontban érinti. A két kör egymást is érinti a C pontban. Határozzuk meg az $ACB\sphericalangle$ nagyságát.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5280. Legyenek $a>2$, b és c valós számok. Tekintsük a következő három állítást.

(1) Az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs valós megoldása.

(2) Az $(a-1)x^2+(b-1)x+(c-1)=0$ egyenletnek 1 valós megoldása van.

(3) Az $(a-2)x^2+(b-2)x+(c-2)=0$ egyenletnek 2 valós megoldása van.

a) Ha tudjuk, hogy az (1)-es és a (2)-es állítás igaz, akkor következtethetünk-e arra, hogy a (3)-as állítás is igaz?

b) Ha tudjuk, hogy a (2)-es és a (3)-as állítás igaz, akkor következtethetünk-e arra, hogy az (1)-es állítás is igaz?

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5281. Bizonyítsuk be, hogy minden $d>1$ pozitív egész számhoz található egy olyan pozitív egész szám, amelynek osztói között pontosan ugyanannyi d-vel osztható van, mint d-vel nem osztható.

(*5 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5282. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A-ból induló magasság talppontja T, a T pont merőleges vetülete az AB oldalon D, az AC oldalon pedig E. Legyen F a BC oldal és az ABE kör második, B-től különböző metszéspontja, és hasonlóan, legyen G a BC oldal és az ACD kör második, C-től különböző metszéspontja. Mutassuk meg, hogy $TF=TG$.

(*5 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

B. 5283. Az N konvex négyszög tartalmaz egy r sugarú körlapot. Mutassuk meg, hogy N kerülete legalább $8r$.

(*4 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5284. Legyen $n>2$. Aladár kiválasztotta a $2n$ csúcsú teljes gráf egy élét. Paula egy forintért rákérdezhet, hogy egy általa megadott teljes párosításban benne van-e a kiválasztott él. Legalább hány forint lapul Paula zsebében, ha ügyes kérdésekkel biztosan ki tudja találni, hogy melyik él lett kiválasztva?

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5285. A hegyesszögű ABC háromszögben $AB=AC$. A háromszög köré írt körön úgy mozognak az A', B' és C' pontok, hogy az $A'B'C'$ háromszög mindig egybevágó és azonos irányítású az ABC háromszöggel. Legyen a BB' és CC' egyenesek metszéspontja P. Mutassuk meg, hogy az $A'P$ egyenesek egy rögzített ponton mennek át.

(*6 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (839–841.)

A. 839. Adott egy véges, egyszerű, irányítatlan gráf. Anna minden élre pozitív valós számokat ír úgy, hogy bármely csúcsra a csúcsba befutó élekre írt számok összege kisebb egynél. Balázs szeretné úgy megszámozni a csúcsokat nemnegatív valós számokkal, hogy ha tetszőleges v csúcsra a v_0 számot írta, és a csúcsból kiinduló élekre Anna rendre az $e_1,e_2,\ldots,e_k$ számokat írta, továbbá ezen élek másik végein rendre a $v_1,v_2,\ldots,v_k$ számok szerepelnek, akkor $v_0=\sum_{i=1}^{k} e_iv_i+2022$ teljesüljön. Mutassuk meg, hogy Balázs mindig meg tudja így számozni a csúcsokat függetlenül a gráftól és az Anna által megadott számozástól.

Javasolta: *Varga Boldizsár* (Verőce)

A. 840. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat az X, Y és Z pontban érinti. Az XYZ háromszögben az X és az Y csúcsból induló magasságok talppontjai X' és Y'. Az $X'Y'$ egyenes az ABC háromszög körülírt körét a P és a Q pontban metszi. Bizonyítandó, hogy X, Y, P és Q egy körre esnek.

Javasolta: *Simon László* (Budapest)

A. 841. Oldjuk meg a $2^a+p^b=n^{p-1}$ egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán, ahol p prímszám.

Javasolta: *Weisz Máté* (Cambridge)

Beküldési határidő: 2023. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 577. Egyenletesnek nevezzük azt az N jegyű számot, amelyben az egyes számjegyek értéke az előző helyiértéken álló számjegytől legfeljebb 1-gyel tér el.

Írjunk programot, amely egy beolvasott N-jegyű nem egyenletes számhoz meghatározza a nála kisebb legnagyobb és a nála nagyobb legkisebb egyenletes számot.

A program az N-jegyű ($2 \leqslant N \leqslant 1\,000\,000$) egész számot a standard bemenetről olvassa be.

A standard kimenet első sorában a beolvasott számnál kisebb legnagyobb egyenletes számot, a második sorában pedig a nála nagyobb legkisebb egyenletes számot írjuk ki.

Példa bemenet	Kimenet
`8778349`	`8777899` `8778765`

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. 5 pont kapható arra a programra, amely a $2 \leqslant N \leqslant 1\,000$ bemenetekre helyes kimenetet ad. További 4 pont kapható a $2 \leqslant N \leqslant 1\,000\,000$ bemenetekre 1 másodperc futásidő alatt helyes kimenetet adó programokra.

Beküldendő egy tömörített `i577.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 578 (É). A gazdaság helyzetéről rengeteget elárul a közlekedési infrastruktúra. Ebben a feladatban hazánk 2007 és 2021 közötti megyénkénti adatait fogjuk górcső alá venni.

1. Hozzunk létre a táblázatkezelőben egy új munkafüzetet. Ennek két munkalapja legyen **Adatok** és **Valasz**. Ezekre az A1-es cellától kezdve töltsük be a munkalapok nevével megegyező, UTF-8 kódolású, tabulátorral tagolt txt-fájlokat.
2. A két munkalapon végezzük el az alábbi mintákon látható formázásokat, és oldjuk meg a leírás szerinti feladatokat.
3. Az **Adatok** munkalapon rendezzük át a megyék adatait a megye neve szerint névsorba.
4. Az évenkénti legnagyobb fejlesztés adatait határozzuk meg a **Valasz** munkalap B3:G3 tartományában, tehát azt, hogy az előző évihez képest mikor és hol volt a legnagyobb növekedés, és mekkora volt a hossznövekedés értéke, mind köz-, mind vasúton.

5. Határozzuk meg a **Valasz** munkalap B7:G7 tartományában azt, hogy a teljes időszakra az egész országot tekintve hogyan és mennyivel változott az úthossz, mind köz-, mind vasúton. A B7 és E7 cellákban e három szöveg valamelyike szerepelhet: „nőtt”, „nem változott” vagy „csökkent”.
6. A B10 és E10 cellákba azon megyék neve kerüljön, amelyeknél 2012-ben a legnagyobb volt a négyetkilométerenkénti úthossz, mind köz-, mind vasúton.
7. A B12 cellába számoljuk ki hazánk területét az adatok alapján.
8. AZ A16, A17, … cellákba kerüljön azon megyék neve, amelyekben az időszak végén, 2021-ben nem volt nagyobb a közúti és vasúti útvonalhossz összege, mint 2007-ben.
9. Feltételes formázással oldjuk meg, hogy az A16:A34 tartomány cellái közül csak azok kapjanak a minta szerinti keretet és tónust, amelyek nem üresek.
10. Egy új munkalapra készítsünk a minta szerint diagramot Békés, Csongrád–Csanád és Fejér megye közúti hosszának alakulásáról.

Az adatok forrása: a KSH
`https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0041.html`;
`https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0039.html`
és `https://www.ksh.hu/stadat_files/fol/hu/fol0006.html` oldalai.

Minták:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Területi egység neve	Terület [km²]	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
2			Normál nyomtávú vasútak hossza [kilométer]										
3	Pest (Budapesttel együtt)	6 917,1	813	768	768	771	771	771	771	771	771	693	679
4	Fejér	4 358,6	401	492	492	492	492	492	492	492	492	454	455
5	Komárom-Esztergom	2 264,3	117	225	225	225	225	225	225	225	225	225	226
6	Veszprém	4 463,8	562	434	434	433	433	433	433	433	433	435	436
7	Győr-Moson-Sopron	4 207,7	306	383	383	414	402	402	391	391	424	367	367
8	Vas	3 336,1	303	322	322	323	324	324	307	307	305	282	282
9	Zala	3 783,8	267	267	267	268	274	274	274	274	271	261	262
10	Baranya	4 429,7	346	384	384	381	381	381	381	381	381	344	345
11	Somogy	6 065,1	532	475	475	475	475	475	475	475	475	493	494
12	Tolna	3 703,2	235	237	237	206	206	206	206	206	206	245	246
13	Borsod-Abaúj-Zemplén	7 247,1	528	510	510	510	510	510	510	510	510	463	464
14	Heves	3 637,2	292	283	283	283	283	283	283	283	283	301	301
15	Nógrád	2 544,5	128	133	133	133	133	133	133	133	133	200	201
16	Hajdú-Bihar	6 210,8	438	496	496	469	469	469	469	469	469	470	471
17	Jász-Nagykun-Szolnok	5 581,6	477	477	477	503	503	503	503	503	503	452	454
18	Szabolcs-Szatmár-Bereg	5 935,9	663	391	391	391	391	391	391	391	391	495	496
19	Bács-Kiskun	8 444,9	687	543	543	543	543	543	543	543	543	546	548
20	Békés	5 629,7	433	445	445	445	445	445	445	445	445	401	402
21	Csongrád-Csanád	4 264,6	340	310	310	310	310	310	310	310	310	311	312

