B. 5268. Az ABC háromszög beírt körének középpontját jelölje I. Az ABC háromszög belsejében, az ABI körön vegyünk fel egy P pontot. Az AP egyenes AI-re vett tükörképe az ABI kört az A-n kívül még a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CP = CQ$.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5269. Legyen $p \geqslant 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \ldots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leqslant i \leqslant p$ esetén x_i a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \ldots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \ldots + x_p$.

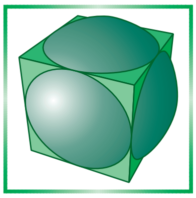
(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (833–835.)



A. 833. A koordináta-rendszer néhány rácspontját kiszínezzük pirosra, a többit fehérre. Egy ilyen színezést *végesen univerzálisnak* nevezünk, ha tetszőleges véges, nemüres $A \subset \mathbb{Z}$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy az (x, k) pont pontosan akkor van pirosra színezve, ha $x \in A$.

a) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezünk pirosra, és minden sort különbözőképpen színezünk meg, továbbá a pirosra színezett rácspontok halmaza összefüggő?

b) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezünk pirosra, továbbá a pirosra és a fehérre színezett rácspontok halmaza is összefüggő?

A rácspontok egy H részhalmazát akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármely $x, y \in H$-ra létezik egy olyan rácsvonalakon haladó út, amely csak H-beli pontokon megy át, és x-et összeköti y-nal.

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

A. 834. Legyen $A_1A_2\ldots A_8$ konvex húrnyolcszög, és $i = 1, 2 \ldots, 8$ esetén $B_i = A_iA_{i+3} \cap A_{i+1}A_{i+4}$ (az indexek modulo 8 értendők). Igazoljuk, hogy a $B_1, \ldots, B_8$ pontok egy kúpszeleten vannak.

A. 835. Jelölje $f^{(n)}(x)$ az f függvény n-szeres iteráltját (azaz $f^{(1)}(x)=f(x)$, $f^{(n+1)}(x)=f\big(f^{(n)}(x)\big)$).

Legyen $p(n)$ egy adott egész együtthatós polinom, amely pozitív egész n-ekre pozitív egész értéket vesz föl. Lehet-e az $f^{(n)}(n)=p(n)$ függvényegyenletnek pontosan egy $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ függvény a megoldása?

Javasolta: *Matolcsi Dávid* és *Szabó Kristóf* (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 571. Sokan szívesen játszanak a pozitív egész számokkal és azok számjegyeivel. Egy játékban a pozitív egészeket egyszerűsítjük több lépésben a következők szerint:

1. Az egyjegyű számokat nem egyszerűsítjük tovább.
2. A nem egyjegyű, de páros számú számjegyből álló számok esetén megvizsgáljuk, hogy a szám utolsó számjegye osztója-e a szám utolsó számjegyének elhagyásával keletkező számnak. Ha osztója, akkor a számot egyszerűsítjük arra számra, amelyet az utolsó számjegy elhagyásával kapunk.
3. A nem egyjegyű, de páratlan számú számjegyből álló számok esetén megvizsgáljuk, hogy a szám első számjegye osztója-e a szám első számjegyének elhagyásával keletkező számnak. Ha osztója, akkor a számot egyszerűsítjük arra számra, amelyet az első számjegy elhagyásával kapunk.

Például az 1208 esetén a 120 osztója a 8, így a számot először a 120-ra egyszerűsítjük, majd a 20-nak osztója az 1, így a következő lépésben 20-ra egyszerűsítjük, végül a 2-nek nem osztója a 0, vagyis tovább nem egyszerűsíthető, így az 1208 egyszerűsítés után 20 lesz.

Készítsünk programot, amely megadja az $[a;b]$ intervallumba eső ($10\leqslant a<b\leqslant 10\,000\,000$) egyjegyű számra egyszerűsíthető pozitív egészek számát. A program a standard bemenet első sorából olvassa be a és b értékét, majd a standard kimenet első sorában adja meg a keresett egészek számát.

Példák:

Bemenet	Kimenet
`20 80`	`15`
`10000 20000`	`415`
`1000000 3000000`	`7831`