b) Mekkora egy tölcsér tömege, ha a falvastagsága mindenhol 1 milliméter, a műanyag sűrűsége 0,92 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$? A műanyag térfogatának kiszámításához használjuk azt a közelítést, amely szerint a tölcsér belső felszínét szorozzuk a falvastagsággal. (*4 pont*)

c) Lézerfénnyel felülről függőlegesen belevilágítunk a tölcsérbe. Mekkora a valószínűsége, hogy a lézerfény a tölcsér alsó nyílásán jön ki? (*3 pont*)

d) 50 darab tölcsérből átlagosan 2 anyaghibásat készít a gyártósor. Mekkora a valószínűsége, hogy 135 darab elkészített tölcsér között van anyaghibás? A választ négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*3 pont*)

8. *a*) Sheldon Cooper kedvenc száma a 73, mert ez a 21. prím és $7\cdot 3$ éppen 21. Sőt, a 73 kettes számrendszerbeli alakja palindromszám, vagyis visszafelé olvasva az eredetivel azonos. Igazoljuk ez utóbbi kijelentést. (*2 pont*)

b) Egy adott alapú, és az ennél 2-vel nagyobb alapú számrendszerben tekintsük a $\overline{345}$ alakú háromjegyű számokat, ezek összege 696_{10}. Adjuk meg az összeadandó számok értékét a 10-es számrendszerben felírva. (*8 pont*)

c) Véletlenszerűen kiválasztunk egy 10-es számrendszerbeli háromjegyű számot. Mekkora a valószínűsége, hogy a szám 9-es számrendszerbeli alakja is háromjegyű? (*6 pont*)

9. *a*) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a következő A ponthalmazt:

$$A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x+3y\geqslant 15\right\}. \qquad (3\ pont)$$

b) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a B ponthalmazt:

$$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-14x-8y+40\leqslant 0\right\}. \qquad (5\ pont)$$

c) Igazoljuk, hogy az $F(-3;-4)$ fókuszpontú $v:\ y=-6$ vezéregyenesű parabola egyenlete $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$. (*4 pont*)

d) Írjuk fel a $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ parabola $(-1;-4)$ pontjába húzott érintőjének egyenletét. (*4 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Megoldásvázlatok a 2022/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

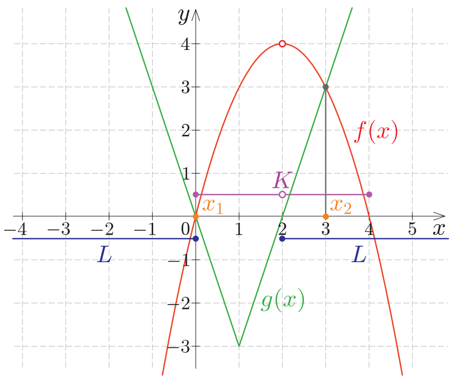
I. rész

1. *Adott az* $f(x)=\frac{(x^2-4x)(2-x)}{x-2}$ *függvény, amelynek értelmezési tartománya* $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, *és a* $g(x)=3|x-1|-3$ *függvény, amelynek értelmezési tartománya* $D_g=\mathbb{R}$.

a) *Oldjuk meg az* $f(x)=g(x)$ *egyenletet.*

A K és L halmazokat értelmezzük a következőképpen: $K := \{x \mid x \in D_f$ *és* $f(x) \geqslant 0\}$; $L := \{x \mid x \in D_g$ *és* $g(x) \geqslant 0\}$.

b) Adjuk meg a $K \cap L$, $K \setminus L$ *és* $(K \cup L) \setminus K$ *halmazokat.* *(12 pont)*



Megoldás. *a)* Ábrázolva a függvényeket, leolvassuk a metszéspontok abszcisszáit, amelyek az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