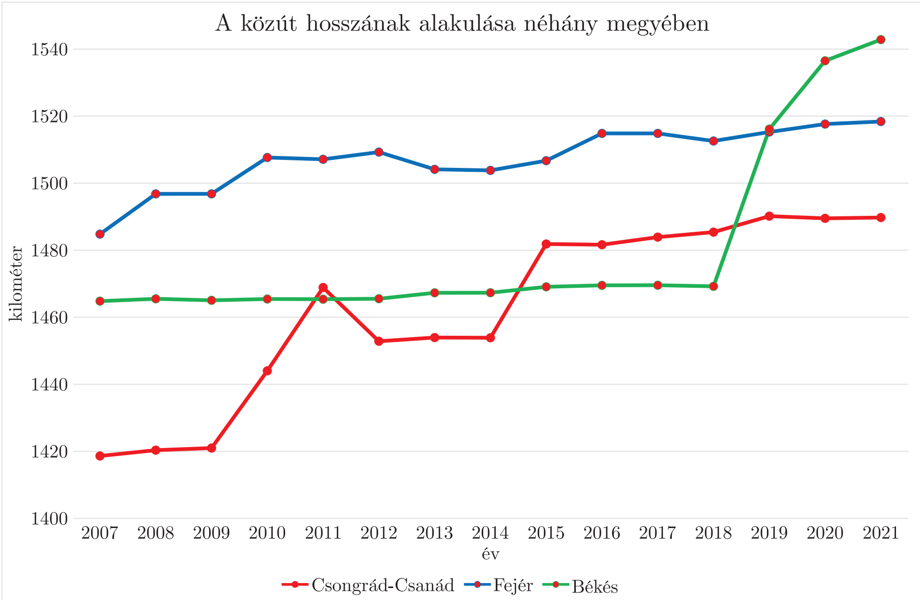
Adatok *munkalap*

		R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	T	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
2		A közutak hossza [kilométer]														
3	Peś	2 685	2 760	2 757	2 771	2 782	2 782	2 793	2 792	2 788	2 788	2 785	2 786	2 801	2 833	2 830
4	Fej	1 485	1 497	1 497	1 508	1 507	1 509	1 504	1 504	1 507	1 515	1 515	1 513	1 515	1 518	1 518
5	Ko	890	890	891	891	895	893	893	895	896	896	895	896	895	907	909
6	Ves	1 629	1 644	1 649	1 650	1 650	1 647	1 635	1 635	1 639	1 640	1 639	1 645	1 649	1 645	1 648
7	Győ	1 741	1 751	1 752	1 752	1 762	1 762	1 766	1 766	1 806	1 833	1 844	1 847	1 847	1 924	1 929
8	Vaś	1 525	1 525	1 536	1 540	1 542	1 541	1 541	1 550	1 566	1 581	1 581	1 573	1 574	1 577	1 620
9	Zal	1 686	1 722	1 723	1 726	1 725	1 725	1 733	1 737	1 741	1 752	1 752	1 752	1 750	1 750	1 747
10	Bal	1 643	1 643	1 642	1 717	1 717	1 720	1 718	1 723	1 725	1 725	1 724	1 724	1 723	1 723	1 723
11	Som	1 736	1 762	1 762	1 761	1 766	1 777	1 790	1 795	1 799	1 796	1 795	1 795	1 826	1 821	1 821
12	Tol	1 087	1 087	1 087	1 216	1 216	1 208	1 209	1 209	1 209	1 209	1 209	1 209	1 209	1 209	1 209
13	Bor	2 582	2 591	2 587	2 588	2 587	2 585	2 583	2 586	2 586	2 586	2 588	2 588	2 584	2 585	2 648
14	He	1 275	1 274	1 274	1 274	1 274	1 271	1 270	1 270	1 272	1 271	1 269	1 277	1 277	1 297	1 295
15	Nóg	945	946	946	944	944	948	947	947	948	948	948	951	954	954	957
16	Haj	1 669	1 669	1 669	1 669	1 669	1 667	1 667	1 662	1 662	1 663	1 676	1 717	1 718	1 754	1 755
17	Jás	1 316	1 316	1 319	1 320	1 330	1 330	1 329	1 329	1 331	1 331	1 331	1 331	1 359	1 358	1 366
18	Sza	2 150	2 152	2 152	2 152	2 157	2 156	2 208	2 227	2 235	2 236	2 239	2 242	2 247	2 247	2 236
19	Bá	2 256	2 248	2 250	2 239	2 240	2 252	2 253	2 253	2 267	2 266	2 265	2 270	2 269	2 271	2 278
20	Bék	1 465	1 465	1 465	1 465	1 465	1 465	1 468	1 468	1 469	1 470	1 470	1 469	1 516	1 537	1 543
21	Cs	1 419	1 420	1 421	1 444	1 469	1 453	1 454	1 454	1 482	1 482	1 484	1 485	1 490	1 490	1 490

Adatok *munkalap*

	A	B	C	D	E	F	G
1	***legnagyobb fejlesztés az előző évhez képest***	vasút			közút		
2		év	területi egység	hossz [km]	év	területi egység	hossz [km]
3							
4							
5	***teljes változás 2007-től 2021-ig***	vasút			közút		
6		változás iránya		hossz [km]	változás iránya		hossz [km]
7							
8							
9	legfejlettebb megyénk 2012-ben	vasúti viszonylatban			közúti viszonylatban		
10							
11							
12	***Magyarország területe [km²]***						
13							
14	***megyék, amelyek nem fejlődtek 2007. és 2021. között***						
15							
16							
17							
18							

Valasz *munkalap*



diagram

Segédszámításokat az **Adatok** munkalap 22. sorától lefelé vagy az AG oszloptól jobbra található cellákban végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

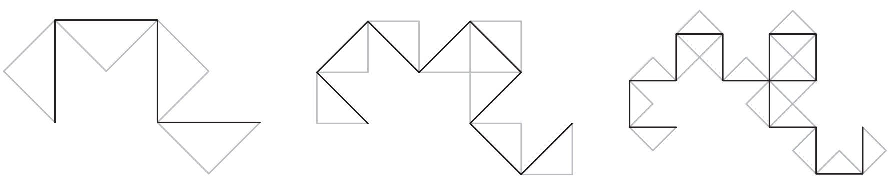
Beküldendő egy tömörített `i578.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

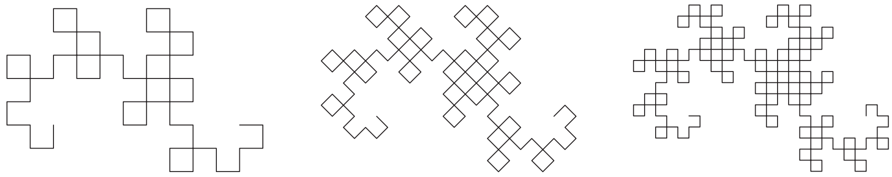
I. 579. A Teknőcgrafika eredetileg a Logo programozási nyelvhez készült, de ma már több oktatási célú fejlesztő környezetnek és nyelvnek része, például elérhető Scratchben vagy Pythonban. Egy magyar fejlesztés keretében a Teknőcgrafikát alkalmazhatjuk a JavaScript nyelv segítségével. Az Agent JS programozási felület, valamint a dokumentáció és néhány példa található a

`https://vimtaai.github.io/agent/`

címen.

Különösen izgalmas területe a Teknőcgrafikának a rekurzív ábrák és fraktálok rajzolása. Készítsük el a Koch-görbe, a sárkánygörbe, valamint a Sierpiński-háromszög ábráját az Agent JS segítségével úgy, hogy a rekurzió szintje a felhasz-





náló által beállítható legyen. A három fraktálról a KöMaL 2021. májusi számában is olvashattunk, innen származik a sárkánygörbe készítését szemléltető *ábra.*

Beküldendő egy tömörített `i579.zip` állományban a három ábrát létrehozó oldal forráskódja.

I/S. 67. Adott egy $N \times M$-es téglalap, melyet le szeretnénk helyezni a síkra úgy, hogy az egyik csúcsa az origóba essen. Adjuk meg, hogy hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a másik három csúcsa is rácspontra, azaz egész koordinátákkal rendelkező pontra essen.

A bemenet egyetlen sorában az N és M számok, a téglalap oldalhosszai találhatók szóközzel elválasztva.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: hányféleképpen lehet lehelyezni a téglalapot a síkra úgy, hogy az egyik csúcsa az origóba, a többi csúcsa rácspontra essen.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`2 2`	`4`
`5 10`	`24`

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 10^6$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $1 \leqslant N \leqslant 100$ esetekre.

Beküldendő egy `is67.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

S. 166. Marika néni palacsintázójában egy ember süti és tölti a palacsintákat. Eddig, ha érkezett egy rendelés, akkor megsütötte a megfelelő számú palacsintát, majd beletöltötte a kért tölteléket, és odaadta a pénztárosnak, aki a fizetést elhanyagolható időn belül elintézte. Az utóbbi időben azonban nagyon népszerű lett a hely, ezért néha nagyon sokat kell várni. Hamar kiderült, hogy a sütés és palacsintatöltés közötti váltás sok időt vesz el. Azt szeretnénk kideríteni, hogy ez valóban probléma-e.

Írjunk programot, amely kiszámolja, mennyi a várakozási idők maximuma, ha minden rendelést külön-külön szolgálunk ki, illetve mennyi a várakozási idők maximumának lehető legkisebb értéke, ha pont jókor váltunk a sütés és töltés között.

Ezen a helyen nem szeretik a pazarlást, így csak akkor állnak neki egy palacsinta megsütésének, ha már van rá leadott rendelés. Tehát olyan nem fordulhat elő, hogy több megsütött palacsintánk van, mint a kiszolgálatlan rendelések összege.

A bemenet első sorában egy palacsinta megsütésének ideje S, egy palacsinta töltésének ideje T, és a kettő közötti váltás ideje V szerepel. A második sorban a rendelések R száma van. A következő R sor mindegyikében két egész szám szerepel: az adott rendelés leadásának időpontja és a kért palacsinták száma.

A kimenet első sorába írjuk ki, mennyi a várakozási idők maximuma, ha a rendeléseket egyesével szolgáljuk ki, azaz mindig csak annyi palacsintát sütünk, amennyi a következő rendeléshez kell. A kimenet második sorába pedig azt, hogy mennyi a várakozási idők maximumának lehető legkisebb értéke.

