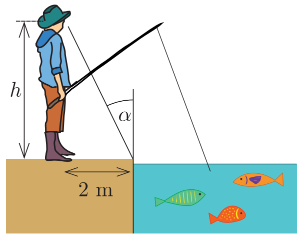
Mivel $\sin\beta \leqslant 1$, megtört (a vízben is terjedő) hanghullám csak akkor alakulhat ki, ha

$$\sin\alpha \leqslant \frac{c_{\text{levegő}}}{c_{\text{víz}}} = 0{,}227, \quad \text{vagyis} \quad \alpha \leqslant 13{,}1^\circ.$$



Ezek szerint az $\alpha_0 = 13{,}1^\circ$-nál nagyobb beesési szögben érkező „hangsugár” már nem hatol be a vízbe, hanem teljes egészében visszaverődik.

A vízparttól 2 méter távolságra lévő ember hangja akkor érne a vízhez α_0-nál kisebb szögben, ha a horgász szája a talajtól számítva legalább

$$h = \frac{2\ \text{m}}{\operatorname{tg}\alpha_0} = 8{,}6\ \text{m}$$

magasan lenne. Ilyen magas ember nincs, tehát a halakat nem zavarja a horgászok beszélgetése.

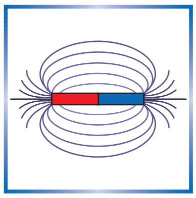
Biró Kata (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A teljes visszaverődés jelensége nem azt jelenti, hogy a hullám semennyire nem jut be a másik közegbe, hanem csak azt, hogy a hullám erőssége (intenzitása) nagyon erősen (exponenciális ütemben) lecsökken, így egy bizonyos „behatolási mélységet” elérve a hangerősség elhanyagolhatóan kicsivé válik. A behatolási mélység nagyságrendileg a hanghullám hullámhosszával egyezik meg, tehát sok méter is lehet, vagyis elképzelhető, hogy a halakat még a parttól viszonylag messze beszélgető horgászok hangja is elriaszthatja.

(*G. P.*)

21 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1 pont) 1, hibás 7 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5386. *Egy* $\alpha = 30^\circ$*-os lejtésű,* $d = 2$ méter *hosszú, szigetelő anyagból készült vályú aljához* $Q = 5{,}55\ \mu\text{C}$ *töltésű kis golyót rögzítünk. A vályú tetejéről* $m = 100$ g *tömegű,* $q = 10\ \mu\text{C}$ *töltésű kis golyót engedünk el. Milyen messzire jut el ez a golyó, ha tisztán gördül? (A mozgása során a golyó töltése nem változik meg.)*

(*3 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

Megoldás. Jelöljük a töltött golyó által megtett utat s-sel. A golyó helyzeti energiája az indulásától a megállásáig

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = -mgs\sin\alpha$$

értékkel változott meg (ennyivel csökkent). A töltött golyó elektrosztatikus potenciális energiája (a Coulomb-energia)

$$\Delta E_{\text{Coulomb}} = k\frac{qQ}{d-s} - k\frac{qQ}{d} = kqQ\frac{s}{d(d-s)}$$

értékkel nőtt. A tiszta gördülés miatt súrlódási energiaveszteség nincs, így az összenergia nem változik meg:

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} + \Delta E_{\text{Coulomb}} = kqQ\frac{s}{d(d-s)} - mgs\sin\alpha = 0.$$

Ennek az egyenletnek $s \neq 0$ megoldása:

$$s = d - \frac{kqQ}{mgd\sin\alpha} = (2\ \text{m}) - \frac{(9\cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)\cdot\left(10^{-5}\ \text{C}\right)\cdot\left(5{,}55\cdot 10^{-6}\ \text{C}\right)}{(0{,}1\ \text{kg})\cdot(9{,}81\ \text{N/kg})\cdot(2\ \text{m})\cdot 0{,}5} =$$

$$= 1{,}49\ \text{m}.$$

A töltött golyó tehát kb. 1,5 m utat tesz meg a vályúban a megállásáig.

