A csapaton belüli kiválasztás ún. egyenes kieséses rendszerben történik, amelyben minden forduló előtt párokba sorsolják a résztvevőket. A pár játszik egy mérkőzést, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Akinek a sorsoláskor nem marad pár, mérkőzés nélkül jut a következő fordulóba. A pingpongban nincs döntetlen, az utolsó mérkőzés győztese lesz a csapat legjobbja. Összesen 24 mérkőzést játszottak, mire kiderült, hogy melyik csapat lett a győztes.

b) Hány játékos nevezett a versenyre az egyik, illetve a másik csapatból, ha az egyikben öttel kevesebben voltak, mint a másikban? (*16 pont*)

8. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 30; a sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat három szomszédos eleme.

a) Mennyi a számtani sorozat első tagja és különbsége?

Egy mértani sorozat tagjaira fennáll, hogy $a_1+a_3+a_5=182$ és $a_2+a_4=-60$.

b) Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát. (*16 pont*)

9. Az $ABCD$ téglalap átlói $30°$-os szöget zárnak be egymással.

a) Mekkora az AB és BC oldal, ha $AC=12$ cm?

b) Milyen messze van a B csúcs az AC átlótól?

Egy $KLMN$ téglalap LN átlója a téglalapot két derékszögű háromszögre bontja. A KLN háromszög K-ból induló magassága, belső szögfelezője és súlyvonala legyen rendre m, f, s.

c) Mekkora szöget zár be egymással az LN átló és a KL oldal, ha $3f^2=2ms$? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2022/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $x\cdot(1-\lg 5)=2\cdot\lg(2^x-2)$, (*7 pont*)

b) $1+2\cdot\cos^2 x=\sin(2x)$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, ezért $2^x-2>0$, azaz

$$2^x>2,\quad \text{vagyis}\quad x>1. \tag{1}$$

A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$x\cdot(1-\lg 5)=x\cdot(\lg 10-\lg 5)=x\cdot\lg\left(\frac{10}{5}\right)=x\cdot\lg 2=\lg(2^x),$$

illetve:

$$2 \cdot \lg(2^x - 2) = \lg\big((2^x - 2)^2\big).$$

Vezessük be az $y = 2^x$ új ismeretlent, így az eredeti egyenletet ilyen alakra hoztuk:

$$\lg y = \lg\big((y - 2)^2\big).$$

A logaritmusfüggvény monotonitása miatt:

$$y = (y - 2)^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

A másodfokú egyenlet gyökei $y = 1$ és $y = 4$. Mivel (1) miatt $y = 2^x > 2$, ezért az első eset nem lehetséges, vagyis $y = 2^x = 4$, ahonnan $x = 2$. Minden lépésünk megfordítható és a kapott gyök eleme az értelmezési tartománynak.

b) I. megoldás. Használjuk ki, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, illetve $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot$ $\cdot \cos x$. Az egyenlet rendezése után a következő, úgynevezett homogén egyenletet kapjuk:

$$\sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Ha $\cos x = 0$, akkor az egyenlet alapján $\sin x = 0$, ekkor azonban $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, ami nem lehetséges, tehát ebben az esetben nem adódik megoldás. Ezek szerint $\cos x \neq 0$, így az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk $\cos^2 x$-szel:

$$\mathrm{tg}^2\, x - 2 \cdot \mathrm{tg}\, x + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát nincs valós gyöke, vagyis az eredeti egyenletnek sincs valós gyöke.

II. megoldás. Vizsgáljuk meg az egyenlet két oldalán álló kifejezések értékkészletét. Tudjuk, hogy $\cos^2 x \geqslant 0$, ezért $1 + 2 \cdot \cos^2 x \geqslant 1$. Mivel $\sin(2x) \leqslant 1$, ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezés értéke egyenlő 1-gyel.

Ha $1 + \cos^2 x = 1$, akkor $\cos x = 0$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k egész szám.

Ekkor azonban $\sin(2x) = \sin(\pi + 2k\pi) = 0$, vagyis ha az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értéke egyenlő 1-gyel, akkor a jobb oldali kifejezés értéke nem egyenlő 1-gyel, tehát az egyenletnek nincs valós gyöke.