Minta:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet** (a `/` jel sortörést helyettesít)
`2 1 1 / 2 / 0 5 / 2 1`	`20 / 19`

Magyarázat (zárójelben a befejezési idő szerepel): az első esetben megsütünk 5-öt (`10`), majd megtöltjük (`16`), majd sütünk még egyet (`18`), majd azt is megtöltjük (`20`). A várakozási idő csökkenthető, ha előbb megsütünk 5-öt (`10`), majd mivel van rá rendelés, még egyet (`12`), majd megtöltjük az első ötöt (`18`), majd még egyet (`19`).

Korlátok: $1 \leqslant S, T, V \leqslant 10^4$, $R \leqslant 10^5$. A rendelés ideje és a rendelések számának összege is legfeljebb 10^5. Időlimit: 1 mp.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha a program által adott kimenet első sora helyes. További 40% kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $R \leqslant 10$ és a palacsinták számának összege legfeljebb 20 esetekben.

Beküldendő egy `s166.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. január 15.

❄

Fizika alapszak és fizikatanár-képzés az ELTE TTK Fizikai Intézetében

A világon az egyik legizgalmasabb és legszebb feladat a természet kutatása, működésének megértése. A kutatás egy életre szóló élmény, egy életre szóló kihívás és izgalom. Ugyanakkor a hallgatóink olyan nyitottságot, problémamegoldó készséget is elsajátítanak, amely az élet bármely területén nagyon jól hasznosítható. Az itt végzettek között kiváló, a nemzetközi élvonalban dolgozó fizikusokat találunk, de olyan cégvezetőt is, aki egy patinás Wall Street-i befektetési bank budapesti matematikai modellező csoportját vezeti, vagy például olyan, ma már az USA-ban élő vállalkozót, aki az amerikai légierőnek szállít folyadékkristály-kijelzős sisakokat.

A fizika alapképzés mellett intézetünkben képezzük a fizikatanárok jelentős részét. Aki szereti a fizikát és már most is szereti társait tanítani, ajánljuk figyelmébe a fizikatanár-képzésünket!

Hogy miért érdemes a fizika alapszakot választani?

- **Modern oktatás**

A képzésünk többszintű és sokoldalú. A sokoldalúság abban mutatkozik meg, hogy a harmadik félévvel kezdődően érdeklődési terület szerint specializációt (fizikus, informatikus-fizikus, biofizikus, csillagász, geofizikus, meteorológus) lehet választani.

A képzés közös részében a magas szintű fizikai ismereteken túl matematikát, elektronikát és informatikát is oktatunk. Mivel nincs fizikus kísérletek nélkül, az alapvető fizikai mérési készségeket és magát a kísérletező szemléletet a fizikai laboratóriumi gyakorlatokon lehet elsajátítani. A laborokon a diákok például Raspberry Pi vezérlést használva végzik alapméréseiket, később pedig olyan érdekes fizikai jelenségekkel és berendezésekkel találkoznak, mint a pozitronemissziós tomográfia, a holográfia, a pásztázó elektronmikroszkóp vagy éppen a kvantumradír. A kurzusok egy része két (normál és emelt) szinten végezhető, melyek könnyen átjárhatóak. A normál szint biztosítja, hogy a nem elit iskolából érkező, de motivált hallgatók számára is elsajátítható és élvezhető legyen a tananyag. Az emelt szintű órákon gyorsabb haladást és kiegészítő tartalmakat biztosítunk.

- **Világszínvonalú kutatások**

Az ARWU ranglistát a felsőoktatási szakma évek óta a legmegbízhatóbb értékelések között tartja számon. A 2022-es szakterületi felmérés (Global Ranking of Academic Subjects – GRAS) a korábbiakhoz hasonlóan 5 nagyobb tudományterületen (természettudományok, mérnöki tudományok, élettudományok, egészségtudományok és társadalomtudományok), azon belül 54 szűkebb szakterületen vizsgálta a világ egyetemeit. Az 5000 vizsgált intézmény közül 96 ország 1800 egyeteme került be az idei rangsorba. Egyetemünk a fizika területén szerepelt a legjobban: a 105. helyre került előre, a tavalyi 145. helyről. Így bátran állíthatjuk, hogy az ELTE TTK Fizikai Intézet nemzetközi viszonylatban is kiemelkedő hely a fizika tanulására. Az összes magyar intézet közül itt a legszélesebb a választéka azoknak a területeknek, amelyeket oktatunk és kutatunk. A fizika legmodernebb, legizgalmasabb területeivel foglalkozunk: a gravitációs hullámok kutatásától a részecske- és biofizikán keresztül az asztrofizikáig, a nanotechnológiáig és a kvantumszámítógépekig mindent lefedünk, ami ma érdekes a fizikában. Körülbelül száz oktatónkkal és kutatónkkal, valamint diákjainkkal nagyon sok nemzetközi együttműködésben veszünk részt. A kutatás iránt is érdeklődő diákok számára bejáratott út vezet a tudományos diákköri projektek felé. A diákköri kutatómunkák kiváló alapot adnak a külföldi egyetemeken történő mesterképzésben vagy doktori iskolában történő továbbtanulásra. Az ELTE TTK-n folyó fizikai témájú kutatások sok esetben világszínvonalú kutatóhelyekkel történő együttműködésben valósulnak meg. Diákjaink eljuthatnak a svájci CERN részecskefizikai kutatócentrumba, vagy a LIGO amerikai gravitációshullám-detektor eredményeit elemezhetik.

- **Kitűnő elhelyezkedési lehetőségek**

A fizika tárgy tudása, a felső szintű matematika és a programozási ismeretek, amit a fizika alapszakokon el lehet sajátítani, számos munkahelyen ad lehetőséget a karrier építésére. A fizika szakon végzetteket nemcsak a kutatóintézetekben, egyetemeken várják, hanem például a pénzügyekkel, informatikával, távközléssel, mérnöki vagy orvostudományokkal foglalkozó cégek is szívesen alkalmazzák őket.

- **Hallgatói élet**

Az ELTE TTK hallgatói élete vidám és szerteágazó. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete számos programot szervez a hallgatóinknak. Külföldi diákkonferenciákon vagy cseregyakorlatokon lehet részt venni, szabadidős programok és a fizika tárgyakban felkészítő programok szerepelnek a palettán. A fizika szakokhoz jól szervezett mentorprogram társul. Minden évfolyamon több képzett mentor segít a tárgyak felvétele körüli kérdésekben, az optimális egyetemi stratégiák megtalálásában, és átadják a felsőbb éves diákok által összegyűjtött tapasztalatokat.

A fizika szak nem ér véget a BSc-fokozat megszerzésével. Az ELTE TTK Fizikai Intézetében 5 kétéves mesterképzési (MSc) szakra lehet jelentkezni: fizikus, geofizikus, csillagász, meteorológus, anyagtudomány. A fizikus mesterin belül a kutatófizikus, biofizikus és tudományos adatanalitika és modellezés (ez utóbbi többek között napjaink „forró" témájával, az óriási adathalmazokon végzett kutatásokkal, a „big data"-val foglalkozik) választható. A képzés harmadik szintje az intézetben a négyéves doktori iskola (PhD-fokozat).

Hogy miért érdemes fizikatanár szakot választani?

- **2022-től új rendszerű, 5 éves osztatlan képzés**

2022 szeptemberében indult az új rendszerű fizikatanár-képzés. Az új rendszerben a képzési idő 5 év. Lényegében minden félévben lesz tanítási gyakorlat, és az utolsó félév szinte teljesen középiskolában zajlik. Az ELTE három gyakorlóiskolája is kiváló terep a tanárság komplex elsajátítására. A szakmai és módszertani órákat a Fizikai Intézet kitűnő kutatói-oktatói és a legjobb középiskolai tanárok tartják. Az ELTE nagyon sok szakot indít a fizikával párban, így szinte bármilyen tantárgyat lehet másiknak választani.

- **A tanári pálya szépségei**

Napjainkban igen sok szó esik a tanári pálya nehézségeiről. Miért lehet mégis érdemes a fizikatanári hivatást választani? Mert nagyon sok szépsége is van! Kreatív, változatos, fiatalok között végzett munka. Egy fizikatanárnak hatalmas lehetőségei vannak arra, hogy megmutassa a gyerekeknek a fizikai világ működésének szépségeit.

- **Hallgatói élet**

A Klebelsberg Képzési Ösztöndíj Program keretében egyetemistaként félévente akár 375 000 Ft-ot lehet kapni, mely több különféle ösztöndíjjal is kiegészíthető. Fontos megemlíteni, hogy lehetőség van oktatással kapcsolatos kutatásokba való becsatlakozásra és doktori tanulmányok folytatására a Fizika Tanítása Doktori Program keretében.

A képzések részleteiről az intézet honlapján (`https://physics.elte.hu`) lehet további információkat szerezni, vagy érdemes ellátogatni az ELTE TTK youtube csatornájára (`https://www.youtube.com/ELTETTKbudapest`).

Térből síkba visszalépés fizikai problémák megoldásánál I. rész (tüköráramok)

Megjegyzések és általánosítások a P. 5399. feladat megoldásához[1]

Bevezetés

A közelmúltban egy kilencrészes matematika cikksorozat jelent meg a KöMaL-ban[2], amely olyan bizonyításokat mutatott be, amikor a síkbeli geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Az itt következőkben a fordított utat járjuk be: megmutatjuk, hogy bizonyos térbeli fizikai (áramvezetési) problémák könnyebben kezelhetők, ha valamilyen módon sikerül átfogalmazni azokat síkbeli feladattá. Olyan feladatokkal fogunk foglalkozni, amelyekben vékony fémlemezben folyó áramok szerepelnek, de a fémlemez nem síkban, hanem térben helyezkedik el. Csak olyan eseteket vizsgálunk, amelyekben a térbeli lemez síkba „kiteríthető”. (Ilyen alakzat például egy kúp vagy egy henger palástja.)

A cikk I. részében olyan síkbeli elektromos árameloszlásokat vizsgálunk, amelyek – néhány „tükör” elhelyezésével – könnyen megoldható feladattá válnak. A cikk

[1] A feladatot és annak megoldását lásd Lapunk 565. oldalán.

