Mivel ez a szám is egész, ezért c^4 osztója $a \cdot b^4$-nek. Mivel azonban $\left(c^4; b^4\right) = 1$, ezért az euklidészi lemma miatt c^4 osztója a-nak. Ebből az is következik, hogy $c^4 \leqslant a \leqslant 90$, így c értéke csak 2 vagy 3 lehet.

Ha $c = 2$, akkor a a $c^4 = 16$ többszöröse. Ha $a \geqslant 2 \cdot 16$, akkor $b > c = 2$ miatt

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{32 \cdot 3^4}{2^4} = \frac{32 \cdot 81}{16} = 162 > 90,$$

vagyis ellentmondáshoz jutottunk. Azt kaptuk, hogy $a = 16$ lehet csak.

Ha $b = 3$, akkor ebből kapunk is egy megfelelő számötöst: $16, 24, 36, 54, 81$.

Ha $b \geqslant 4$, akkor viszont

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{16 \cdot 4^4}{2^4} = 16 \cdot 16 = 256 > 90,$$

vagyis nincs több megfelelő számötös, ha $c = 2$.

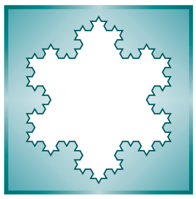
Mi a helyzet, ha $c = 3$? Ekkor $a \geqslant 81$ és $b \geqslant 4$ miatt

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{81 \cdot 4^4}{3^4} = 256 > 90,$$

vagyis ebben az esetben nem kapunk megfelelő számokat.

Találtunk tehát öt olyan számötöst, ahol $q = 2$, egy olyat, ahol $q = \frac{3}{2}$ és egy olyat, amelyben $q = 3$, így összesen 7 megfelelő számötös van.

Erdős Gábor
Nagykanizsa

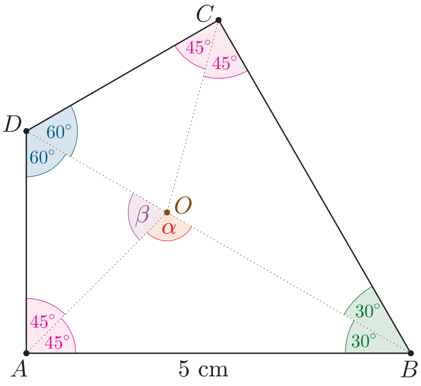


C gyakorlatok megoldása

C. 1680. *Egy négyszög egyik oldalának hossza* 5 cm, *a rajta fekvő két szög* 90° *és* 60°. *Tudjuk továbbá, hogy a négyszög húr- és érintőnégyszög is. Hogyan lehet ezek alapján megszerkeszteni a négyszöget? Írjuk le és indokoljuk a szerkesztés lépéseit (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni).*

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

Megoldás. Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az $ABCD$ négyszögben $AB = 5$ cm és $DAB\sphericalangle = 90°$, illetve $ABC\sphericalangle = 60°$. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, ezért a szemben levő szögeinek összege páronként 180°, így $BCD\sphericalangle = 90°$ és $CDA\sphericalangle = 120°$. A feltétel szerint $ABCD$ érintőnégyszög is, ezért van beírt köre, tehát belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a beírt kör O középpontja.



Tekintsük az *ábrát.*

Az AO szakasz felezi a $DAB\sphericalangle$-et, a BO szakasz pedig felezi az $ABC\sphericalangle$-et, ezért $OAB\sphericalangle = 45°$, illetve $ABO\sphericalangle = 30°$. Ebből azonnal következik, hogy az ABO háromszögben az ábra α szögére $\alpha = BOA\sphericalangle = 105°$. A DO szakasz felezi a $CDA\sphericalangle$-et, ezért $ODA\sphericalangle = 60°$, és így a DAO háromszögben $\beta = AOD\sphericalangle = 75°$.

Eszerint

$$\alpha + \beta = 105° + 75° = 180°,$$

ez pedig azt jelenti, hogy a B, O és D pontok egy egyenesen vannak, vagy másként: a BDA és BDC derékszögű háromszögek közös átfogója a BD szakasz, amelyre illeszkedik az $ABCD$ négyszög beírt körének O középpontja. A BDA és BDC derékszögű háromszögek megfelelő szögei megegyeznek, továbbá a derékszöggel szemben levő BD átfogó közös bennük, ezért ez a két háromszög egyrészt egybevágó, másrészt a BD egyenesére vonatkozóan egymás tükörképei.

Ennek alapján az ABD háromszög megszerkeszthető, hiszen AB adott és a rajta fekvő 90°-os és 30°-os szögek szerkeszthetők.

Az A pontnak a BD átló egyenesére való tükrözésével megkapjuk a négyszög hiányzó C csúcsát.