2. *Az e egyenes egyenlete $4x - 3y = 15$. Mennyi a sugara annak a körnek, amely érinti az e egyenest, továbbá az origóban érinti az y tengelyt?* *(12 pont)*

Megoldás. *I. megoldás.* Ha a kör az origóban érinti az y tengelyt, akkor középpontja az x tengelyre illeszkedik, koordinátái $O(u; 0)$, és a kör sugara $r = |u|$, ezért a kör egyenlete:

$$(x - u)^2 + y^2 = u^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2ux = 0.$$

Ha az egyenes érinti a kört, akkor az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszernek egy megoldása van. Az egyenes egyenletéből y-t kifejezve, a kör egyenletébe helyettesítve:

$$x^2+\left(\frac{4x}{3}-5\right)^2-2ux=0,$$

$$25x^2-(18u+120)x+225=0.$$

Az egyenletnek akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0:

$$(18u+120)^2-22\,500=0,$$

$$|18u+120|=150.$$

Ha $18u+120=150$, akkor $u=\frac{5}{3}$, ha pedig $18u+120=-150$, akkor $u=-15$. Két kör felel meg a feladat feltételeinek: az egyiknek a középpontja $O_1\left(\frac{5}{3};0\right)$ és sugara $r_1=\frac{5}{3}$, a másiknak pedig a középpontja $O_2(-15;0)$ és sugara $r_2=15$.

II. megoldás. Ha a kör az origóban érinti az y tengelyt, akkor középpontja az x tengelyre illeszkedik, koordinátái $O(u;0)$. A függvénytáblázatban is megtalálható összefüggés alapján a $P_0(x_0;y_0)$ pont és az $Ax+By+C=0$ egyenletű e egyenes távolsága így számítható ki:

$$d(P_0;e)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

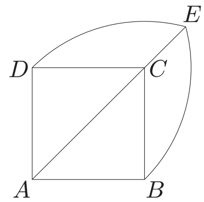
Az $O(u;0)$ pont egyenlő távolságra van a $4x-3y-15=0$ egyenletű egyenestől és az y tengelytől:

$$\left|\frac{4u-15}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=|u|,$$

$$\frac{|4u-15|}{5}=|u|.$$

Ha $4u-15=-5u$, akkor $u=\frac{5}{3}$, ha pedig $4u-15=5u$, akkor $u=-15$. Két kör felel meg a feladat feltételeinek: az egyiknek a középpontja $O_1\left(\frac{5}{3};0\right)$ és a sugara $r_1=\frac{5}{3}$, a másiknak pedig a középpontja $O_2(-15;0)$ és a sugara $r_2=15$.

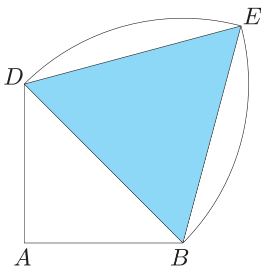
Megjegyzés. Egy, a második megoldástól nem lényegesen különböző harmadik megoldás gondolatmenete: a keresett körök középpontjai illeszkednek az e egyenes és az y tengely által meghatározott valamely szög szögfelezőjére. A szögfelezők egyenlete felírható többféle módszerrel, például a második megoldásban használt képlet segítségével. A két szögfelező egyenlete: $3x-y=5$ és $x+3y=-15$, a körök középpontját a szögfelezők és az x tengely metszéspontjai adják.



3. *A Fából Vaskarika Kft. logóján látható $ABCD$ négyzet oldalai* 4 cm *hosszúak, a BE körív középpontja a D pont, az ED körív középpontja pedig a B pont. A logó mind a négy részét pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre festik úgy, hogy ha két rész kerületének van közös szakasza, akkor azok különböző színűek lesznek.*

a) Hány négyzetcentiméter a lefestendő terület? (*6 pont*)

b) Hány különböző kifestés lehetséges? (*8 pont*)



