Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

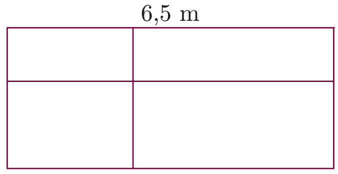
1. *a*) Oldjuk meg a $2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin x = 0$ egyenletet a valós számok halmazán. (*5 pont*)

b) Melyek azok a valós számok, amelyek eleget tesznek az $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$ és a

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenségnek egyaránt? (*8 pont*)

2. Egy adott hosszúságú szakaszt az *aranymetszés* szerint úgy osztunk két részre, hogy az eredeti és a keletkezett hosszabb szakasz hosszának aránya megegyezik a keletkezett hosszabb és a keletkezett rövidebb szakasz hosszának arányával. Bence szobája egyik falának hossza 6,5 méter, magassága 2,8 méter. Ezt a falfelületet Bence úgy szeretné lefesteni, hogy függőlegesen és vízszintesen is az aranymetszésnek megfelelően osztja fel 4 téglalap alakú részre úgy, hogy a bal felső sarok felé legyenek a rövidebb szakaszok.



Bence fala

a) Határozzuk meg az egyes téglalapok területét. A számolás során az oldalak hosszát és a területeket is pontosan 3 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

b) Bencének otthon 4-féle színű falfestéke van, ezekből válogat a fal festése során. Hány különböző színezés lehetséges, ha az oldallal egymáshoz illeszkedő téglalapoknak különböző színűeknek kell lennie? (*4 pont*)

3. A légköri nyomás függ a tengerszinten mérhető nyomás értékétől (p_0), a tengerszint feletti méterben mért magasságtól (h) és a levegő Celsius-skálán mért hőmérsékletétől (T). A hozzárendelés szabálya:

$$p = p_0 \cdot e^{-0{,}0342 \cdot \frac{h}{T+273}}.$$

a) Mekkora a nyomás Bolívia fővárosában, La Pazban 3 600 méter magasságban, ha a tengerszinten 101 500 Pa a nyomás 20 °C-on? (*2 pont*)

b) A Kékestetőn 1 014 méter magasságban hány %-os nyomásváltozás észlelhető, ha a hőmérséklet 8 °C-ról 22 °C-ra emelkedik? (*3 pont*)

c) Milyen magasságban mérhető fele akkora nyomás, mint a tengerszinten, amikor a levegő hőmérséklete 24 °C? (*6 pont*)

4. Az **AB0** vércsoportrendszerben az emberek négy alapvető fenotípusba sorolhatók. A magyarországi populációt figyelembe véve az **A** vércsoportúak a népesség 44%-át teszik ki, a **0** vércsoportúak 40%-ot. A **B** vércsoportúak aránya 11%, míg az **AB** vércsoportúak mindössze 5%-ot adnak. Ettől a csoportosítástól függetlenül a vörösvértestek felszínén található D antigén megléte esetén Rh^{+} vércsoportról beszélünk, a D antigén hiánya esetén Rh^{-} a vércsoport, ahová az emberek 15%-a tartozik.

a) Igazoljuk Réka állítását, aki azt mondja, hogy a Magyarországon élő 9,7 millió lakosból mindössze körülbelül 72 750 ember tartozik a legritkább **AB** Rh^{-} vércsoportba. (*2 pont*)

b) Csengéről tudjuk, hogy van D antigén a vérében. Mekkora valószínűséggel **B** vércsoportú Csenge? Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

c) Készítsünk kördiagramot a szükséges középponti szögek meghatározása után, amely mutatja a magyar embereket vércsoportjuk alapján, figyelembe véve mind az **AB0** rendszert, mind a D antigén meglétét. (*5 pont*)

d) Egy véradásról szóló teltházas előadáson a 150 fős teremben férfiak, nők és gyerekek ülnek. Ha a teremből kimenne 2 férfi, akkor az ott maradó férfiak és nők aránya 2 : 3 lenne. Ha a terembe bejönne még 2 gyerek, akkor a nők pontosan háromszor annyian lennének, mint a gyerekek. Hány nő vett részt ezen az előadáson? (*6 pont*)