A szerkesztés a fentiek alapján mindig végrehajtható és csak egy megoldás van.

Bencsik Bendegúz (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 10. évf.)
és mások dolgozata alapján

Összesen 238 dolgozat érkezett. 5 pontos 71, 4 pontos 30, 3 pontos 39, 2 pontos 40, 1 pontos 43 dolgozat. 0 pontot 15 versenyző kapott.

C. 1686. *Az ABC derékszögű háromszög átfogója az AB szakasz. Az A csúcsból kiinduló f belső szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BD$ és $AC + CD$ szakaszok hosszának mértani közepe éppen az $f = AD$ szögfelező hossza.*

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon, legyen $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$. A belső szögfelező tétele szerint

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}.$$

Eszerint van olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy a BD és DC szakaszok hosszára

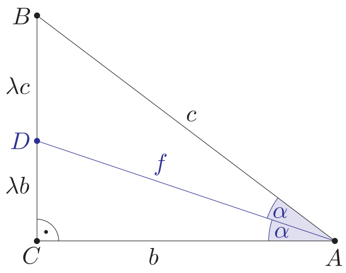
(1) $$BD = \lambda c, \quad DC = \lambda b$$

teljesül. Tekintsük az *1. ábrát.*

Az ABC derékszögű háromszögben felírhatjuk, hogy $\cos 2\alpha = \frac{b}{c}$, az ADC derékszögű háromszögben pedig $\cos\alpha = \frac{b}{f}$, illetve $\sin\alpha = \frac{\lambda b}{f}$.

Felhasználjuk a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ trigonometrikus azonosságot, ezzel

$$\frac{b}{c} = \frac{b^2}{f^2} - \frac{\lambda^2 b^2}{f^2} = \frac{b^2 - \lambda^2 b^2}{f^2}. \tag{2}$$



1. ábra

A (2) egyenlet jobb oldalát átalakítjuk:

$$\frac{b}{c} = \frac{(b-\lambda b)(b+\lambda b)}{f^2} = \frac{b(1-\lambda)(b+\lambda b)}{f^2},$$

ahonnan b-vel való osztás és rendezés után $f^2 = (c-\lambda c)(b+\lambda b)$ következik.

Nyilvánvaló, hogy az ABD háromszögben a D csúcsnál tompaszög van, ezért $c > \lambda c$, vagyis $c - \lambda c > 0$, másrészt $b + \lambda b > 0$, tehát

$$f = \sqrt{(c-\lambda c)(b+\lambda b)}. \tag{3}$$

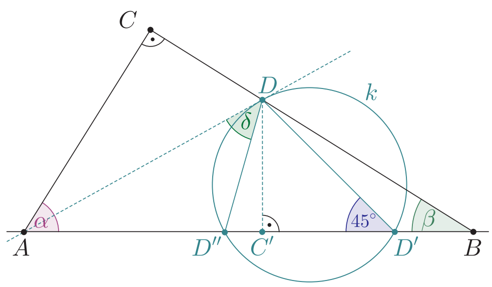
Mivel $c - \lambda c = AB - BD$, illetve $b + \lambda b = AC + CD$, ezért a (3) egyenlet éppen azt jelenti, amit bizonyítani akartunk:

$$f = \sqrt{(AB - BD)(AC + CD)},$$

tehát az $AB - BD$ és $AC + CD$ szakaszok hosszának mértani közepe valóban az f szögfelező hossza.

Sipeki Márton (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimnázium, 11. évf.)

II. megoldás. Bocsássunk merőlegest a D pontból az AB átfogóra, a merőleges talppontja legyen C'. Az AB egyenesére mérjük föl a C' pontból kiindulva a B irányába a $C'D' = CD$ szakaszt, a B pontból kiindulva az A pont felé a $BD'' = BD$ szakaszt.



2. ábra

Tekintsük a *2. ábrát.* Az AD szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szögszáraktól, ezért $CD = C'D$, és így $C'D' = C'D$, tehát $D'DC'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. A szögfelező egy másik tulajdonsága szerint a $CAB\sphericalangle$ szárain az AC és AC' szakaszok is egyenlő hosszúak.

A D' és D'' pontok konstrukciójából az előzőek szerint következik, hogy

$$(4)\qquad AD' = AC' + C'D' = AC + CD; \quad AD'' = AB - BD'' = AB - BD.$$

A $DD''D'$ háromszög, és ezzel annak k körülírt köre mindig létrejön, ez csak akkor nem lenne lehetséges, ha a D'' és D' pontok azonosak lennének. Ez azonban azt jelentené, hogy $AD'' = AD'$, amiből (4) alapján az következne, hogy $AC + CD = AB - BD$, azaz $AB = AC + CD + BD = AC + BC$, de ez az ABC háromszögre felírt háromszög-egyenlőtlenség miatt lehetetlen.