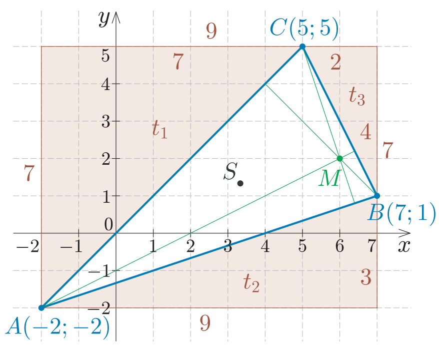
Ellenőrzés: $f(0) = g(0)$; $f(3) = g(3)$. Az algebrai megoldás is a fenti eredményekhez vezet.

b) Szintén az *ábráról* adódik a K és az L halmaz, $K \cap L = \{0\} \cup]2;4]$, illetve $K \setminus L =]0;2[$. Mivel $K \cup L = \mathbb{R}$, ezért $(K \cup L) \setminus K = \overline{K}$, amelyből $\overline{K} =]-\infty;0[\cup \{2\} \cup]4;+\infty[$.

2. *Egy háromszög csúcsai:* $A(-2;-2)$, $B(7;1)$, $C(5;5)$.

a) Mekkora a háromszög területe?

b) Számítsuk ki a háromszög súlypontja és magasságpontja távolságának pontos értékét. *(12 pont)*



Megoldás. *a)* Ábrázoljuk a pontokat, majd foglaljuk téglalapba a háromszöget.

A téglalap oldalai 7 és 9 egység hosszúak, területe 63 területegység. A háromszög körül levágott derékszögű háromszögek területe: bal felsőé $t_1 = \frac{49}{2}$; jobb alsóé $t_2 = \frac{27}{2}$; jobb felsőé $t_3 = 4$, ezért a háromszög területe

$$T = 63 - (t_1 + t_2 + t_3) = 21.$$

b) A súlypont koordinátái:

$$S\left(\frac{-2+7+5}{3}; \frac{-2+1+5}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Az m_c egyenesének egyenlete: $\overrightarrow{AB}(9;3) \Longrightarrow \mathbf{n}(3;1)$, így $3x + y = 20$; az m_b egyenes egyenlete: $\overrightarrow{AC}(7;7) \Longrightarrow \mathbf{n}'(1;1)$, tehát $x + y = 8$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása a magasságpont koordinátáit adja meg, amely $M(6;2)$, tehát az SM távolság:

$$\sqrt{\left(6 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}.$$

3. *a) Határozzuk meg az alábbi kijelentések logikai értékét, állításainkat indokoljuk.*

A) Minden pozitív egész számra teljesül, hogy az összes pozitív osztójának átlaga kisebb a szám felénél.

B) Van olyan n csúcsú teljes gráf, amelynek háromszor annyi éle van, mint az n csúcsú fagráfnak.

b) Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha P és Q, akkor nem R."

c) Tegyük fel, hogy „Ha P és Q, akkor nem R." Igaz-e most a „Ha R, akkor nem P és nem Q." állítás? Válaszunkat indokoljuk. (*13 pont*)

Megoldás. *a)* A) Hamis. Legyen mondjuk a szám a 2, amelynek pozitív osztói az 1 és a 2, ezek átlaga $\frac{3}{2}$, amely nagyobb, mint a szám fele. (Bármely prímszám esetén hasonló a helyzet.)

B) Igaz. A 6 csúcsú teljes gráfnak 15 éle van, míg a 6 csúcsú fagráfnak 5. A 15 éppen háromszorosa az 5-nek.

b) Az állítás megfordítása: „Ha nem R, akkor P és Q."

c) Hamis. Igaz akkor volna, ha „Ha R, akkor nem (P és Q)." lenne, amely egyenértékű a „Ha R, akkor nem P vagy nem Q." állítással (De Morgan azonosság).

4. *A 32 lapos magyar kártya egyik legérdekesebb játéka az ulti. (A magyar kártyában a színek: makk, piros, tök, zöld; színenként ász, király, felső, alsó, 10-es, 9-es, 8-as és 7-es alkotja a 32 lapot.) Ha pl. Bélának a játék elején leosztott 10 lapjából egy ötlapos piros ultija van, ez azt jelenti, hogy nála van a piros hetes és még négy piros, továbbá öt másik, nem piros lap.*

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bélának ötlapos piros ultit osztottak a játék elején?

