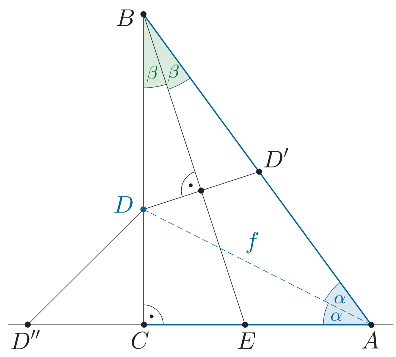
A *3. ábra* jelöléseivel $2\alpha + 2\beta = 90°$, így $\alpha + \beta = 45°$. Egyszerűen belátható, hogy $BD'D\sphericalangle = 90° - \beta$, és ezért

$$AD'D\sphericalangle = 90° + \beta.$$

A $DD''C$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög, tehát $D''DC\sphericalangle = 45°$, és mivel $ADC\sphericalangle = 90° - \alpha$, ezért

$$ADD''\sphericalangle = 90° - \alpha + 45°,$$

ebből $\alpha+\beta = 45°$ alapján $ADD''\sphericalangle = 90° + \beta$ következik.



3. ábra

Az $AD'D$ és ADD'' háromszögek két-két szögének nagysága α és $90° + \beta$, így a háromszögek harmadik szöge is nyilván megegyezik, ez pedig azt jelenti, hogy a két háromszög hasonló. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AD}{AD''}, \quad \text{azaz} \quad AD^2 = AD' \cdot AD''.$$

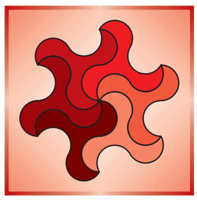
Mivel $AD = f$, $AD' = AB - BD$, illetve $AD'' = AC + CD$, előző eredményünkből $f^2 = (AB - BD) \cdot (AC + CD)$ következik, ez éppen a feladat állítása, hiszen ebből a nyilvánvalóan pozitív $AB - BD$ és $AC + CD$ számok mértani közepe:

$$f = \sqrt{(AB - BD) \cdot (AC + CD)}.$$

(A KöMaL-honlapon is megtalálható a II. megoldás)

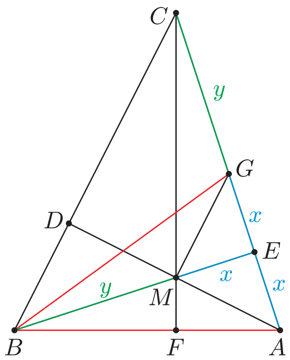
Összesen 116 dolgozat érkezett. 5 pontos 67, 4 pontos 13, 3 pontos 7, 2 pontos 9 dolgozat. 1 pontot 7, 0 pontot 12 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása



B. 5193. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $BCA\sphericalangle = 45°$, a magasságok talppontjai a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, a háromszög magasságpontja M. Tudjuk, hogy az F pont az AB szakaszt $AF : FB = 2 : 3$ arányban osztja. Az AC oldalon megjelöljük azt a G pontot, amelyre $CG = BM$. Mutassuk meg, hogy az ABG háromszög súlypontja M.*

(*4 pont*)



Megoldás. Először azt fogjuk bizonyítani, hogy az ABG háromszögnek BM súlyvonala, majd pedig azt, hogy az M pont harmadolja a BM szakaszt.

Az ADC egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $DAC\sphericalangle = 45°$. Az AME háromszögben E-nél derékszög, E-nél 45°-os szög van, tehát az AME háromszög szintén egyenlő szárú és derékszögű, $AE = ME = x$. Az eredeti ABC háromszögben C-nél 45°-os szög van, így az is azonnal adódik, hogy a BEC háromszög is egyenlő szárú és derékszögű. A feladatban szereplő feltétel alapján $CG = BM = y$. Mivel $y + x = BE = CE = y + EG$, ezért $EG = x$.

Az eddigiek alapján az ABG háromszögben az E pont az AG oldal felezőpontja, ezért BE a súlyvonala, tehát az M pont rajta van a súlyvonalon. Azt kell még belátni, hogy $BM : ME = y : x = 2 : 1$.

Tudjuk, hogy $AF : FB = 2 : 3$. Legyen a számolásainkhoz $AF = 2z$ és $FB = 3z$.

