A B pontversenyben kitűzött feladatok (5262–5269.)

B. 5262. Lenke leírt egy lapra egy természetes számot, amely nem tartalmaz 0-t, de tartalmaz legalább két különböző számjegyet. Ezután a szám alá leírta az összes olyan számot, amely az eredeti szám jegyei sorrendjének megváltoztatásával létrehozható. Legfeljebb mekkora lehet a lapon szereplő számok legnagyobb közös osztója?

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5263. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege nem kisebb a félkerület négyzeténél.

(*3 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5264. Ketten a következő játékot játsszák. Először Kezdő előírja egy 0–1 sorozat tetszőleges számú (akár végtelen sok) elemét úgy, hogy végtelen sok elem még ne legyen előírva. Ezután Második előírja a sorozat legkisebb indexű még nem előírt elemének értékét. Majd ezeket a lépéseket ismételgetik felváltva a végtelenségig. Kezdő nyer, ha a kapott sorozat valahonnan kezdve periodikus, Második nyer, ha nem az. Van-e valakinek nyerő stratégiája (és ha igen, kinek)?

(*4 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5265. Nagyítsuk kétszeresére egy derékszögű háromszög beírt körét a derékszögű csúcsból. Mutassuk meg, hogy a kapott kör érinti a háromszög körülírt körét.

(*4 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

B. 5266. Néhány focista együtt nyaral. Összesen k klubból és n nemzetből valók, ahol $k<n$. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább $n-k+1$ olyan focista, aki több klubtársával nyaral együtt, mint honfitársával.

(*5 pont*)

B. 5267. Adott egy p és egy q hosszúságú szakasz, valamint egy ABC háromszög, amelynek oldalegyenesei a, b és c a szokásos betűzés szerint. Szerkesszük meg az ABC körülírt körén azt a P pontot, amire P_a a P_bP_c szakaszt $p:q$ arányban osztja, ahol P_x a P pont merőleges vetülete az x oldalegyenesre.

(*5 pont*)

B. 5268. Az ABC háromszög beírt körének középpontját jelölje I. Az ABC háromszög belsejében, az ABI körön vegyünk fel egy P pontot. Az AP egyenes AI-re vett tükörképe az ABI kört az A-n kívül még a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CP = CQ$.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5269. Legyen $p \geqslant 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \ldots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leqslant i \leqslant p$ esetén x_i a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \ldots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \ldots + x_p$.

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (833–835.)

A. 833. A koordináta-rendszer néhány rácspontját kiszínezzük pirosra, a többit fehérre. Egy ilyen színezést *végesen univerzálisnak* nevezünk, ha tetszőleges véges, nemüres $A \subset \mathbb{Z}$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy az (x, k) pont pontosan akkor van pirosra színezve, ha $x \in A$.

a) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezünk pirosra, és minden sort különbözőképpen színezünk meg, továbbá a pirosra színezett rácspontok halmaza összefüggő?

b) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezünk pirosra, továbbá a pirosra és a fehérre színezett rácspontok halmaza is összefüggő?

A rácspontok egy H részhalmazát akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármely $x, y \in H$-ra létezik egy olyan rácsvonalakon haladó út, amely csak H-beli pontokon megy át, és x-et összeköti y-nal.

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

A. 834. Legyen $A_1 A_2 \ldots A_8$ konvex húrnyolcszög, és $i = 1, 2 \ldots, 8$ esetén $B_i = A_i A_{i+3} \cap A_{i+1} A_{i+4}$ (az indexek modulo 8 értendők). Igazoljuk, hogy a $B_1, \ldots, B_8$ pontok egy kúpszeleten vannak.