[2] Kós Géza: Térbe kilépő bizonyítások I–VII. és egy ráadás, *KöMaL* 2019. évi 10. szám – 2020. évi 5. szám

II. részében megismerkedünk egy olyan módszerrel (az ún. konform leképezésekkel), amely akkor is alkalmazható, amikor a tükrözések módszere nem működik.

Néhány fizikai fogalom, jól használható módszerek és hasznos matematikai összefüggések

Áramsűrűség-vektor. Térben kiterjedt elektromos áramot a felületegységenként átfolyó árammal, az áramsűrűséggel jellemezhetjük: $j = I/A$ (A egy kicsiny, a töltések áramlására merőleges felületdarab területe). Az áramsűrűséget vektornak tekintjük, iránya a (pozitív) töltéshordozók mozgási iránya. (Az áramerősség skaláris mennyiség, ami felírható az áramsűrűség-vektor és a felületvektor skaláris szorzataként: $I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$.)

Az Ohm-törvény differenciális alakja. Egy homogén közegben az – általában helyről helyre változó – áramsűrűség arányos az ottani elektromos térerősséggel: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, ahol σ az anyag vezetőképessége, a fajlagos ellenállás (ϱ) reciproka.

Síkbeli áramlások. Ha egy vékony fémlemezbe valahol áramot vezetünk, akkor az áramsűrűség-vektor (az áram bevezetési helyének szűk környezetét leszámítva) a lemez síkjával párhuzamos, és a lemez egy-egy pontjánál a lemezre merőlegesen haladva állandó. Ha a lemeznek valahol (egyenes vagy görbe) határvonala van, azon a vonalon nem folyhat át áram, tehát az áramsűrűség-vektor a határvonalnál érintőirányú. (Ezt a követelményt *határfeltételnek* nevezik.)

Árameloszlások szuperponálhatósága. Ha egy lemezben valamilyen $\Phi_1(\boldsymbol{r})$ elektromos potenciál hatására $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})$ árameloszlás alakul ki, egy másik, $\Phi_2(\boldsymbol{r})$ potenciál hatására $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ az árameloszlás, akkor

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_1(\boldsymbol{r}) + \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

potenciáltérben az árameloszlás

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$$

alakú lesz. A szuperponálhatóság azért valósulhat meg, mert az Ohm-törvény lineáris, az áramsűrűség egyenesen arányos az elektromos térerősséggel.

Tükrözések módszere. Egy véges síkbeli tartomány határfeltételeit bizonyos esetekben úgy biztosíthatjuk, hogy egy (vagy több), a tartományon kívül folyó, elképzelt (fiktív) árameloszlás és a valódi lemezben folyó árameloszlás szuperpozícióját képezzük. Ha például egy „végtelen" félsík alakú lemezbe valahol I erősségű áramot vezetünk, akkor a kialakuló árameloszlás olyan, mintha az áram bevezetési pontjának a félsík határoló egyenesére vett tükörképénél is I áramot vezetnénk be a teljes (végtelen) síklemezbe.

Végtelen síklemezbe vezetett, adott erősségű áram szétoszlása a lemezen. Ha egy nagyon nagy méretű („végtelen"), δ vastagságú lemez O pontjánál I erősségű áramot vezetünk be, akkor a kialakuló áramsűrűség az O ponttól r távolságban

$$|\boldsymbol{j}(r)| = \frac{I}{2\pi r\delta}, \tag{1}$$

és az áramsűrűség iránya mindenhol az O pontból az adott pontba húzott egyenessel párhuzamos, tehát „sugárirányú”. (Ez az elrendezés szimmetriájából következik, és abból, hogy $A=2\pi r\delta$ nagyságú hengerfelületen összesen I erősségű áram folyik át.)

Bizonyos függvények kicsiny változása. Ha pl. az $y=f(x)\equiv K\,x^\lambda$ függvény argumentumát x-ről $x+\Delta x$-re növeljük ($\Delta x\ll x$), akkor a függvény értékének megváltozása

$$\Delta y=K(x+\Delta x)^\lambda-Kx^\lambda=Kx^\lambda\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\lambda-1\right]\approx K\lambda x^{\lambda-1}\cdot\Delta x.$$

(Az utolsó lépésben felhasználtuk a Newton-féle $(1+\varepsilon)^\lambda\approx 1+\lambda\varepsilon$ összefüggést, ami $\varepsilon\ll 1$ esetén tetszőleges λ kitevőre érvényes. Zsebszámológépen kipróbálhatjuk, hogy pl. $1{,}002^{1{,}5}=1{,}003\,001\,5\approx 1{,}003=1+0{,}002\cdot 1{,}5$.)

A kapott közelítő összefüggést így is felírhatjuk:

$$(2)\qquad \frac{\Delta y}{y}\approx\lambda\frac{\Delta x}{x},\qquad\text{ha}\qquad y=K\,x^\lambda.$$

Hasonló megfontolással kaphatjuk meg, hogy az exponenciális függvény növekedése:

$$(3)\qquad \frac{\Delta y}{y}\approx\lambda\cdot\Delta x,\qquad\text{ha}\qquad y=K\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Ezt az összefüggést is érdemes „kipróbálni” egy zsebszámológépen, valamekkora konkrét K, λ, x és Δx esetén.

Megjegyzés. A (3) képlet a radioaktív bomlások exponenciális bomlástörvényéből is ismerős lehet a fizika feladatok megoldóinak a következő jelölésekkel:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}\approx-\lambda\cdot N(t),\qquad\text{ha}\qquad N(t)=N(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

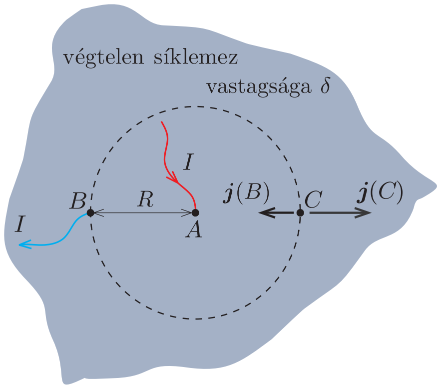
A kúpba vezetett áram eloszlása

A **P. 5399.** feladat megoldásának végeredményét nézve feltűnhet, hogy a C pontban az áramsűrűség ugyanakkora, mintha egy „végtelen” síklemezbe annak A pontjánál I erősségű áramot vezetnénk be, az A ponttól R távolságra lévő B pontból pedig elvezetnénk azt, és a C pont a B pont A-ra vett tükörképe (*1. ábra*).

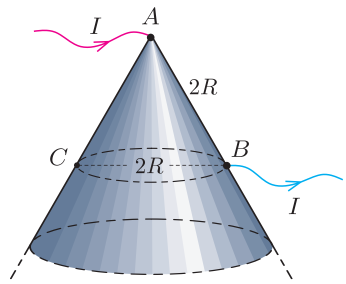
Valóban, ebben az esetben (a megoldás jelöléseit követve):

$$j(C)=j_A(C)-j_B(C)=\frac{I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{R}-\frac{I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{2R}=\frac{I}{4\pi\delta R}.$$

Vajon hogyan módosul az eredmény, ha az eredeti feladat AB távolságát $3R$-ről $2R$-re változtatjuk (*2. ábra*)? A kúppalástot most is felvághatjuk az AC egyenes mentén, majd kiterítve egy félsíkot kapunk. Most is az A pontban bevezetett és a B pontnál elvezetett, I erősségű áram hatását vizsgáljuk a C pont(ok)ban olyan

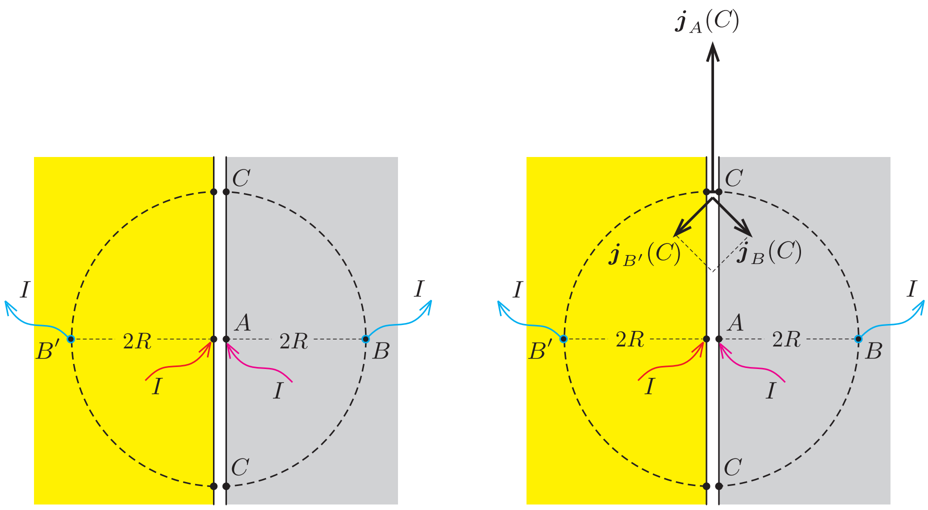


1. ábra



2. ábra

feltétel mellett, hogy az AC egyenesen keresztül ne folyjon áram. Ezt a feltételt úgy teljesíthetjük, hogy az elrendezést tükrözzük az AC egyenesre (így kapjuk a sárga félsíkot), majd az eredő árameloszlást számítjuk ki a C pontban (*3. ábra bal oldali* része).