Waldhauser Miklós (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

56 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 15, hibás 12, nem versenyszerű 7 dolgozat.

P. 5391. *Egy mély kútba követ ejtünk. A csobbanás hangját* 4,25 s*-mal az elejtés után halljuk meg. Milyen mélynek találjuk a kutat, ha* $g = 10\ \text{m/s}^2$*-tel és* $v_{\text{hang}} = 320\ \text{m/s}$*-mal számolunk? Mekkorának adódik a kút mélysége, ha* $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$*-tel és* $v_{\text{hang}} = 340\ \text{m/s}$*-mal számolunk? (A közegellenállás hatását hanyagoljuk el.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Legyen a kő esési ideje t_1, a csobbanás pillanatától a hang érzékeléséig eltelt idő t_2. Tudjuk, hogy $t_1 + t_2 = T = 4{,}25$ s. A szabadon eső kő és a hang ugyanannyi utat tesz meg:

$$\frac{g}{2}t_1^2 = v_{\text{hang}}(T - t_1),$$

azaz

$$\frac{g}{2}t_1^2 + v_{\text{hang}}t_1 - v_{\text{hang}}T = 0.$$

a) Számoljunk először $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $v_{\text{hang}} = 320\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ adatokkal. A t_1-re vonatkozó másodfokú egyenlet (mértékegységek nélkül):

$$5\,t_1^2 + 320\,t_1 - 1360 = 0,$$

amelynek pozitív megoldása: $t_1 = 4$ (s), és innen a kút mélységére a

$$h = \frac{g}{2}t_1^2 = 80\ \text{m}$$

eredményt kapjuk.

b) Használjuk most a pontosabb $g=9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ és a $v_{\mathrm{hang}}=340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ adatokat. A fenti másodfokú egyenlet (mértékegységek nélkül) most így néz ki:

$$4{,}905\,t_1^2+340\,t_1-1445=0,$$

aminek a pozitív gyöke: $t_1\approx 4{,}02$ (s). A kút mélysége ilyen adatok mellett kb. 79,2 m-nek adódik.

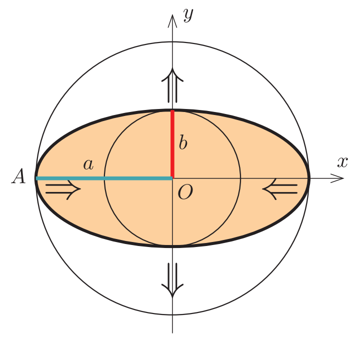
Elekes Dorottya (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn., 9. évf.)

68 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5394. *Egy m tömegű, homogén tömegeloszlású, ellipszis alakú lemez féltengelyeinek hossza a és b. Mekkora a test tehetetlenségi nyomatéka a $2a$ hosszúságú nagytengely végpontján átmenő, a lemez síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva? (A feladat elemi úton is megoldható.)*

(*5 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. Számítsuk ki először az ellipszislemez Θ_O tehetetlenségi nyomatékát az O tömegközéppontján (geometriai középpontján) átmenő, a lemez síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva. Osszuk fel – gondolatban – a lemezt kicsiny m_i tömegű darabkákra, amelyek távolsága a forgástengelytől r_i. Ekkor a tehetetlenségi nyomaték definíciója szerint



$$\Theta_O=\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i r_i^2.$$

Helyezzük el a lemezt egy olyan síkbeli koordináta-rendszerben, amelynek origója a tömegközéppont, tengelyei pedig párhuzamosak az ellipszis tengelyeivel. Mivel a Pitagorasz-tétel szerint $r_i^2=x_i^2+y_i^2$, fennáll

$$\Theta_O=\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i r_i^2=\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i x_i^2+\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i y_i^2.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal első tagja nem függ az y_i koordinátáktól, vagyis hogyha az ellipszist y irányban a/b arányban megnyújtjuk, tehát a sugarú körré alakítjuk, az a tag nem fog megváltozni, vagyis

$$\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i x_i^2=\sum_i^{\text{kör}} m_i x_i^2.$$

