

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5262–5269.)

B. 5262. Lenke leírt egy lapra egy természetes számot, amely nem tartalmaz 0-t, de tartalmaz legalább két különböző számjegyet. Ezután a szám alá leírta az összes olyan számot, amely az eredeti szám jegyei sorrendjének megváltoztatásával létrehozható. Legfeljebb mekkora lehet a lapon szereplő számok legnagyobb közös osztója?

(3 pont)

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5263. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege nem kisebb a félkerület négyzeténél.

(3 pont)

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5264. Ketten a következő játékot játsszák. Először Kezdő előírja egy 0–1 sorozat tetszőleges számú (akár végtelen sok) elemét úgy, hogy végtelen sok elem még ne legyen előírva. Ezután Második előírja a sorozat legkisebb indexű még nem előírt elemének értékét. Majd ezeket a lépéseket ismételtetik felváltva a végtelenségig. Kezdő nyer, ha a kapott sorozat valahonnan kezdve periodikus, Második nyer, ha nem az. Van-e valakinek nyerő stratégiája (és ha igen, kinek)?

(4 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5265. Nagyítsuk kétszeresére egy derékszögű háromszög beírt körét a derékszögű csúcsból. Mutassuk meg, hogy a kapott kör érinti a háromszög körülírt körét.

(4 pont)

Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

B. 5266. Néhány focista együtt nyaral. Összesen k klubból és n nemzetből valók, ahol $k < n$. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább $n - k + 1$ olyan focista, aki több klubtársával nyaral együtt, mint honfitársával.

(5 pont)

B. 5267. Adott egy p és egy q hosszúságú szakasz, valamint egy ABC háromszög, amelynek oldalegyenesei a , b és c a szokásos betűzés szerint. Szerkesszük meg az ABC körülírt körén azt a P pontot, amire P_a a P_bP_c szakaszt $p : q$ arányban osztja, ahol P_x a P pont merőleges vetülete az x oldalegyenesre.

(5 pont)

B. 5268. Az ABC háromszög beírt körének középpontját jelölje I . Az ABC háromszög belsejében, az ABI körön vegyünk fel egy P pontot. Az AP egyenes AI -re vett tükörképe az ABI kört az A -n kívül még a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CP = CQ$.

(6 pont)

Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5269. Legyen $p \geq 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \dots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leq i \leq p$ esetén x_i a $\{0, 1, \dots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy x_1, \dots, x_p egyforma színűek és $p \mid x_1 + \dots + x_p$.

(6 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

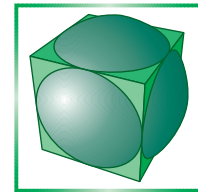
*

Beküldési határidő: 2022. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

*

**Az A pontversenyben kitűzött
nehezebb feladatok
(833–835.)**



A. 833. A koordináta-rendszer néhány rácspontját kiszínezzük pirosra, a többit fehérre. Egy ilyen színezést *végesen univerzálisnak* nevezünk, ha tetszőleges véges, nemüres $A \subset \mathbb{Z}$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy az (x, k) pont pontosan akkor van pirosra színezve, ha $x \in A$.

a) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezzünk pirosra, és minden sort különbözőképpen színezzünk meg, továbbá a pirosra színezett rácspontok halmaza összefüggő?

b) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezzünk pirosra, továbbá a pirosra és a fehérre színezett rácspontok halmaza is összefüggő?

A rácspontok egy H részhalmazát akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármely $x, y \in H$ -ra létezik egy olyan rácsvonalakon haladó út, amely csak H -beli pontokon megy át, és x -et összeköti y -nal.

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

A. 834. Legyen $A_1 A_2 \dots A_8$ konvex húrnyolcszög, és $i = 1, 2, \dots, 8$ esetén $B_i = A_i A_{i+3} \cap A_{i+1} A_{i+4}$ (az indexek modulo 8 értendők). Igazoljuk, hogy a B_1, \dots, B_8 pontok egy kúpszeleten vannak.