3. ábra

Az A pontba összesen $2I$ erősségű áram (a valódi és a tükrözött áramok összege) folyik be, így a $2R$ távol lévő C pontban az áramsűrűség:

$$j_A(C) = \frac{2I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{2R} = \frac{I}{2\pi\delta R}.$$

A B és a B' pont egyaránt $\sqrt{2}\cdot 2R$ távol van C-től, tehát a C pontban a megfelelő áramsűrűségek nagysága (lásd a *3. ábra jobb oldali* részét):

$$j_B(C) = j_{B'}(C) = \frac{I}{2\pi\delta R}\,\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2R},$$

az eredőjük pedig az A pont felé mutat, és

$$\left|\boldsymbol{j}_B(C)+\boldsymbol{j}_{B'}(C)\right| = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\boldsymbol{j}_B(C)\right| = \frac{I}{4\pi\delta R}.$$

A teljes áramsűrűség a C pontban:

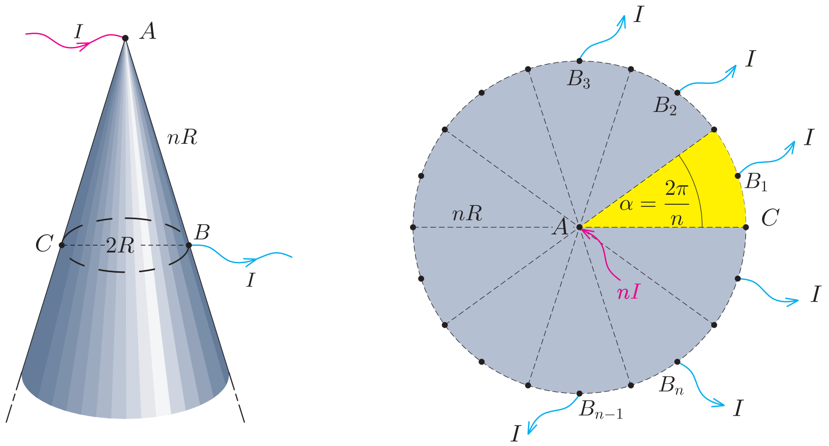
$$j_C = \frac{I}{2\pi\delta R} - \frac{I}{4\pi\delta R} = \frac{I}{4\pi\delta R}$$

nagyságú, iránya pedig A-tól C felé mutat. Ez megegyezik a korábban vizsgált két eset végeredményével.

A feladat általánosítása tükrözéssel megoldható esetekre

Kiváncsiak lehetünk arra, hogy milyen eredményt kapunk a legáltalánosabb, tükrözésekkel megoldható esetben. Legyen az AB távolság nR, ahol n tetszőleges pozitív egész szám.

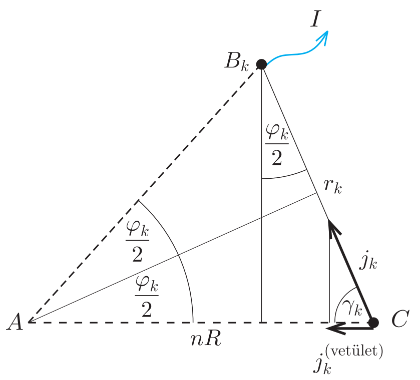
Sejtésünk: Tetszőleges egész n-re ugyanazt az eredményt fogjuk kapni, mint az $n=1,2,3$ esetekben.



4. ábra

A fémlemezt most is felvághatjuk az AC egyenes mentén (*4. ábra*), majd síkba kiterítve egy $\alpha=2\pi/n$ nyílásszögű szögtartományt kapunk. (A jobb oldali ábrán a kiterített kúppalástnak csak azt a részét (a sárga színnel jelölt körcikket) tüntettük fel, amelynek pontjai a kúp csúcsától legfeljebb nR távolságra vannak. A fémlemez természetesen a körcikknek a köríven kívüli részén is folytatódik, hiszen a kúp „nagy méretű” volt, ezt azonban az ábrán nem ábrázoltuk.) A szögtartományt az egyenes oldalai mentén többször tükrözhetjük, így végül a teljes síkot megkapjuk. Az eredeti és a tükrözött terület árameloszlása: az A pontba összesen nI áramot vezetünk be, a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontok mindegyikénél pedig I erősségű áramot vezetünk el. Ezzel elérjük, hogy a sárga szögtartomány egyenes oldalain keresztül nem folyik át áram, azok áramvonalak. Kérdés most az, hogy mekkora az áramsűrűség a C pontban?

Az elrendezés szimmetriája miatt a C pontbeli eredő áramsűrűség AC irányú, elegendő tehát az egyes áramok járulékának AC irányú komponensét kiszámítanunk, majd ezeket összegeznünk kell. A végtelen síkba vezetett áram (1) formulája szerint az A pontból induló áram járuléka:



5. ábra

$$j_A(C) = \frac{nI}{2\pi\delta}\,\frac{1}{nR} = \frac{I}{2\pi\delta R}.$$

Jelöljük a B_kAC szöget φ_k-val (*5. ábra*). Könnyen kiszámíthatjuk, hogy

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha,\ \ \varphi_2 = \frac{3}{2}\alpha,\ \ \dots,\ \ \varphi_k = \frac{2k-1}{2}\,\alpha,$$

de – mint látni fogjuk – ezen szögek konkrét értékére nem is lesz szükségünk.

Tekintsük a B_k pontot, és az onnan elvezetett áram járulékát a C pontbeli áramsűrűséghez. Mivel (az ábra jelöléseivel)

$$B_kC = r_k = 2nR\sin\frac{\varphi_k}{2}, \qquad j_k = \frac{I}{2\pi\delta}\,\frac{1}{r_k},$$

azért a $\boldsymbol{j}_k$ vektornak az $A\to C$ irányú összetevője:

$$j_k^{(\text{vetület})} = -j_k\,\cos\gamma_k = -\frac{I}{4\pi\delta}\,\frac{1}{nR}.$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\gamma_k = 90^\circ - \frac{\varphi_k}{2}$, és így $\cos\gamma_k = \sin(\varphi_k/2)$.

Azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy az elvezetett áramok mindegyikének járuléka a C-beli áramsűrűséghez *ugyanakkora*, tehát az összegük:

$$\sum_{k=1}^{n} j_k^{(\text{vetület})} = n\cdot j_1^{(\text{vetület})} = -\frac{I}{4\pi\delta R.}$$

Ezt az áramsűrűséget hozzáadva az A-pontban bevezetett áram járulékához, végeredményünk:

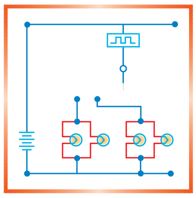
$$j(C) = \frac{I}{2\pi\delta R} - \frac{I}{4\pi\delta R} = \frac{I}{4\pi\delta R},$$

összhangban a korábban (az $n=1,2,3$ eseteknél) kapott eredményekkel.

Ha a geometriai viszonyok olyanok, hogy a felvágott és kiterített kúppalásttal és annak tükrözöttjeivel nem tudjuk hézag- és átfedésmentesen lefedni a teljes síkot, akkor a tükrözések módszere nyilván csődöt mond. A cikk II. részében megmutatjuk, hogy egy alapvetően másfajta eljárás, a konform leképezések módszere még ebben az esetben is eredményre vezet.

Gnädig Péter

Fizika gyakorlat megoldása



G. 783. *Egy homogén, n törésmutatójú, R sugarú üveggömb középpontjában pontszerű fényforrás helyezkedik el. A gömböt kívülről nézzük. Hol látjuk a fényforrás képét?*

(*3 pont*)

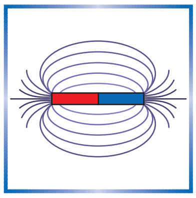
Megoldás. Az üveggömb középpontjából kiinduló fénysugarak sugárirányban haladnak, tehát merőlegesen érkeznek az üveggömb felületére. Ez nulla fokos beesési szögnek felel meg, tehát a fénysugarak törés nélkül haladnak át a felületen.

A gömbből kilépő fénysugarak továbbra is sugárirányban haladnak, tehát a meghosszabbításuk a gömb középpontjában fut össze, itt keletkezik a fényforrás látszólagos (virtuális) képe.

Nagy Csenge (Székelyudvarhely, Tamási Áron Gimn., 9. évf.)

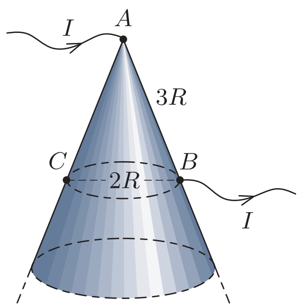
17 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Hiányos (1 pont) 1, hibás 3 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5399. *Egy vékony, δ vastagságú fémlemezből nagy, kúp alakú felületet hegesztettünk össze. A kúp A-val jelölt csúcsába I erősségű áramot vezetünk, majd az egyik alkotón lévő B pontból elvezetjük azt. Határozzuk meg a B-vel átellenes C pontban az áramsűrűség-vektor irányát és nagyságát! Ismert, hogy az AB távolság értéke $3R$, míg a B és C pontok távolsága $2R$.*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbány

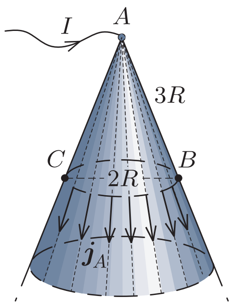


Megoldás. Amikor az elektromos áram egy *vékony* fémlemezben folyik, akkor az áramsűrűség-vektor felületre merőleges komponensét elhanyagoljuk.

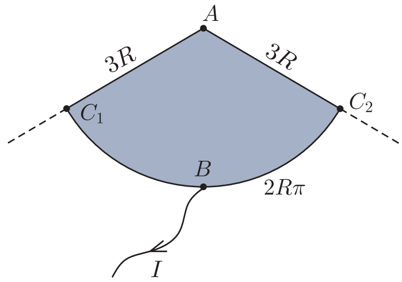
Vegyük észre, hogy az áramok szuperponálhatóak. Úgy fogjuk megoldani a feladatot, hogy először vesszük azt az esetet, amikor csak az A pontban vezetünk áramot a fémbe, de a B pontbeli vezetéket lekapcsoljuk. (Az áram ebben az esetben a kúp nagyon távoli részeinél folyik ki a fémből.) Kiszámoljuk ebben az elrendezésben a C pontbeli áramsűrűséget, majd megismételjük a számolást arra az esetre is, amikor csak a B pontból vezetünk ki áramot (de az nem az A pontnál, hanem a kúp távoli részeinél folyik be a fémbe). A két eredményt összeadva megkapjuk a C pontbeli áramsűrűséget a feladatunkban szereplő elrendezésre. (A távoli részeken ki- és bevezetett áramok „kioltják” egymást.)