Képzeljük el, hogy 10 jól megkevert magyar kártyacsomag van előttünk és mindegyikről levesszük a legfelső lapot.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 lapból pontosan 5 piros?

c) Ha az előbbi húzáskor öt piros lapot húztunk, mennyi a valószínűsége, hogy közöttük legalább egy hetes van?

Minden végeredményt négy tizedesjegyre kerekítve adjunk meg. (*14 pont*)

Megoldás. *a)* A piros hetes mellé a maradék hét pirosból kell még négy, ezt $\binom{7}{4}$-féleképpen tudjuk kiválasztani, majd a 24 nem piros lapból ötöt $\binom{24}{5}$-féleképpen választhatunk hozzá, így a kedvező esetek száma:

$$k = \binom{7}{4} \cdot \binom{24}{5} = 1\,487\,640;$$

az összes eset száma pedig: $n = \binom{32}{10} = 64\,512\,240$, ezért az esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{1\,487\,640}{64\,512\,240} = 0{,}0231.$$

b) Egy csomagban 8 piros lap van, ezért egyet húzva $\frac{1}{4}$ annak esélye, hogy a kihúzott lap piros, és $\frac{3}{4}$, hogy nem piros, így a keresett valószínűség:

$$P(B)=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5=0{,}0584.$$

c) Egyszerűbb kiszámolni az esemény komplementerét. Annak a valószínűsége, hogy az öt piros egyike sem a hetes:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^5=0{,}5129,$$

így $P(C)=1-0{,}5129=0{,}4871$.

II. rész

5. *a*) *Vizsgáljuk meg monotonitás és korlátosság szempontjából az*

$$a_n=\frac{n^2+3n+2}{2},\quad n\in\mathbb{Z}^+$$

sorozatot.

b) *Határozzuk meg* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *határértékét, ha* $n\to+\infty$.

c) *Mennyi az* x*, ha a* b_n *sorozatról a következőket tudjuk:* $b_n=\frac{n^2}{2}+x\cdot n$ $(x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+)$*, valamint* $(b_{n+1}-b_n)^2=b_n+b_{n+1}$*?* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) A sorozat szigorúan monoton növekvő, azaz minden n-re $a_{n+1}>a_n$. Nézzük az $a_{n+1}-a_n$ különbséget:

$$\frac{(n+1)^2+3(n+1)+2}{2}-\frac{n^2+3n+2}{2}=n+2>0,$$

ezzel a monotonitásra vonatkozó megállapításunkat igazoltuk. A sorozat alulról korlátos, minden tagja pozitív, egy alsó korlátnak jó pl. a 0 is. (Legnagyobb alsó korlátja az $a_1=3$.) Felülről nem korlátos, azaz minden $K>0$-hoz található n_0 (küszöbindex), hogy minden $n>n_0$ esetén $a_n>K$ teljesül. Egy becsült küszöbindexet adunk meg: $n<n^2$, ha $n\geqslant 2$, ezért $\frac{n+3n}{2}<a_n$; $2n<a_n$, $2n>K$; $n>\frac{K}{2}$ $\to$ $n_0=\left[\frac{K}{2}\right]$.

Megjegyzés: Az „éles" küszöbindex $n_0=\left[\frac{\sqrt{8K+1}-3}{2}\right]$.

b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}},$$

tanult tétel: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Ezt, és a konvergens sorozatok határértékére vonatkozó ismereteket felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

Megoldhatjuk a feladatot közvetlenül a definíció alapján vagy a „rendőrelv” segítségével is.

$$c)\qquad \left[\frac{(n+1)^2}{2}+x(n+1)-\frac{n^2}{2}-xn\right]^2=\frac{n^2}{2}+xn+\frac{(n+1)^2}{2}+x(n+1);$$

$$\left(n+x+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+2xn+n+x+\frac{1}{2};$$

$$n^2+x^2+\frac{1}{4}+2nx+x+n=n^2+2nx+n+x+\frac{1}{2},$$

amelyből rendezés után: $x^2=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{1}{2}$. A kapott két sorozat: $b_n=\frac{n^2+n}{2}$, ha $x=\frac{1}{2}$, vagy $b_n=\frac{n^2-n}{2}$, ha $x=-\frac{1}{2}$.