De azt is tudjuk, hogy a körlemez szimmetrikus az x és az y tengelyek felcserélése, és így

$$\sum_i^{\text{kör}} m_i x_i^2 = \sum_i^{\text{kör}} m_i y_i^2 = \frac{1}{2}\Theta_O^{\text{körlemez}} = \frac{1}{4}ma^2.$$

Ugyanezt megtehetjük y irányban, b/a arányú nyújtással b sugarú körré alakíthatjuk az ellipszisünket:

$$\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i y_i^2 = \sum_i^{\text{kör}} m_i y_i^2 = \frac{1}{4}mb^2.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\Theta_O = \frac{1}{4}m(a^2+b^2).$$

A feladat nem ezt, hanem az A ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot kérdezte, amit a Steiner-tétel segítségével határozhatunk meg:

$$\Theta_A = \Theta_O + ma^2 = \frac{1}{4}m(a^2+b^2) + ma^2 = \frac{1}{4}m(5a^2+b^2).$$

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Hiányos (2 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

P. 5401. *Egy kicsiny (pontszerűnek tekinthető), de nehéz testet két egyforma hosszú, közel azonos teherbírású fonálon tartunk. A fonalak felső végét egy vízszintes egyenes mentén lassan eltávolítjuk egymástól. Amikor a fonalak* 2α *szöget zárnak be egymással, az egyik fonál elszakad, és a test a másik fonál rögzítettnek tekinthető vége körül ingaként lengeni kezd. Mekkora lehetett* α*, ha a másik fonál a lengések során nem szakad el?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Amikor a fonalak felső végét eltávolítjuk egymástól, a szimmetrikus elrendezés miatt a fonalakat feszítő erők egyforma nagyságúak lesznek:

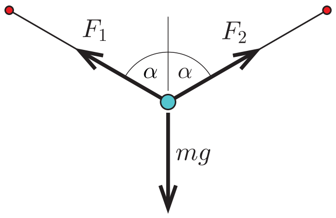
$$F_1 = F_2 = F,$$

ahol F a fonalak szögének növekedtével egyre nagyobb lesz. Ha a kicsiny test tömege m, akkor a függőleges erők egyensúlya miatt az elszakadást megelőző pillanatban (*1. ábra*)

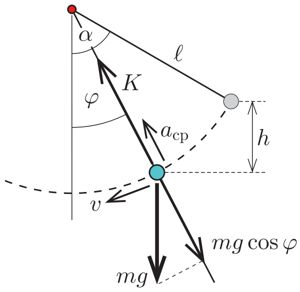
$$mg = 2F\cos\alpha,$$

vagyis a fonalak „szakítószilárdsága"

$$F = \frac{mg}{2\cos\alpha}. \tag{1}$$



1. ábra



2. ábra

(A beküldött dolgozat nem tartalmazott ábrákat, azokkal a jobb érthetőség kedvéért egészítettük ki a megoldást. – A szerk.)

Az egyik fonál elszakadása után a másik test ℓ hosszúságú matematikai ingaként lengeni kezd. Amikor a fonál φ szöget zár be a függőlegessel (*2. ábra*), a test v sebessége az energiamegmaradás tétele segítségével számolható:

$$mgh = mg\ell(\cos\varphi - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Ebben a helyzetben a test centripetális gyorsulása:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{\ell} = 2g(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{2}$$

a nehézségi erő fonálirányú komponense pedig $mg\cos\varphi$. Ha a fonalat valamekkora K erő feszíti, akkor a fonálirányú mozgás dinamikai egyenlete:

$$K - mg\cos\varphi = ma_{\mathrm{cp}},$$

vagyis (2) felhasználásával

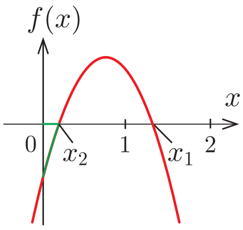
$$K(\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha).$$