(i) Ha csak az A pontnál csatlakozik vezeték a kúphoz, akkor az I erősségű áram szimmetrikusan, a kúp alkotói mentén haladva oszlik szét a fémlemezben. A C pontra illeszkedő, $2R\pi\delta$ területű körgyűrűn összesen I erősségű áram folyik át, tehát az áramsűrűség-vektor nagysága a C pontnál

$$|\boldsymbol{j}_A| = j_A = \frac{I}{2R\pi\delta}.$$



1. ábra



2. ábra

(ii) Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor csak a B pontnál elvezetett árammal számolunk. Vágjuk szét – gondolatban – a kúpot az AC egyenes mentén. (Itt azért vághatjuk szét a lemezt, mert az AC menti vékony sávon keresztül – a szimmetria miatt – sehol nem folyik át áram.)

(*Vigyázat:* Az áramsűrűség eloszlása most nem forgásszimmetrikus, az áramvonalak nem párhuzamosak a kúp alkotóival, az elrendezés csak az ABC síkra való tükrözésre szimmetrikus.)

A felvágott kúpot kiteríthetjük síkba, így valamekkora α nyílásszögű „szögtartományt” (a síknak egy olyan részét, amelyet egy pontban találkozó két félegyenes határol) kapunk (*2. ábra*). Az α szöget a B és C ponton áthaladó körív hosszának és a kör kerületének egyenlősége határozza meg (*2. ábra*). Mivel $AB = 3R$,

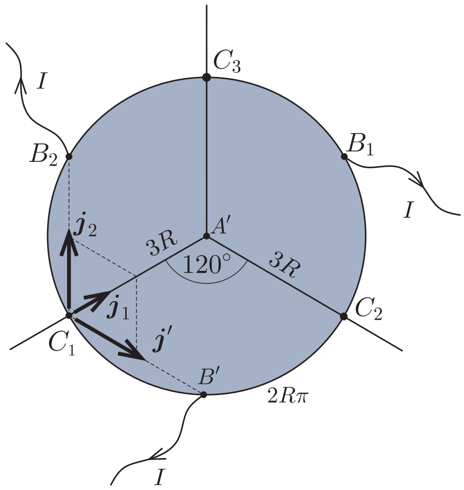
$$3R \cdot \alpha = 2R\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ.$$

Ebben a 120°-os szögtartományban keressük az árameloszlást azzal a határfeltétellel, hogy az AC_1 és az AC_2 félegyenesek áramvonalak legyenek, vagyis az áramsűrűség-vektornak ne legyen a félegyenesekre merőleges komponense.

Tudjuk, hogy egy „végtelen” síklap egyetlen B' pontjába bevezetett áram esetén az áramsűrűség sugárirányú, és a nagysága a B' ponttól r távolságban

$$j(r) = \frac{I}{2r\pi\delta}.$$

Ez azonban nem jó megoldása a feladatunknak, hiszen nem teljesíti a határfeltételt. Alkalmazhatjuk viszont (az elektrosztatika tükörtöltés-módszerének mintájára) a „tüköráramok” módszerét. Egészítsük ki a kigörbített fémlemez 120°-os valós szögtartományát még két ugyanilyen, de fiktív (fémet nem tartalmazó) szögtartománnyal (*3. ábra*), és határozzuk meg a végtelen sík B', B_1 és B_2 pontjából elvezetett, egyenként I erősségű áram eredő áramsűrűség-eloszlását.



3. ábra

A B' pontbeli áram által a C_1 pontban létrehozott áramsűrűség C_1-ből B' felé irányuló,

$$j' = \frac{I}{2\pi\delta \cdot 3R}$$

nagyságú vektor. Ugyanekkora nagyságú a B_2 pontbeli áram $\boldsymbol{j}_2$ járuléka:

$$j_2 = \frac{I}{6R\pi\delta}.$$

A $\boldsymbol{j}'$ és $\boldsymbol{j}_2$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, az eredőjük is $\frac{I}{6R\pi\delta}$ nagyságú, C_1-ből A' felé mutató vektor. Ha ehhez hozzáadjuk a C_1-től $6R$ távolságra lévő B_1 pontból elvezetett áram

$$j_1 = \frac{I}{12\,R\pi\delta}$$

nagyságú járulékát, azt kapjuk, hogy

$$|\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2| = \frac{I}{6R\pi\delta} + \frac{I}{12\,R\pi\delta} = \frac{I}{4R\pi\delta}.$$

Már csak a szuperpozíció maradt hátra, adjuk hát össze a fémkúp A pontjába bevezetett, majd a B pontból elvezetett áramnak megfelelő áramsűrűségvektorokat. Mivel ezek a vektorok ellentétes irányúak, az eredő áramsűrűség nagysága

$$|\boldsymbol{j}| = \frac{I}{2R\pi\delta} - \frac{I}{4R\pi\delta} = \frac{I}{4R\pi\delta},$$

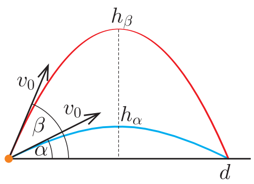
iránya pedig A-ból C felé, tehát az alkotó mentén „lefelé” mutat.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

6 dolgozat érkezett. Helyes Gábriel Tamás és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 3 dolgozat.

P. 5418. *Két különböző szögben, de megegyező kezdősebességgel elrúgott labda azonos távolságban ért földet. A magasabb pályán haladó labda kétszer annyi ideig repült, mint a másik. Hogyan aránylik egymáshoz a két pálya csúcsmagassága? Milyen szögek alatt rúgták el a labdát?*

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*



Megoldás. Legyen az alacsonyabb pályán haladó labda elrúgásának szöge α, a másik labdáé β, kezdősebességük nagysága pedig v_0.

Ferde hajításnál a földet érés távolsága

$$d = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta,$$

vagyis

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta. \tag{1}$$

Mivel $\alpha < \beta < 90°$, (1)-ből következik, hogy

$$2\beta = 180° - 2\alpha, \qquad \text{vagyis} \qquad \beta = 90° - \alpha. \tag{2}$$

A levegőben töltött időtartamok:

$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha \qquad \text{és} \qquad 2t = \frac{2v_0}{g}\sin\beta,$$

ahonnan

$$2\sin\alpha = \sin\beta. \tag{3}$$

Mivel (2) szerint $\sin\beta = \cos\alpha$, (3)-ból következik, hogy $2\sin\alpha = \cos\alpha$, tehát $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, vagyis

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 27° \qquad \text{és} \qquad \beta \approx 63°.$$

A pályák csúcsmagassága (a ferde hajítás összefüggései szerint)

$$h_\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha, \qquad \text{illetve} \qquad h_\beta = \frac{v_0^2}{g}\sin^2\beta,$$

tehát

$$\frac{h_\alpha}{h_\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(90^\circ-\alpha)} = \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{4}.$$

Elekes Dorottya (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn., 10. évf.)

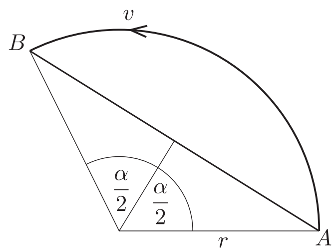
100 dolgozat érkezett. Helyes 66 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 23, hibás 2, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5419. *Vízszintes síkon egyenletesen,* 6 m/s *nagyságú sebességgel mozgó pontszerű test gyorsulásának nagysága állandó. A test pályájának A és B pontja közé eső útja* 1,2*-szerese az elmozdulásvektor nagyságának. Ezt az utat a test* 2 *másodperc alatt teszi meg. Mekkora a gyorsulása?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

Megoldás. Egyenletes sebességgel, állandó nagyságú gyorsulással mozgó test vagy egyenesen, vagy körpályán halad. Jelen esetben (mivel az elmozdulás nem egyezik meg a megtett úttal) a mozgás biztosan egyenletes körmozgás.

Az A és B pont közötti körív hossza $\widehat{AB} = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\ \mathrm{s} = 12\ \mathrm{m}$, ami az AB szakasz hosszának 1,2-szerese, a test elmozdulása tehát 10 m.



Jelöljük a körpálya sugarát r-rel, a körív (radiánban mért) középponti szögét pedig α-val. Az *ábráról* leolvashatjuk, hogy az elmozdulás nagysága

$$AB = 2r\sin\frac{\alpha}{2},$$

a körív hossza pedig $\widehat{AB} = \alpha r$. Ezek szerint fennáll, hogy

$$\frac{6}{5}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

ami az $x = \frac{\alpha}{2}$ jelöléssel így írható:

$$\sin x = \frac{5}{6}x. \tag{1}$$

Ezt a trigonometrikus egyenletet megoldhatjuk numerikusan, internetes megoldóprogrammal: $x = 1{,}0267$, tehát $\alpha = 2{,}053$ (rad) $\approx 118^\circ$.

Megjegyzés. Az (1) egyenlet közelítő megoldását úgy is megkaphatjuk, hogy a szinuszfüggvényt

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

módon közelítjük. Ha a hatványsornak csak az első két tagját vesszük figyelembe, a megoldás $x = 1{,}00$ lesz. Ha a sorfejtésben az x^5-es tagnál állunk meg, úgy x^2-re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásból $x = \sqrt{10 - \sqrt{80}} = 1{,}027$ adódik. Ez 3 tizedesjegyre megegyezik a „pontos" eredménnyel.

A körpálya sugara:

$$r = \frac{12\ \mathrm{m}}{\alpha} = 5{,}84\ \mathrm{m},$$

a kérdezett centripetális gyorsulás pedig

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(6\ \mathrm{m/s})^2}{5{,}85\ \mathrm{m}} = 6{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(*Több dolgozat alapján*)

80 dolgozat érkezett. Helyes 46 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 11, nem versenyszerű 4 dolgozat.