Megoldás. *a*) A körívek sugara a négyzet BD átlója: $BE=DE=BD=4\sqrt{2}$. Ez azt is jelenti, hogy a BED háromszög szabályos, ezért belső szögei 60 fokosak. A BD átló az alakzatot két részre osztja, így az alakzat területe a részek területének összege. Az egyik rész az ABD derékszögű háromszög: $t_{ABD}=\frac{4\cdot 4}{2}=8\ \text{cm}^2$. Határozzuk meg a másik rész területét. Ha a B középpontú, BD sugarú, 60° középponti szögű körcikk területéhez hozzáadjuk a D középpontú, DB sugarú, 60° középponti szögű körcikk területét, akkor a BED háromszög területét kétszer számoltuk, így ezt a kapott összegből ki kell vonni:

$$t_{BED}=2\cdot\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{6}-\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}\approx 19{,}65\ \text{cm}^2.$$

A lefestendő terület tehát 27,65 cm^2.

b) A festésre minimum két színt fel kell használni. Bontsuk szét az eseteket annak megfelelően, hogy hány színt használunk.

Ha a színek száma kettő, akkor az ABC rész színe 4-féle lehet, ugyanilyen színnel viszont csak a CED rész színezhető. Az ACD rész színére 3 lehetőség maradt, a BEC rész színe pedig ezzel megegyező lesz. Ebben az esetben tehát a lehetőségek száma $4\cdot 3=12$.

Ha a színek száma három, akkor az egyik színt nem fogjuk használni, ezt 4-féleképpen választhatjuk ki, egy másik színt viszont két rész festésére is használunk, erről a színről 3-féleképpen dönthetünk. Azt, hogy melyik két rész lesz egyforma, az előző esetnél látottak miatt 2-féleképpen dönthetjük el, mint ahogy az üresen maradt részek festésére is 2 lehetőség van a megmaradt két szín felhasználásával. A lehetőségek száma tehát: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$.

Végül, ha mind a négy színt felhasználjuk, akkor a lehetőségek száma $4!=24$.

A lehetséges kifestések száma összesen $12+48+24=84$.

4. *Az iskolai focicsapat edzésén az edző megkérdezett minden jelenlévő diákot, hogy hány osztálytársuk tagja a csapatnak. Ketten* 1*-et, hatan* 2*-t, egyvalaki* 3*-at, öten* 4*-et és hárman* 5*-öt válaszoltak a kérdésre.*

a) Mennyi az elhangzott válaszok módusza, mediánja, átlaga és terjedelme? (*7 pont*) *b) Miután a matematika–testnevelés szakos edző nagyon elcsodálkozott a válaszokat hallva, a csapat tagjai elárulták neki, hogy néhány csapattag matematikaversenyre ment, ezért nem tudott eljönni a mai edzésre. Legalább hányan hiányoztak?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A módusz 2, mert ezt mondták a legtöbben.

A medián megállapításához rendezzük az elhangzott válaszokat növekvő sorrendbe:

$$1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 3;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4;\ 5;\ 5;\ 5.$$

A 17 szám közül a középső a 9-edik, ami 3, így ennyi a medián.

A számok átlaga:

$$\frac{2\cdot 1+6\cdot 2+1\cdot 3+5\cdot 4+3\cdot 5}{17}=\frac{2+12+3+20+15}{17}=\frac{52}{17}\approx 3{,}06.$$

A terjedelem a legnagyobb és a legkisebb elhangzott válasz különbsége: $5-1=4$.

b) Ha egy osztályból n gyerek tagja a csapatnak, akkor az osztály mindegyik tagjának $n-1$ osztálytársa tagja a csapatnak. Ha tehát mindenki ott lenne az edzésen, akkor n-nel osztható lenne azoknak a száma, akik azt mondják, hogy $n-1$ osztálytársuk tagja a csapatnak. Ekkor azonban még legalább 3 olyan gyerek van, aki 3-at mondana, és legalább 3 olyan gyerek, akinek 5 lenne a válasza, tehát legalább 6 gyerek hiányzik az edzésről. Ez az eset lehetséges, ha egy osztályból 2, két osztályból 3-3, egy osztályból 4, egy osztályból 5 és egy osztályból 6 gyerek lenne a csapat tagja.