Megjegyzés: mindhárom sorozat a háromszögszámok sorozata, csak a kezdőelemben különböznek:

$\{a_n\}=3,6,10,15,21,\ldots;\quad \{b_n\}_1=1,3,6,10,15,21\ldots;\quad \{b_n\}_2=0,1,3,6,10,15,21\ldots.$

6. *a) Milyen számjeggyel kezdődik a* 16^{2022} *a tízes számrendszerben felírva és mi az utolsó két számjegye?*

b) Igazoljuk, hogy $2^{2023}+1$ *osztható* 43*-mal.* (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Meghatározzuk a szám normálalakját:

$$16^{2022}=A\cdot 10^n;$$

$$\lg 16^{2022}=\lg(A\cdot 10^n);$$

$$2022\cdot\lg 16=\lg A+n,$$

$$2434{,}730\,605=\lg A+n,$$

amelyből $n=2434$ és $\lg A=0{,}730\,605$. Az előzőek alapján $A=10^{0{,}730\,605}\approx 5{,}38$, tehát $16^{2022}\approx 5{,}38\cdot 10^{2434}$, azaz a szám első jegye 5. A 16 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó számjegye mindig 6, az utolsó előtti pedig periodikusan ismétlődik a következő szabály szerint: $16^{5k}=\ldots 76$, $16^{5k+1}=\ldots 16$, $16^{5k+2}=\ldots 56$, $16^{5k+3}=\ldots 96$ és $16^{5k+4}=\ldots 36$, $k\in\mathbb{Z}^+$. Mivel $2022=5\cdot 404+2$, ezért a 16^{2022} szám 56-ra végződik.

b) $2023=7\cdot 17^2=7\cdot 289$, tehát

$$2^{2023}+1=\left(2^7\right)^{289}+1^{289}=128^{289}+1^{289}=$$
$$=(128+1)(128^{288}-128^{287}\ldots\pm\ldots-128+1)=129\cdot(\text{egész szám})=$$
$$=3\cdot 43\cdot(\text{egész szám}),$$

ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés: itt az $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2\ldots\pm\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ azonosságot használtuk, ahol n pozitív páratlan szám.

7. *Két középiskola sakkbajnokságot rendezett úgy, hogy a versenyzők először a saját iskolájukon belül lebonyolított háziversenyen vettek részt, melynek során mindenki mindenkivel egy partit játszott. Ezután került sor az iskolák egymás elleni küzdelmére, ahol minden versenyző a másik iskola mindegyik versenyzőjével egy mérkőzést vívott. Az egymás elleni mérkőzések száma éppen annyi volt, mint a két háziversenyen összesen.*

a) Iskolánként hányan vettek részt a bajnokságban, ha az egyikben kétszer annyian indultak, mint a másikban?

Két rivális asztalitenisz csapat úgy dönti el, melyikük a jobb, hogy kiválasztják saját maguk közül a legjobbat, majd a két legjobb megküzd egymással a címért. A csapaton belüli kiválasztás ún. egyenes kieséses rendszerben történik, amelyben minden forduló előtt párokba sorsolják a résztvevőket. A pár játszik egy mérkőzést, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Akinek a sorsoláskor nem marad pár, mérkőzés nélkül jut a következő fordulóba. A pingpongban nincs döntetlen, az utolsó mérkőzés győztese lesz a csapat legjobbja. Összesen 24 mérkőzést játszottak, mire kiderült, hogy melyik csapat lett a győztes.