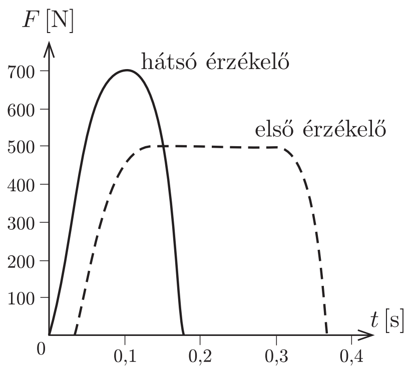
Fizikából kitűzött feladatok

M. 418. Mérjük meg egy labda (pl. focilabda, pingponglabda vagy teniszlabda) tehetetlenségi nyomatékát lejtőn történő legurítással! Adjuk meg az eredményt mR^2 egységben is (R a labda sugara, m a tömege). Lehet-e következtetni a mérés eredményéből a labda falvastagságára?

(*6 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

G. 797. Felfújt léggömböt nyitott manométerre húzunk. A manométer két szárában a petróleum szintjének különbsége 72 cm. Hány mm lenne a szintkülönbség, ha a manométerben higany lenne? Mekkora a léggömbben uralkodó túlnyomás?

(*3 pont*)



G. 798. A százméteres síkfutás versenyzői térdelőrajtból indulnak. Az *ábra* azt mutatja, hogy mekkora vízszintes erő hat a rajtgépbe épített első és hátsó érzékelőre egy 70 kg tömegű atléta indulásakor. Becsüljük meg, hogy mekkora sebességgel hagyja el a sportoló a rajtgépet!

(*3 pont*)

G. 799. Legalább mekkora sebességgel és legfeljebb mekkora szög alatt kell indítani egy testet, hogy átrepüljön egy 100 méter hosszú, 5 méter magas, egyenes alagúton?

A légellenállás elhanyagolható.

(*3 pont*) Közli: *Ringler András*, Szeged

G. 800. Egy gyűjtőlencse egy bizonyos helyen lévő tárgyról N_1 nagyítású, valódi képet hoz létre. Ha a tárgyat az optikai tengely mentén d távolsággal messzebb visszük a lencsétől, a nagyítás N_2 lesz.

Mekkora a lencse fókusztávolsága?

(*4 pont*)

P. 5445. Egy M tömegű robbanó lövedéket α szög alatt v_0 kezdősebességgel lőttek fel. Pályájának tetején a lövedék m_1 és m_2 tömegű részre robbant, és az m_2 tömegű rész ebben a pillanatban szabadesésbe kezdett.

a) Milyen messze lesz egymástól a lövedék két darabja, amikor mindkettő talajt ért?

b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódnak a talajba?

(*Adatok:* $M=0{,}6$ kg, $m_1=0{,}2$ kg, $\alpha=60^\circ$, $v_0=100$ m/s. A légellenállást hanyagoljuk el.)

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

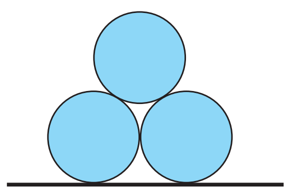
P. 5446. Két diák egy mutatványra készül. A sportpályán egymástól bizonyos d távolságra lévő focilabdákat egyszerre megrúgják úgy, hogy a labdák a levegőben találkozzanak. Az egyik diák $v_1=20$ m/s, a másik $v_2=10$ m/s sebességgel lövi el a labdát, de a kezdősebesség irányát szabadon megválaszthatják. Legfeljebb mekkora kezdeti $d_{\max}$ távolságra lehet egymástól a két labda ahhoz, hogy a mutatvány sikerüljön?

(A légellenállás hatását hanyagoljuk el.)

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5447. Három egyforma, 5 cm sugarú jéghengert készítünk, és azokat az *ábrán* látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük. A súrlódás mindenhol elhanyagolható.

Mekkora gyorsulással indulnak el a jéghengerek?



(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5448. Eduárd szerint oldalszélben (a haladási irányra pontosan merőleges szélben) körülbelül ugyanolyan nehéz biciklizni, mint szélcsendben. Az oldalszél ugyanis csak oldalra akarja nyomni a kerékpárt, ami nem lassít, legfeljebb egy kicsit bedőlve kell egyenesen is haladni, az érzékelt szembeszél pedig mindkét esetben egyforma. Vajon igaza van-e Eduárdnak?

(*4 pont*) Közli: *Bodor András,* Budapest

P. 5449. Egy 20 cm hosszú, 3 cm^2 keresztmetszetű rézrudat jó hőszigetelő köpeny vesz körül. A rudat függőlegesen tartjuk, és az egyik végét olvadó jeget tartalmazó pohárba lógatjuk; így azt folyamatosan 0 °C hőmérsékleten tartjuk. Hány fokra melegszik fel a rúd másik vége, ha azt egy kicsiny, 100 W teljesítményű fűtőszálas tekerccsel melegítjük? (A szükséges anyagi állandókat táblázatokban, vagy az interneten megtalálhatjuk.)

(*3 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5450. Az $f = 5$ cm fókusztávolságú gyűjtőlencse optikai tengelyén, a lencsétől jobbra 30 cm-re és balra 18 cm-re található, pontszerűnek tekinthető szentjánosbogarak elkezdenek egymás felé mozogni 2 cm/s sebességgel. Mennyi idő múlva kerül fedésbe egymással a két bogár képe?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5451. Egy garázs váltóáramú ellátását háromfázisú betáplálással oldják meg. Ehhez öteres kábelt használnak, mind az öt ér azonos anyagú és keresztmetszetű. Az egyik vezeték (zöld-sárga) az érintésvédelmi föld, amin hibamentes használat esetén nem folyik áram. A (kék) nullvezető potenciálja mindig nulla, gyakorlatilag mindig földpotenciálon van. A három fázisvezetőben (barna, fekete és szürke) olyan módon változik a szinuszos potenciál, hogy az effektív érték 230 V, és bármely két fázisvezető potenciálja között 120°-os a fáziskülönbség. Az egyes fázisvezetők és a nullvezető közé ohmos fogyasztókat kapcsolunk.

a) Mekkora effektív feszültséget mérhetünk két különböző fázisvezető között?

b) Mekkora a nullvezető effektív árama, ha két fázisvezetőben 10–10 A áram folyik, de a harmadik fázisvezetőn nem folyik áram?

c) Mekkora a nullvezető effektív árama, ha mind a három fázisvezetőkben 10 A áram folyik?

d) Mekkora a nullvezető legkisebb és legnagyobb effektív árama, ha egyik fázisvezető effektív árama se haladja meg a 10 A-es értéket?

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5452. Egy egyenes pályán haladó fotonrakéta tömege induláskor m_0. Adjuk meg a rakéta sebességét a nyugalmi tömeg pillanatnyi értékének a függvényében!

(Lásd még a P. 5426. feladatot a *KöMaL* 2022. szeptemberi számában.)

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

P. 5453. Az $r=0{,}2$ m sugarú, töltetlen fémgömb középpontjától $d=0{,}5$ m távolságra egy Q nagyságú ponttöltés helyezkedik el. Határozzuk meg (akár numerikus számítással), hogy a ponttöltéstől nézve mekkora szög alatt látszanak a fémgömb azon pontjai, ahol a felületi töltéssűrűség zérus!

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

Beküldési határidő: 2023. január 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 9. December 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 542): **K. 744.** I have 1000 forints (HUF, Hungarian currency) in my pocket. If I buy two sandwiches and one soft drink then I will have as many forints remaining as the amount I should add to my 1000 in order to be able to buy three sandwiches and one soft drink. Two sandwiches and two soft drinks cost 1100 forints. What is the price of one sandwich, and what is the price of one soft drink? **K. 745.** In a game, players are collecting points. The players take turns in playing and scoring points. When a certain player is playing, he or she may get any non-negative integer of points (including 0). The points scored by a player in successive turns add up. The game terminates when the total of the points scored by the players reaches 1000 (that is, the last player may only score as many points as needed to make the total equal to 1000). The player with the largest number of points will win the game. In the case of equality, the player reaching the same score earlier will win. The player with the second largest number of points will finish in the second place, and so on. At the moment, the scores of the players are as follows: Kate has 314 points, Sam has 207 points, John has 58 points, Gillian has 31 and Joe has 0. *a*) If it is Kate's turn now, what is the minimum number of points she needs to gain in this turn in order to be certain that she will finish in the first or second place? *b*) If it is Sam's turn now, what is the minimum number of points he needs to gain in this turn in order to be certain that he will finish in the first or second place? *c*) If it is Joe's turn now, what is the minimum number of points he needs to gain in this turn in order to be certain that he will finish in the first or second place? **K. 746.** In a certain small country, citizens are charged for gas consumption as follows: in the first year of the new regulations, the first 1700 m^3 of gas costs 100 pennies/m^3, and any further consumption costs 750 pennies/m^3. From the following year onwards, the quantity sold for the reduced price is determined each year from the nationwide average consumption of the previous year. John Average lives in this country, and he used gas with these conditions for a year. Then he realized that he was paying too much, and decided to economise with the gas used in his household. He succeeded in reducing his consumption by 10% in the following year. However, since everyone was trying to save money, the mean consumption decreased by 15%. Although John Average used less gas than previously, he still had to pay more (for the whole year) than in the previous year. What may have been John's consumption during the first year? **K/C. 747.** A forty-sided polygon is divided into two polygons by one of its diagonals. The two polygons altogether have 298 fewer diagonals than the forty-gon. How many sides do these polygons have? **K/C. 748.** The integers 1 to 100 are written along the circumference of a circle. First every even number is connected to each odd number that is smaller than the even number. Then every odd number is connected to each even number that is smaller than the odd number. How many connecting lines are drawn?