II. rész

5. *A tavasszal három nagy sportversenyt rendeztek a nekeresdfalvi általános iskolában. Az asztalitenisz bajnokságban* 120 *gyerek indult. A fociligába* 8 *csapat nevezett, mindegyik csapatban* 9 *játékos lépett pályára. Az úszóversenyen* 81*-en teljesítették a távot.* 23 *gyerek mind a három sportágban versenyzett. Összesen* 45*-en voltak azok, akik egynél több számban is indultak.*

a) Hányan vettek részt legalább az egyik sportág versenyén? (*6 pont*)

A fociligában mindegyik csapat mindegyik másik csapattal egyszer játszott. Az első héten összesen 13 *mérkőzésre került sor.*

b) Bizonyítsuk be, hogy volt olyan csapat, amely az első héten legalább négyszer lépett pályára. (*4 pont*)

Az asztalitenisz bajnokságban négy olyan gyerek jutott be a legjobb nyolc közé, aki a Futrinka utcában lakik. A versenyzőkből sorsolással négy párt alkottak, akik megküzdhettek egymással a legjobb négy közé jutásért.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy nem volt olyan pár, ahol mindkét gyerek a Futrinka utcában lakik? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Ha összeadjuk a három sportágban indulók számát, akkor 45 tanulót legalább kétszer, 23 tanulót pedig pontosan háromszor számoltunk, így a legalább egy számban indulók száma $120+8\cdot 9+81-45+23=251$ fő.

b) Indirekt módszerrel végezzük el a bizonyítást. Tegyük fel, hogy nincs olyan csapat, amelyik az első héten legalább négyszer játszott. Ez azt jelenti, hogy mind a nyolc csapat legfeljebb háromszor lépett pályára. Mivel mindegyik mérkőzésen két csapat lép a pályára, így ebben az esetben a mérkőzések száma legfeljebb $\frac{8\cdot 3}{2}=12$ lett volna. Ellentmondáshoz jutottunk, mivel 13 mérkőzésre került sor. Indirekt feltevésünk tehát hamisnak bizonyult, vagyis van olyan csapat, amelyik legalább négyszer lépett pályára.

(*Megjegyzés.* Felhívjuk a figyelmet ennél a bizonyításnál egy tipikus és hibás gondolatmenetre. *A bajnokságokat úgy szokták szervezni, hogy egy fordulóban mindegyik csapat játszik egy meccset. Mivel nyolc csapat van, így mindegyik fordulóban négy meccset rendeznek. Három forduló esetén ez* 12 *meccset jelent. Vagyis a* 13. *meccs már a negyedik fordulóban kerül megrendezésre.* Mi a hiba a gondolatmenetben? Az, hogy nem tudjuk, hogy ezt a bajnokságot hogyan bonyolítják le, és azt kell belátnunk, hogy tetszőleges sorrendben rendezzük is meg a meccseket, az állítás akkor is igaz lesz, nem csak egy konkrét lebonyolítási forma esetén.)

c) *I. megoldás.* Képzeljük el, hogyan zajlik a negyeddöntők sorsolása. Az első pár kisorsolásakor a nyolc játékos közül húznak ki kettőt, és a párosítás akkor lesz csak a végén jó, ha a négy Futrinka utcai közül és a négy máshol lakó közül is egyet húznak, a pár kihúzásának sorrendje nem számít. Hasonlóan folytatva a második és a harmadik pár kihúzásakor, a keresett valószínűség:

$$p=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}\cdot\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}\cdot\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{8}{35}\approx 0{,}229.$$

II. megoldás. Képzeljük el, hogyan zajlik a negyeddöntők sorsolása. Az első név kihúzásánál még nem dőlt el semmi, nézzük a második húzást. Ha az első kihúzott játékos Futrinka utcai, akkor a lehetséges ellenfelek közül 3 Futrinka utcai, 4 pedig nem. Ha az első kihúzott játékos máshol lakó, akkor a lehetséges ellenfelek közül 3 máshol lakó, 4 pedig nem. Mivel mindegyik párba egy Futrinka utcai és egy máshol lakó versenyzőnek kell kerülnie, ezért a második név kihúzásakor $\frac{4}{7}$ annak a valószínűsége, hogy az első pár kisorsolása jól sikerült. Hasonlóan gondolkodva, a negyedik név kihúzásakor $\frac{3}{5}$, a hatodik név kihúzásakor pedig $\frac{2}{3}$ valószínűséggel sikerül a feladat feltételeinek megfelelően a sorsolás. Mivel ekkor már csak egy Futrinka utcai és egy máshol lakó marad a negyedik párba, így az egész sorsolás a feladat feltételeinek megfelelően sikerült. A keresett valószínűség:

$$p=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{35}\approx 0{,}229.$$

6. *a*) *Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapélei* 6 *cm, oldalélei* 5 *cm hosszúak. Milyen hosszú testátlói vannak a hasábnak, és melyik fajtából hány darab?* (*8 pont*)

b) *Legyen* p_n *annak a valószínűsége, hogy egy szabályos* n *oldalú hasáb csúcsai közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, azok egy lapátló végpontjai lesznek. Határozzuk meg a következő határértéket:*

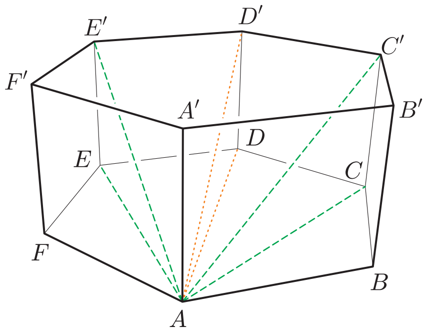
$$\lim_{n\to\infty} p_n. \qquad (8\ pont)$$

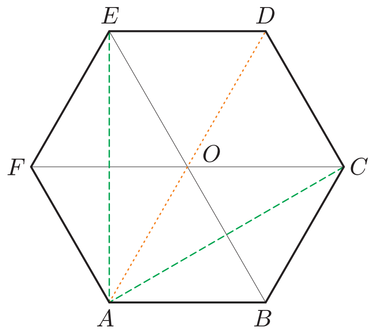
Megoldás. *a*) Legyenek a hasáb alapjai az $ABCDEF$ és az $A'B'C'D'E'F'$ hatszögek. Az $ABCDEF$ hatszög felbontható hat darab egybevágó szabályos háromszögre. Ezt felhasználva az AD átló hossza az alapél hosszának kétszerese, vagyis 12 cm. Az AC és AE átlók hossza egyenlő, hiszen egymás tükörképei az AD átlóra nézve. Az AC átló hossza kiszámolható koszinusztétellel, vagy kihasználva azt, hogy az $ABCO$ rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Azt kapjuk, hogy $AC=AE=6\sqrt{3}$. Az oldalélek merőlegesek az alapokra, így azok minden egyenesére is, ezért az ACC', ADD', AEE' háromszögek derékszögűek. Mivel mindkét befogójuk hossza ismert, így Pitagorasz-tétellel az átfogók, vagyis a hasáb A csúcsból induló testátlóinak hossza kiszámolható:

$$AC'=AE'=\sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2+5^2}=\sqrt{108+25}=\sqrt{133}\approx 11{,}53\text{ cm},$$

$$AD'=\sqrt{12^2+5^2}=13\text{ cm}.$$

Szimmetria-okokból az $ABCDEF$ alap mindegyik csúcsából két 11,53 cm hosszú és egy 13 cm hosszú testátló húzható, így a hasábnak összesen 12 darab 11,53 cm hosszú és 6 darab 13 cm hosszú testátlója van.





b) *I. megoldás.* Számoljuk össze az egy csúcsból húzható lapátlókat. Az n oldalú alapon $n-3$ darab, míg az adott pontra illeszkedő két oldallapon további 1-1 darab lapátló húzható, így az egy csúcsból húzható lapátlók száma $n-3+2=n-1$. Mivel a hasábnak $2n$ csúcsa van, és mindegyik lapátlót kétszer számoljuk, így a lapátlók száma összesen $\frac{2n\cdot(n-1)}{2}$. Mivel két csúcsot összesen $\binom{2n}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, ezért a keresett valószínűség:

$$p_n=\frac{\frac{2n\cdot(n-1)}{2}}{\binom{2n}{2}}=\frac{n\cdot(n-1)}{\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}}=\frac{n-1}{2n-1}.$$

A keresett határérték pedig:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