b) Hány játékos nevezett a versenyre az egyik, illetve a másik csapatból, ha az egyikben öttel kevesebben voltak, mint a másikban? *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Tegyük fel, hogy az egyik iskolából n, a másikból $2n$ tanuló nevezett a versenyre. Az első iskola háziversenyén $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, míg a másodikban $\binom{2n}{2}=\frac{2n(2n-1)}{2}$ mérkőzés volt, az egymás elleni partik száma pedig $n\cdot 2n$, így felírhatjuk az

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n(2n-1)}{2}=2n^2, \quad n\in\mathbb{Z}^+$$

egyenletet. Rendezve $n^2-3n=0$, ahonnan $n=3$. Az egyik iskolából hárman, a másikból hatan vettek részt a bajnokságban.

Ellenőrzés: $\binom{3}{2}=3$ és $\binom{6}{2}=15$, így $3+15=3\cdot 6$.

b) Először belátjuk, hogy az egyenes kieséses bajnokságban n induló esetén $n-1$ mérkőzést játszanak, mire megkapják a győztest. Létesítsünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést egy adott meccs vesztese és a mérkőzés között. Minden mérkőzésnek egy és csak egy vesztese van, minden kieső játékos pontosan egy mérkőzésen vesztett, tehát, ha minden veszteshez hozzárendeljük azt a mérkőzést, amelyiken kikapott, létrehoztuk a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Mivel a győztesen kívül mindenki vesztes, ezért $n-1$ vesztes, azaz $n-1$ mérkőzés volt a bajnokságban. Ezek után jelöljük az egyik csapat létszámát $(x-5)$-tel, a másikét x-szel, ekkor az egyik csapat háziversenyén $(x-5)-1$, a másikén $x-1$ mérkőzést játszottak, ha ezek összegéhez hozzáadunk 1-et (a döntőt), akkor megkapjuk a bajnokságban összesen lejátszott mérkőzések számát. $(x-6)+(x-1)+1=24$; ebből $x=15$, tehát az egyik csapat 10, a másik 15 játékossal vett részt a bajnokságban.

Ellenőrzés: $9+14+1=24$.

8. *Egy számtani sorozat első öt tagjának összege* 30; *a sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat három szomszédos eleme.*

a) Mennyi a számtani sorozat első tagja és különbsége?

Egy mértani sorozat tagjaira fennáll, hogy $a_1 + a_3 + a_5 = 182$ *és* $a_2 + a_4 = -60$.

b) Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A sorozat harmadik tagja legyen x, ekkor a tagok rendre $x - 2d$; $x - d$; x; $x + d$; $x + 2d$, összegük $5x = 30$, tehát $x = 6$. A $6 - 2d$; $6 - d$; $6 + d$ egy mértani sorozat egymást követő tagjai, ezért $(6 - d)^2 = (6 - 2d)(6 + d)$, ebből rendezés után $3d(d - 2) = 0$ következik, ahonnan $d_1 = 0$; $d_2 = 2$. Az első esetben $a_1 = 6$, a másodikban $a_1 = 2$.

Ellenőrzés: a számtani sorozat első öt tagja: $6; 6; 6; 6; 6$, illetve $2; 4; 6; 8; 10$.

b) $a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 = 182$ és $a_1q + a_1q^3 = -60$. Ekkor

$$\frac{a_1(1 + q^2 + q^4)}{a_1(q + q^3)} = -\frac{182}{60},$$

amelyből rendezés után az

$$30q^4 + 91q^3 + 30q^2 + 91q + 30 = 0$$

negyedfokú egyenletet kapjuk. Ezt visszavezethetjük másodfokúra, ha mindkét oldalát elosztjuk a nem nulla q^2-nal:

$$30\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 91\left(q + \frac{1}{q}\right) + 30 = 0.$$

Legyen $q + \frac{1}{q} = A$, ekkor

$$A^2 = q^2 + 2q\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}, \quad \text{azaz} \quad q^2 + \frac{1}{q^2} = A^2 - 2.$$