New exercises for practice – competition C (see page 544): **Exercises up to grade 10: K/C. 747.** See the text at Exercises **K. K/C. 748.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1743.** Seven natural numbers form an arithmetic sequence with a common difference of 30. Show that exactly one of the numbers is divisible by 7. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1744.** In a triangle ABC, $\angle CAB = 45^\circ$ and $\angle ABC = 60^\circ$. D is a point of the line segment AB. The circumscribed circle of triangle CAD passes through the orthocentre of triangle ABC. Without the use of trigonometry, find the exact value of the ratio $\frac{AD}{BD}$. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1745.** Solve the equation $x^2 + 8x - y = \frac{y-5}{y+6}$, where x, y are integers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1746.** Side AB of a square $ABCD$ is extended beyond point A by the line segment $AE = 2$, and beyond point B by the line segment $BF = 3$. Lines ED and FC enclose an angle of 45°. Determine the possible values of the length of the sides of the square. (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **C. 1747.** Let $n \geqslant 3$ be a positive integer, and let k be the sum of the digits in the number $10^n - 4!$. What is the sum of the digits in the number $\frac{10^{n+1}-7}{3}$? (Proposed by *M. Szalai,* Szeged)

New exercises – competition B (see page 545): **B. 5278.** In Noname School of Nowhere, the graduating class consists of four groups, each specializing in a different subject: math, physics, chem and bio. On day, they are all sitting around a large round table in the school cafeteria: everyone has someone sitting directly opposite them, and everyone has neighbours sitting right next to them on either side. However a student is selected, it is observed that this student, the two neighbours, and the one sitting straight across the table all belong to different groups. How many students may there be in the graduating class if there are less than 20 of them? (*3 points*) (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **B. 5279.** Two circles are drawn inside a right angle. One circle touches one of the arms at point A, and the other circle touches the other arm at point B. The circles also touch each other at point C. What is the measure of $\angle ACB$? (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5280.** Let $a > 2$, b and c be real numbers. Consider the three statements below. (1) The equation $ax^2 + bx + c = 0$ has no real solution. (2) The equation $(a-1)x^2 + (b-1)x + (c-1) = 0$ has 1 real solution. (3) The equation $(a-2)x^2 + (b-2)x + (c-2) = 0$ has 2 real solutions. *a*) Given that statements (1) and (2) are true, can we conclude that statement (3) is also true? *b*) Given that statements (2) and (3) are true, can we conclude that statement (1) is also true? (*4 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5281.** Let $d > 1$ denote a positive integer. Prove that there exists a positive integer that has the same number of factors divisible by d as factors not divisible by d. (*5 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5282.** In an acute-angled triangle ABC, the foot of the altitude drawn from vertex A is T. The projection of T on side AB is D, and its projection on side AC is E. Let F be the intersection of side BC and the circle ABE that is different from B. Analogously, let G be the intersection of side BC and circle ACD, different from C. Show that $TF = TG$. (*5 points*) (Proposed by *G. Kós,* Budapest) **B. 5283.** A convex quadrilateral N contains a circular disc of radius r. Show that the perimeter of N is at least $8r$. (*4 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva) **B. 5284.** Let $n>2$. Alan has selected an edge of the complete graph of $2n$ vertices. Paula wants to find out which. If she pays 1 forint (Hungarian currency, HUF) she may name any pairing of all vertices and ask whether the selected edge is contained in it. What is the minimum number of forints that Paula needs to have in her pockets in order to be certain that she can find out the selected edge by asking the appropriate questions? (*6 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest) **B. 5285.** In an acute-angled triangle ABC, $AB=AC$. Points A', B' and C' are moving along the circumscribed circle of the triangle, so that triangle $A'B'C'$ always remain congruent to triangle ABC, and have the same orientation. Let P be the intersection of lines BB' and CC'. Show that the lines $A'P$ all pass through a certain point. (*6 points*) (Proposed by *G. Kós,* Budapest)

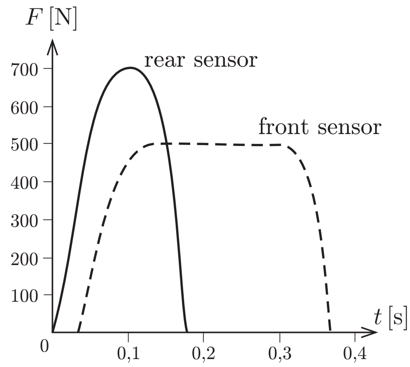
New problems – competition A (see page 546): **A. 839.** We are given a finite, simple, non-directed graph. Ann writes positive real numbers on each edge of the graph such that for all vertices the following is true: the sum of the numbers written on the edges incident to a given vertex is less than one. Bob wants to write non-negative real numbers on the vertices in the following way: if the number written at vertex v is v_0, and Ann's numbers on the edges incident to v are $e_1, e_2, \ldots, e_k$, and the numbers on the other endpoints of these edges are $v_1, v_2, \ldots, v_k$, then $v_0=\sum_{i=1}^{k} e_i v_i + 2022$. Prove that Bob can always number the vertices in this way regardless of the graph and the numbers chosen by Ann. (Proposed by *Boldizsár Varga,* Verőce) **A. 840.** The incircle of triangle ABC touches the sides in X, Y and Z. In triangle XYZ the feet of the altitude from X and Y are X' and Y', respectively. Let line $X'Y'$ intersect the circumcircle of triangle ABC at P and Q. Prove that points X, Y, P and Q are concyclic. (Proposed by *László Simon,* Budapest) **A. 841.** Find all non-negative integer solutions of the equation $2^a+p^b=n^{p-1}$, where p is a prime number. (Proposed by *Máté Weisz,* Cambridge)

Problems in Physics

(see page 570)

M. 418. Measure the rotational inertia of a ball (e.g. football, table tennis ball or tennis ball) by rolling it down a slope. Give the result also in units of mR^2 (where R is the radius of the ball, m is its mass). Can the result be used to infer the thickness of the wall of the ball?

G. 797. An inflated balloon is attached to the open end of a liquid-column manometer. The difference in the level of petroleum in the two arms of the manometer is 72 cm. How many mm would the difference in level be if the manometer contained mercury? What is the gauge pressure (excess pressure) in the balloon? **G. 798.** In a 100 m flat race, the competitors will start from a kneeling start. The *figure* shows the horizontal force applied to the front and rear sensors in the starting machine when an athlete weighing 70 kg starts. Estimate the speed at which the athlete leaves the starting machine. **G. 799.** What is the minimum speed and maximum angle at which a body must be launched in order that it flies through a 100 metre long and 5 metre high straight tunnel? The air drag is negligible. **G. 800.** An object is located at a certain distance from



a converging lens, which forms the real, inverted image of the object of magnification N_1. When the object is placed further from the lens, with a distance of d along the principal axis of the lens, the magnification becomes N_2. What is the focal length of the lens?

P. 5445. An explosive projectile of mass M was fired at an angle of α and at an initial speed of v_0. At the top of its trajectory, the projectile exploded into two parts of masses m_1 and m_2, and the part with mass m_2 started to fall freely at this moment. *a*) How far apart will the two parts hit the ground? *b*) What are the velocities of the two parts at their impact with the ground? (Determine both the speed and the direction of he velocity.) (*Data:* $M=0.6$ kg, $m_1=0.2$ kg, $\alpha=60^\circ$, $v_0=100$ m/s. Air drag is negligible.) **P. 5446.** Two students prepare for a stunt. At the same moment they both kick a football, that are at a certain distance d apart on a sports field, so that the balls meet in the air. One student kicks the ball at $v_1=20$ m/s and the other at $v_2=10$ m/s, but they can both decide on the direction of the initial velocity. What is the maximum initial distance $d_{\max}$ between the two balls for the stunt to succeed? (Air drag is negligible.) **P. 5447.** Three identical cylinders of radius 5 cm are made of ice and they are released without initial speed from the position shown in the *figure.* Friction is negligible everywhere. What is the acceleration at which the ice cylinders start moving? **P. 5448.** According to Edward, riding the bicycle in crosswind (wind which blows perpendicularly to the direction of the motion) is about as hard as to ride the bicycle when there is no wind. The crosswind pushes the bike only sideways, which doesn't slow you down. You just have to lean a little to go straight, and the headwind you're feeling is the same in both cases. Is Edward right? **P. 5449.** A 20 cm long copper rod with a cross section of 3 cm^2 is surrounded by a good insulating sheath. The rod is held vertically and suspended at one end such that the other is in a glass containing melting ice; thus it is kept at a constant temperature of 0 °C. To what temperature does the other end of the rod warms up when heated with a small 100 W filament coil? (The required constants can be found in tables or on the internet.) **P. 5450.** On the principal axis of a converging lens of focal length $f=5$ cm, there are (point-like) fireflies, which begin to move towards each other at a speed of 2 cm/s. Initially one is 30 cm to the right and the other is 18 cm to the left of the lens. How much time elapses until their images overlap? **P. 5451.** The AC power supply for a garage is provided by a three-phase supply. A five-strand cable is used, with all five strands made of the same material and cross-section. One of the wires (green-yellow) is the protective conductor (ground), on which no current flows in the event of fault-free operation. The neutral conductor (blue) always has a potential of zero, and is practically always at ground potential. In the three phase conductors (brown, black, and grey) the potential is a sinusoidal function of time and varies such that the root-mean-square (rms) value is 230 V. The phase difference between the potentials of any two phase conductors is 120°. Resistors are connected between each phase conductor and the neutral conductor. *a*) What is the rms value of the voltage between two different phase cables? *b*) What is the rms value of the current in the neutral wire if the current in two phase conductors is 10 A, in each, but there is no current in the third phase conductor? *c*) What is the rms current in the neutral wire if the current in each phase wire is 10 A? *d*) What is the minimum and the maximum rms current in the neutral conductor if none of the rms currents in the phase conductors exceed 10 A? **P. 5452.** The initial mass of a photon rocket when it starts moving along a straight path is m_0. Determine the speed of the rocket as a function of the instantaneous rest mass of the rocket. **P. 5453.** There is a point-like charge Q at a distance of $d=0.5$ m from the centre of an uncharged metal sphere of radius $r=0.2$ m. Determine the angle (with respect to the point charge) that is subtended by the points of the metal sphere with surface charge density equal to zero. (Numerical methods are also acceptable.)