II. megoldás. Bármelyik csúcsot is választjuk ki elsőként, minden esetben a második csúcs kiválasztása dönti el, hogy lapátlót határoz meg a két csúcs vagy sem. A második csúcs kiválasztására összesen $2n-1$ lehetőség van. Határozzuk meg, hogy ezek közül hány olyan van, amely az elsőként kiválasztott csúcsból húzott valamelyik lapátlónak a végpontja. Az n oldalú alapon $n-3$ darab, még az adott pontra illeszkedő két oldallapon további 1-1 darab lapátló húzható, így az elsőként kiválasztott csúcsból húzható lapátlók száma $n-3+2=n-1$. Ezen lapátlóknak az elsőként kiválasztott ponttól különböző végpontjai a megfelelő választások második pontként, ezért a keresett valószínűség:

$$p_n = \frac{n-1}{2n-1}.$$

A keresett határérték pedig:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

7. *Vizsgáljuk az $a_n = n^2+4n+9$ sorozatot.*

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat szigorúan monoton növő. (*3 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak egyik tagja sem négyzetszám. (*5 pont*)

c) Hányféleképpen lehet a sorozat első 100 *tagja közül kiválasztani két különbözőt úgy, hogy azok összege osztható legyen* 5*-tel?* (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* Mivel $a_n = n^2+4n+9 = (n+2)^2+5$, ezért a sorozat grafikonja a valós számokon értelmezett $f(x)=(x+2)^2+5$ függvény grafikonjára illeszkedő pontokból áll. Az f függvény grafikonja $T(-2;5)$ tengelypontú, normál állású parabola, ezért az f függvény szigorúan monoton növő, ha $x>-2$, így minden n pozitív egész szám esetén $n+1>n>-2$, ezért $a_{n+1}=f(n+1)>f(n)= = a_n$, vagyis a sorozat szigorúan monoton növő.

II. megoldás. Mivel $a_{n+1}=(n+1)^2+4(n+1)+9=n^2+6n+14$, ezért

$$a_{n+1}-a_n = (n^2+6n+14)-(n^2+4n+9) = 2n+5>0$$

minden n pozitív egész számra, vagyis $a_{n+1}>a_n$, tehát a sorozat szigorúan monoton növő.

b) I. megoldás. Mivel $n>0$, ezért

$$(n+2)^2 = n^2+4n+4 < n^2+4n+9 < n^2+6n+9 = (n+3)^2.$$

A sorozat n-edik tagja az $n+2$ négyzeténél nagyobb, és az eggyel nagyobb szám, az $n+3$ négyzeténél kisebb, így nincs olyan egész szám, amelynek a négyzetével egyenlő lenne, tehát nem négyzetszám.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $a_n=k^2$, ahol k pozitív egész szám.

$$(n+2)^2+5=k^2,$$

$$5=k^2-(n+2)^2,$$

$$5=(k+n+2)\cdot(k-n-2).$$

Mivel az első tényező pozitív, és a szorzat is pozitív, ezért a második tényezőnek is pozitívnak kell lennie. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $k+n+2=5$ és $k-n-2=$ $=1$. A két egyenletből álló egyenletrendszernek egy megoldása van: $n=0$ és $k=3$. Mivel a sorozat definíciója szerint n pozitív egész szám, így ez a megoldás nem megfelelő, vagyis a sorozatnak egyik tagja sem négyzetszám. (*Megjegyzés:* sok helyen elfogadott, hogy a sorozatnak legyen nulladik tagja, ebben az esetben egyetlen olyan tagja van a sorozatnak, amely négyzetszám, hiszen $a_0=9$.)

c) Ha $n=5h+m$ alakú, akkor

$$a_n=(5h+m+2)^2+5=5\cdot\left(5h^2+2hm+4h+1\right)+(m+2)^2.$$

Tehát annyi az a_n ötös maradéka, mint amennyi az $(m+2)^2$ ötös maradéka. Ha tehát az n ötös maradéka $0,1,2,3,4$, akkor az a_n ötös maradéka rendre $4,4,1,0,1$. A sorozat első 100 tagjából így 20 darab ötös maradéka 0, 40 darab ötös maradéka 1 és 40 darab tag ötös maradéka 4. Kétféleképpen kaphatunk két kiválasztott tag összegeként 5-tel osztható számot: vagy két olyan számot adunk össze, melynek 0 az ötös maradéka, vagy két olyat, melyek közül az egyik 1, a másik 4 maradékot ad 5-tel osztva. Az összes eset száma tehát:

$$\binom{20}{2}+40\cdot 40=190+1600=1790.$$

8. *Egy kis teherszállító hajó* 100 *kilométeren* $0{,}1\cdot v^2$ *liter gázolajat fogyaszt, ha a sebessége* v km/h. *Egy liter gázolaj ára* 500 *forint, a legénység fizetése pedig óránként összesen* 27 000 *forint.*

a) *Milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a lehető legolcsóbban tudja teljesíteni az* 500 km *hosszú távot?* (*10 pont*)

b) *A hajó többek között* 15 *birkát szállít. Sajnos, az egyik birkát betegen vitték fel a fedélzetre. Tudjuk, hogy ez a beteg birka bármelyik egészséges birkát* 10% *valószínűséggel fertőzi meg. Az így megfertőzött birkák már nem fertőznek tovább. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb* 2 *további birka kapja el a fertőzést?*
(*6 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a hajó sebessége v $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, akkor a menetidő $\frac{500}{v}$ h. Mivel az üzemanyagköltség $5\cdot 0{,}1\cdot v^2\cdot 500$ Ft, ezért a teljes költséget forintban a következő függvény adja meg ($v>0$):

$$k(v)=250\cdot v^2+\frac{13\,500\,000}{v}=250\cdot v^2+13\,500\,000\cdot v^{-1}.$$

A függvénynek akkor lehet minimuma, ha első deriváltja 0:

$$\begin{aligned} k'(v)&=500\cdot v-13\,500\,000\cdot v^{-2}=0,\\ 500\cdot v&=\frac{13\,500\,000}{v^2},\\ v^3&=27\,000,\\ v&=30. \end{aligned}$$

Mivel $k''(v) = 500 + 27\,000\,000 \cdot v^{-3} > 0$, ha $v > 0$, így a függvénynek $v = 30$ esetén tényleg minimuma van, tehát az ideális sebesség 30 km/h.

b) A 14 másik birka mindegyike 0,1 valószínűséggel fertőződik meg, és 0,9 valószínűséggel marad egészséges. A fertőzést elkapó birkák száma binomiális eloszlást alkot, és azt kell meghatároznunk, hogy a számuk milyen valószínűséggel lesz 0, 1 vagy 2:

$$0{,}9^{14} + \binom{14}{1} \cdot 0{,}9^{13} \cdot 0{,}1 + \binom{14}{2} \cdot 0{,}9^{12} \cdot 0{,}1^2 \approx 0{,}229 + 0{,}356 + 0{,}257 \approx 0{,}842.$$

Körülbelül 84,2 százalék a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 2 újabb birka fertőződik meg.

9. *A hagyományos, úgynevezett ötös lottón a szelvényen* 1*-től* 90*-ig szerepelnek a számok, és ezek közül kell kiválasztani azt az* 5 *számot, amit a sorsoláson kihúznak.*

a) *Hány olyan számötös van, amelyben a számok számtani sorozatot alkotnak?* (*6 pont*)

b) *Hány olyan számötös van, amelyben a számok mértani sorozatot alkotnak?* (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a legkisebb kihúzott szám a, a számtani sorozat differenciája pedig a d pozitív egész szám, ekkor a legnagyobb kihúzott szám $a + 4d \leqslant 90$, tehát $4d < 90$, így $d < 22{,}5$. Számoljuk össze a lehetséges eseteket úgy, hogy d értékét rögzítjük, és megszámoljuk minden esetben a lehetséges értékeit. Ha $d = 22$, akkor $a \leqslant 90 - 4d = 90 - 4 \cdot 22 = 2$, vagyis a értéke 2-féle lehet.

Ha $d = 21$, akkor $a \leqslant 90 - 4d = 90 - 4 \cdot 21 = 6$, vagyis a értéke 6-féle lehet.

Észrevehetjük, hogy ha d értékét 1-gyel csökkentjük, akkor a lehetséges értékeinek száma 4-gyel nő, vagyis az esetek száma egy 22 tagú számtani sorozatot alkot. Kérdésünk ezen tagok összege, ehhez határozzuk meg a 22-edik tagot: ha $d = 1$, akkor $a \leqslant 90 - 4d = 90 - 4 \cdot 1 = 86$, vagyis a értéke 86-féle lehet.