Az egyenlet:

$$30(A^2 - 2) + 91A + 30 = 0, \quad 30A^2 + 91A - 30 = 0.$$

$A_{1,2} = \frac{-91 \pm 109}{60}$, $A_1 = q + \frac{1}{q} = -\frac{10}{3}$ és $A_2 = q + \frac{1}{q} = \frac{3}{10}$. Ez utóbbinak nincs valós gyöke, az elsőből pedig $q_1 = -3$ és $q_2 = -\frac{1}{3}$ származik. A sorozat első tagja $a_{11} = 2$ vagy $a_{12} = 162$.

Ellenőrzés. Az egyik sorozat $2; -6; 18; -54; 162$, a másik ugyanez, fordított sorrendben. Ekkor $2 + 18 + 162 = 182$; $-6 + (-54) = -60$.

9. *Az ABCD téglalap átlói* 30°*-os szöget zárnak be egymással.*

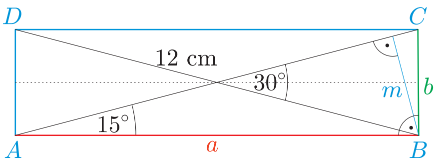
a) Mekkora az AB és BC oldal, ha AC = 12 cm?

b) Milyen messze van a B csúcs az AC átlótól?

Egy $KLMN$ téglalap LN átlója a téglalapot két derékszögű háromszögre bontja. A KLN háromszög K-ból induló magassága, belső szögfelezője és súlyvonala legyen rendre m, f, s.

c) Mekkora szöget zár be egymással az LN átló és a KL oldal, ha $3f^2 = 2ms$?

(16 pont)

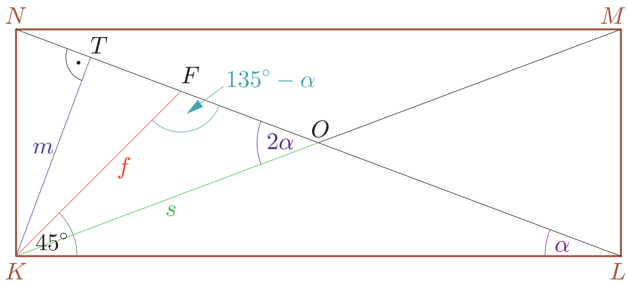


Megoldás. *a*) Az ABC derékszögű háromszögben a $CAB\sphericalangle = 15°$, ezért $\sin 15° = \frac{b}{12}$ és $\cos 15° = \frac{a}{12}$, amelyekből $a = 11{,}59$ cm; $b = 3{,}11$ cm.

b) Az átlók felezik egymást, tehát a félátló 6 cm. Az átlók metszéspontja, a B pont és az m szakasz AC-re eső végpontja egy olyan derékszögű háromszöget alkot, amelynek az m-mel szemközti hegyesszöge 30°, így $\sin 30° = \frac{m}{6} \to m = 3$ cm. A B pont 3 cm-re van az AC átlótól.

c) Az OTK derékszögű háromszögben $\sin 2\alpha = \frac{m}{s}$, $m = s \cdot \sin 2\alpha$. Az OFK háromszögben írjuk fel a szinusztételt:

$$\frac{f}{s} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(135° - \alpha)} \implies f = s \cdot \frac{\sqrt{2}\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha},$$



majd helyettesítsük be ezeket a feladatban megadott képletbe:

$$3 \cdot \left(s\frac{\sqrt{2}\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^2 = 2 \cdot s \cdot \sin 2\alpha \cdot s,$$

$$\frac{3\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1,$$

$$3\sin 2\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha,$$

$$3\sin 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

Rendezve: $2\sin 2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \to 2\alpha = 30°$, $\alpha_1 = 15°$, vagy $2\alpha = 150°$, $\alpha_2 = 75°$. Az LN átló a KL oldallal 15°-os vagy 75°-os szöget zár be.

Németh László
Fonyód