Bizonyítani fogjuk, hogy a 2. ábrán jelölt $ADD''\sphericalangle$ szögre $\delta = 45°$.

Nyilvánvaló, hogy

$$ADC\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

a BDD'' háromszögben pedig $BD = BD''$, emiatt

$$BDD''\sphericalangle = BD''D\sphericalangle = \frac{180° - \beta}{2},$$

felírhatjuk tehát, hogy

$$(5)\qquad 90° - \frac{\alpha}{2} + \delta + \frac{180° - \beta}{2} = 180°.$$

A (5) egyenletben a műveletek elvégzésével és $\alpha + \beta = 90°$ felhasználásával valóban azt kapjuk, hogy $\delta = 45°$.

A k körben a DD'' húrhoz 45°-os kerületi szög tartozik, a δ szög egyik szára a DD'' szakasz, így $\delta = 45°$ csak úgy lehetséges, hogy a δ szög AD szára a k kör érintője.

A körhöz húzott szelő- és érintőszakaszok tételéből következik, hogy $AD^2 = AD' \cdot AD''$, amelyből (4) szerint

$$AD^2 = (AC + CD) \cdot (AB - BD),$$

ebből pedig négyzetgyökvonás után a feladat állítása adódik.

Megjegyzés. A D' pont az AB egyenesen a B ponton túl is elhelyezkedhet, ez azonban a megoldást menetét nem befolyásolja, mert a (2) összefüggés ebben az esetben is felírható.

Jármai Roland (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., (10. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Tükrözzük a D pontot a B csúcsból induló BE belső szögfelezőre, a szögfelező tulajdonsága miatt a D' tükörkép az AB átfogó belső pontja. Jelöljük meg továbbá az AC egyenesen, a C ponton túl azt a D'' pontot, amelyre $CD'' = CD$.

Mivel a tükrözés miatt $BD = BD'$, ezért egyrészt $AD' = AB - BD$, másrészt $AD'' = AC + CD$.

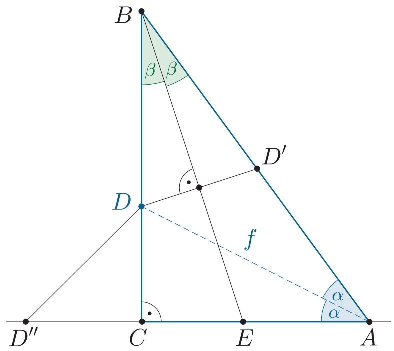
A *3. ábra* jelöléseivel $2\alpha + 2\beta = 90°$, így $\alpha + \beta = 45°$. Egyszerűen belátható, hogy $BD'D\sphericalangle = 90° - \beta$, és ezért

$$AD'D\sphericalangle = 90° + \beta.$$

A $DD''C$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög, tehát $D''DC\sphericalangle = 45°$, és mivel $ADC\sphericalangle = 90° - \alpha$, ezért

$$ADD''\sphericalangle = 90° - \alpha + 45°,$$

ebből $\alpha + \beta = 45°$ alapján $ADD''\sphericalangle = 90° + \beta$ következik.



3. ábra

Az $AD'D$ és ADD'' háromszögek két-két szögének nagysága α és $90° + \beta$, így a háromszögek harmadik szöge is nyilván megegyezik, ez pedig azt jelenti, hogy a két háromszög hasonló. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AD}{AD''}, \quad \text{azaz} \quad AD^2 = AD' \cdot AD''.$$

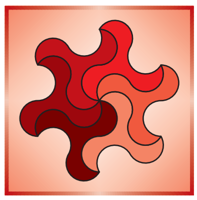
Mivel $AD = f$, $AD' = AB - BD$, illetve $AD'' = AC + CD$, előző eredményünkből $f^2 = (AB - BD) \cdot (AC + CD)$ következik, ez éppen a feladat állítása, hiszen ebből a nyilvánvalóan pozitív $AB - BD$ és $AC + CD$ számok mértani közepe:

$$f = \sqrt{(AB - BD) \cdot (AC + CD)}.$$

(A KöMaL-honlapon is megtalálható a II. megoldás)

Összesen 116 dolgozat érkezett. 5 pontos 67, 4 pontos 13, 3 pontos 7, 2 pontos 9 dolgozat. 1 pontot 7, 0 pontot 12 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása



B. 5193. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $BCA\sphericalangle = 45°$, a magasságok talppontjai a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, a háromszög magasságpontja M. Tudjuk, hogy az F pont az AB szakaszt $AF : FB = 2 : 3$ arányban osztja. Az AC oldalon megjelöljük azt a G pontot, amelyre $CG = BM$. Mutassuk meg, hogy az ABG háromszög súlypontja M.*

(*4 pont*)