Most már elvégezhetjük az összegzést, a megfelelő számötösök száma:

$$S_{22} = \frac{2 + 86}{2} \cdot 22 = 44 \cdot 22 = 968.$$

b) Legyen a legkisebb kihúzott szám a, a mértani sorozat hányadosa pedig a q pozitív racionális szám, ekkor a legnagyobb kihúzott szám $a \cdot q^4 \leqslant 90$, tehát $q^4 \leqslant 90$, így $q \leqslant \sqrt[4]{90} \approx 3{,}08$. Vizsgáljuk először azt az egyszerűbb esetet, amikor q egész szám, ekkor értéke csak 2 vagy 3 lehet.

Ha $q = 2$, akkor $a \leqslant \frac{90}{16} = 5{,}625$, tehát a értéke csak $1, 2, 3, 4, 5$ lehet.

Ha $q = 3$, akkor $a \leqslant \frac{90}{81}$, ami csak akkor teljesül, ha $a = 1$.

Egész q esetén tehát összesen 6 esetet találtunk. Mi a helyzet, ha $q = \frac{b}{c}$, ahol b és c relatív prím pozitív egész számok és $b > c$? Ekkor a legnagyobb szám

$$a \cdot \frac{b^4}{c^4} = \frac{a \cdot b^4}{c^4} \leqslant 90.$$

Mivel ez a szám is egész, ezért c^4 osztója $a \cdot b^4$-nek. Mivel azonban $\left(c^4; b^4\right) = 1$, ezért az euklidészi lemma miatt c^4 osztója a-nak. Ebből az is következik, hogy $c^4 \leqslant a \leqslant 90$, így c értéke csak 2 vagy 3 lehet.

Ha $c = 2$, akkor a a $c^4 = 16$ többszöröse. Ha $a \geqslant 2 \cdot 16$, akkor $b > c = 2$ miatt

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{32 \cdot 3^4}{2^4} = \frac{32 \cdot 81}{16} = 162 > 90,$$

vagyis ellentmondáshoz jutottunk. Azt kaptuk, hogy $a = 16$ lehet csak.

Ha $b = 3$, akkor ebből kapunk is egy megfelelő számötöst: $16, 24, 36, 54, 81$.

Ha $b \geqslant 4$, akkor viszont

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{16 \cdot 4^4}{2^4} = 16 \cdot 16 = 256 > 90,$$

vagyis nincs több megfelelő számötös, ha $c = 2$.

Mi a helyzet, ha $c = 3$? Ekkor $a \geqslant 81$ és $b \geqslant 4$ miatt

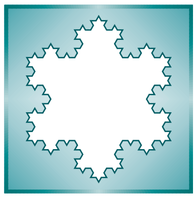
$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{81 \cdot 4^4}{3^4} = 256 > 90,$$

vagyis ebben az esetben nem kapunk megfelelő számokat.

Találtunk tehát öt olyan számötöst, ahol $q = 2$, egy olyat, ahol $q = \frac{3}{2}$ és egy olyat, amelyben $q = 3$, így összesen 7 megfelelő számötös van.

Erdős Gábor
Nagykanizsa

C gyakorlatok megoldása



C. 1680. *Egy négyszög egyik oldalának hossza* 5 cm, *a rajta fekvő két szög* 90° *és* 60°. *Tudjuk továbbá, hogy a négyszög húr- és érintőnégyszög is. Hogyan lehet ezek alapján megszerkeszteni a négyszöget? Írjuk le és indokoljuk a szerkesztés lépéseit (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni).*

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

Megoldás. Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az $ABCD$ négyszögben $AB = 5$ cm és $DAB\sphericalangle = 90^\circ$, illetve $ABC\sphericalangle = 60^\circ$. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, ezért a szemben levő szögeinek összege páronként 180°, így $BCD\sphericalangle = 90^\circ$ és $CDA\sphericalangle = 120^\circ$. A feltétel szerint $ABCD$ érintőnégyszög is, ezért van beírt köre, tehát belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a beírt kör O középpontja.