Látszik, hogy a fonálban $\varphi = 0$-nál ébred a legnagyobb erő, vagyis amikor a kis test éppen a pálya legalsó pontján halad át:

$$K_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha).$$

A fonál biztosan nem szakad el, ha $K_{\max}$ kisebb, mint az (1) által megadott szakítószilárdság:

$$mg(3 - 2\cos\alpha) < \frac{mg}{2\cos\alpha},$$



3. ábra

vagyis

$$-4\cos^2\alpha + 6\cos\alpha - 1 < 0.$$

Ez $x = \cos\alpha$-ra nézve másodfokú egyenlőtlenség:

$$f(x) \equiv -4x^2 + 6x - 1 < 0.$$

Mivel a fő együttható negatív, a függvény képe egy alul nyitott parabola (*3. ábra*), melynek zérushelyei:

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \approx 1{,}3 \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}19.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\cos\alpha > x_1 > 1$ (ez nyilván értelmetlen), illetve

$$\cos\alpha < x_2 \approx 0{,}19, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha > \arccos x_2 \approx 79^\circ.$$

Ha tehát a széthúzott fonalak szöge az egyik fonál elszakadásának pillanatában legalább 158°, akkor a további lengések során a másik fonál biztosan *nem* fog elszakadni.

Beke Bálint (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., Gimn., 11. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 3, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5407. *A CERN egyik lineáris gyorsítójában kezdetben állónak tekinthető protonokat gyorsítanak* $L = 30{,}0$ m *hosszú úton* $U = 500$ MV *feszültséggel. Feltehetjük, hogy a gyorsítóban az elektromos tér homogén. Mennyi idő alatt teszik meg a protonok az* L *távolságot?*

(*5 pont*) Svájci versenyfeladat

Megoldás. Newton 2. törvénye szerint (ami ebben az alakjában a relativisztikus fizikában is érvényes):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

ahol p a relativisztikus impulzus, $F = e\frac{U}{L}$ pedig az e töltésű protont gyorsító erő. Mivel homogén elektromos erőtérben F állandó, továbbá a protonok kezdősebessége nullának tekinthető, a gyorsítás ideje:

$$T = \frac{pL}{eU},$$

ahol p a felgyorsított proton impulzusa. Feladatunk tehát az, hogy ezt az impulzust meghatározzuk; belőle a gyorsítás ideje könnyen kiszámítható.

A proton (nyugalmi) energiája kezdetben $E_0 = m_0c^2$, a gyorsítás végén pedig

$$E = E_0 + eU = mc^2,$$

ahol m (a szokásos szóhasználattal) a proton „megnövekedett tömege", c pedig a vákuumbeli fénysebesség. A megadott és táblázatból kikereshető adatok szerint

$$m = m_0 + \frac{eU}{c^2} = 2{,}56 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}53\, m_0.$$

Másrészt igaz, hogy

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ahonnan a felgyorsított proton végsebessége:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} = 2{,}274 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ennek megfelelően a keresett időtartam:

$$T = \frac{mvL}{eU} = \frac{(2{,}56 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (2{,}274 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}) \cdot (30\ \mathrm{m})}{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}) \cdot (500 \cdot 10^6\ \mathrm{V})} = 2{,}18 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

A relativisztikus impulzust (a sebesség kiszámítása nélkül) az energia-impulzus relációból is kiszámíthatjuk:

$$E^2 = \left(m_0c^2 + eU\right)^2 = \left(m_0c^2\right)^2 + (pc)^2,$$

ahonnan

$$p = \sqrt{2m_0eU + \left(\frac{eU}{c}\right)^2},$$

a keresett idő pedig

$$T = \frac{L}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{eU}} = 218\ \mathrm{ns}.$$

Kürti Gergely (Kiskunfélegyházi Szent Benedek PG Két Tanítási Nyelvű Technikum és Koll., 12. évf.) és
Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

25 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Gábriel Tamás, Hauber Henrik, Kürti Gergely, Téglás Pannha és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 4, nem versenyszerű 2 dolgozat.