A BFM derékszögű háromszög hasonló a BEA derékszögű háromszöghöz, mert további egy szögük, a B-nél fekvő szög egybeesik. A megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$(1)\qquad \frac{y}{5z} = \frac{3z}{x+y} \iff 15z^2 = y(x+y).$$

Az ACF háromszög is hasonló az ABE háromszöghöz, mert szögeik megegyeznek. Az oldalak aránya itt

$$(2)\qquad \frac{2z}{x} = \frac{2x+y}{5z} \iff 10z^2 = x(2x+y).$$

Az (1) és (2) egyenletekben szereplő számok mindegyike pozitív, a megfelelő oldalak osztásával:

$$\frac{3}{2} = \frac{y(x+y)}{x(2x+y)},$$

$$6x^2 + 3xy = 2y^2 + 2xy,$$

$$6x^2 + xy - 2y^2 = 0.$$

Szorzattá alakítva: $(2x-y)(3x+2y) = 0$. Az x és y szakaszok hosszai, így a második tényező biztosan pozitív, tehát $2x - y = 0 \iff 2x = y$. Ezzel beláttuk, hogy az M pont $2:1$ arányban osztja ketté a BE súlyvonalat, vagyis az M pont az ABG háromszög súlypontja.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., Szeged, 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 97 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 58 versenyző, 3 pontos 16, 2 pontos 13 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 8, 0 pontot 2 tanuló.

B. 5218. *Legfeljebb hány választható ki az első* 2022 *pozitív egész szám közül úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prímszám?*

(*5 pont*)

Megoldás. *Segédállítás:* Nyolc egymást követő egész szám közül legfeljebb kettő választható ki úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prím.

Bizonyítás: Bármely két kiválasztott szám különbsége 1, 4 vagy 6 (mivel 8 egymást követő számról van szó és a különbség nem lehet 2, 3, 5 vagy 7). Tegyük fel, hogy ki tudunk választani hármat úgy, hogy bármelyik kettő különbsége 1, 4 vagy 6. Legyenek ezek a számok $a<b<c$ és legyenek $x=b-a$, $y=c-b$. Ilyenkor x, y, és $x+y$ is az 1, 4, 6 számok valamelyike. Ez nem lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem tudunk kiválasztani három számot.

Az első 2022 pozitív egész számot feloszthatjuk 252 ilyen 8-as csoportra (1–8, 9–16, …, 2009–2016) és egy 6-os csoportra (2017–2022). Egyik csoportból sem választhatunk ki 2-nél több számot. Így összesen nem választhatunk ki $2\cdot 253=$ $=506$-nál több számot.

Példa 506-ra: 4-gyel osztva 1 maradékot adó számok (bármely 2 különbsége osztható 4-gyel, így nem lehet prím).

Így legfeljebb 506 számot választhatunk ki.

Kovács Alex (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. Egy tipikus hiba az volt, hogy a megoldó a helyes konstrukcióból indult ki ($4k+1$ alakú számok halmaza), és azt mondta, hogy több elemet már nem lehet kiválasztani ebből a halmazból. Ez hibás érvelés, mert pl. ha mohó algoritmussal elkezdjük kiválasztani a legkisebb számot, amit még bevehetünk, akkor az $\{1,2,10,11,\ldots\}$ halmazt kapjuk. Így viszont lényegesen kevesebb elemet választunk ki, mint 506, azonban további elemet már nem tudunk a listánkhoz adni.

2. Szintén hasonló hiba, hogy feltették, hogy periodikusan kell kiválasztani a számokat.

3. Egy másik tipikus hiba, hogy lényegeben csak annyit mondtak, hogy ha van két szomszédos szám, akkor utána van legalább hét nem kiválasztható szám. Ez az érvelés azonban nem zárja ki azt az esetet, hogy a választott számok halmaza az $\{1,5,\ldots,2021,$ $2022\}$.

88 dolgozat érkezett. 5 pontos 45, 4 pontos 11, 3 pontos 8, 2 pontos 10, 1 pontos 12, 0 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (734–738.)

K. 734. Sanyi és barátai a focimeccsen az egyik héten 6 zacskó szotyit és 4 zacskó tökmagot vettek, ezért összesen 1900 Ft-ot fizettek. A következő héten 4 zacskó szotyit és 2 zacskó tökmagot vettek, és összesen 1100 Ft-ot fizettek. Egy zacskó szotyi és egy zacskó tökmag ára mindeközben nem változott. Hány forintba került egy zacskó szotyi, illetve egy zacskó tökmag?