II. rész

5. *a*) Elkezdtük összeadni a 7-tel osztva 5 maradékot adó pozitív egész számokat a legkisebb ilyen tulajdonságú számtól kezdve. Hány tagot adtunk össze, és mi az utolsó szám, ha a kapott összeg 54 875? (*4 pont*)

b) Egy mértani sorozat hatodik és nyolcadik tagja egyaránt 6. Számítsuk ki a sorozat első 35 tagjának összegét. (*4 pont*)

c) Egy számtani sorozat három egymást követő elemének összege 72. Ha az első számból elveszünk 4-et, a középsőt változatlanul hagyjuk, az utolsóhoz pedig hozzáadunk 16-ot, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát. (*8 pont*)

6. Tekintsük az $f(x)=\frac{4x-14}{x-2}$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan egész számot, amelyre az $f(x)$ függvény helyettesítési értéke is egész szám. (*2 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy pontosan 8 darab rácsponton halad át az $f(x)$ függvény képe a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben. (*8 pont*)

c) Oldjuk meg a $\sqrt{f(x)}=\sqrt{x-3}$ egyenletet a valós számok halmazán. (*6 pont*)

7. Egy konyhai műanyag tölcsér alsó része henger alakú, belső átmérője 18 milliméter, magassága 5 centiméter. Felső része a hengerre pontosan illeszkedő csonkakúp, amelynek felső átmérője 7 centiméter, illetve magassága 4 centiméter.

a) A tölcsér alját befogjuk, és teljes magasságának 90%-áig megtöltjük vízzel. Hány deciliter víz lesz a tölcsérben? (*6 pont*) *b*) Mekkora egy tölcsér tömege, ha a falvastagsága mindenhol 1 milliméter, a műanyag sűrűsége 0,92 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$? A műanyag térfogatának kiszámításához használjuk azt a közelítést, amely szerint a tölcsér belső felszínét szorozzuk a falvastagsággal. (*4 pont*)

c) Lézerfénnyel felülről függőlegesen belevilágítunk a tölcsérbe. Mekkora a valószínűsége, hogy a lézerfény a tölcsér alsó nyílásán jön ki? (*3 pont*)

d) 50 darab tölcsérből átlagosan 2 anyaghibásat készít a gyártósor. Mekkora a valószínűsége, hogy 135 darab elkészített tölcsér között van anyaghibás? A választ négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*3 pont*)

8. *a*) Sheldon Cooper kedvenc száma a 73, mert ez a 21. prím és $7\cdot 3$ éppen 21. Sőt, a 73 kettes számrendszerbeli alakja palindromszám, vagyis visszafelé olvasva az eredetivel azonos. Igazoljuk ez utóbbi kijelentést. (*2 pont*)

b) Egy adott alapú, és az ennél 2-vel nagyobb alapú számrendszerben tekintsük a $\overline{345}$ alakú háromjegyű számokat, ezek összege 696_{10}. Adjuk meg az összeadandó számok értékét a 10-es számrendszerben felírva. (*8 pont*)

c) Véletlenszerűen kiválasztunk egy 10-es számrendszerbeli háromjegyű számot. Mekkora a valószínűsége, hogy a szám 9-es számrendszerbeli alakja is háromjegyű? (*6 pont*)

9. *a*) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a következő A ponthalmazt:

$$A=\big\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x+3y\geqslant 15\big\}. \qquad (\textit{3 pont})$$

b) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a B ponthalmazt:

$$B=\big\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-14x-8y+40\leqslant 0\big\}. \qquad (\textit{5 pont})$$

c) Igazoljuk, hogy az $F(-3;-4)$ fókuszpontú $v:\ y=-6$ vezéregyenesű parabola egyenlete $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$. (*4 pont*)

d) Írjuk fel a $y=0{,}25x^2+1{,}5x-2{,}75$ parabola $(-1;-4)$ pontjába húzott érintőjének egyenletét. (*4 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Megoldásvázlatok a 2022/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Adott az* $f(x)=\frac{(x^2-4x)(2-x)}{x-2}$ *függvény, amelynek értelmezési tartománya* $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, *és a* $g(x)=3|x-1|-3$ *függvény, amelynek értelmezési tartománya* $D_g=\mathbb{R}$.

a) *Oldjuk meg az* $f(x)=g(x)$ *egyenletet.*