A 2022. évi Rényi-díjasok

Ádám Réka (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Árki Tamás** (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll.), **Balázs Ferenc** (Kiskunfélegyházi Szent Benedek PG Két Tanítási Nyelvű Techn. és Koll.), **Balázs Tivadar** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), **Balga Attila** (Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimn.), **Baráti Ákos** (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn. és Koll.), **Cs. Nagy András** (Váci SzC Boronkay György Műszaki Techn. és Gimn.), **Gaál Istvánné** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), **Gyenes Zoltán** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Holló Gábor** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Horváth Orsolya** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Kötél Tamás** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Lányi Veronika** (Pécsi Janus Pannonius Gimn.), **Lenger Dániel** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Szalahov Mária Zsuzsanna** (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn. és Koll.), **Számadóné Békéssy Szilvia** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Szlobodnikné Kiss Edit** (Váci SzC Boronkay György Műszaki Techn. és Gimn.), **Tassy Gergely** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Tóth Tibor** (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.), **Varga Attila** (Balassagyarmat, Balassi Bálint Gimn.).

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Adott az $f(x)=\frac{(x^2-4x)(2-x)}{x-2}$ függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, és a $g(x)=3|x-1|-3$ függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_g=\mathbb{R}$.

a) Oldjuk meg az $f(x)=g(x)$ egyenletet.

A K és L halmazokat értelmezzük a következőképpen: $K:=\{x\mid x\in D_f$ és $f(x)\geqslant 0\}$; $L:=\{x\mid x\in D_g$ és $g(x)\geqslant 0\}$.

b) Adjuk meg a $K\cap L$, $K\setminus L$ és $(K\cup L)\setminus K$ halmazokat. (*12 pont*)

2. Egy háromszög csúcsai: $A(-2;-2)$, $B(7;1)$, $C(5;5)$.

a) Mekkora a háromszög területe?

b) Számítsuk ki a háromszög súlypontja és magasságpontja távolságának pontos értékét. (*12 pont*)

3. *a*) Határozzuk meg az alábbi kijelentések logikai értékét, állításainkat indokoljuk.

A) Minden pozitív egész számra teljesül, hogy az összes pozitív osztójának átlaga kisebb a szám felénél.

B) Van olyan n csúcsú teljes gráf, amelynek háromszor annyi éle van, mint az n csúcsú fagráfnak.

b) Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha P és Q, akkor nem R."

c) Tegyük fel, hogy „Ha P és Q, akkor nem R." Igaz-e most a „Ha R, akkor nem P és nem Q." állítás? Válaszunkat indokoljuk. (*13 pont*)

4. A 32 lapos magyar kártya egyik legérdekesebb játéka az ulti. (A magyar kártyában a színek: makk, piros, tök, zöld; színenként ász, király, felső, alsó, 10-es, 9-es, 8-as és 7-es alkotja a 32 lapot.) Ha pl. Bélának a játék elején leosztott 10 lapjából egy ötlapos piros ultija van, ez azt jelenti, hogy nála van a piros hetes és még négy piros, továbbá öt másik, nem piros lap.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bélának ötlapos piros ultit osztottak a játék elején?

Képzeljük el, hogy 10 jól megkevert magyar kártyacsomag van előttünk és mindegyikről levesszük a legfelső lapot.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 lapból pontosan 5 piros?

c) Ha az előbbi húzáskor öt piros lapot húztunk, mennyi a valószínűsége, hogy közöttük legalább egy hetes van?

Minden végeredményt négy tizedesjegyre kerekítve adjunk meg. (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Vizsgáljuk meg monotonitás és korlátosság szempontjából az

$$a_n = \frac{n^2+3n+2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

sorozatot.

b) Határozzuk meg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ határértékét, ha $n \to +\infty$.

c) Mennyi az x, ha a b_n sorozatról a következőket tudjuk: $b_n = \frac{n^2}{2} + x \cdot n$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$), valamint $(b_{n+1} - b_n)^2 = b_n + b_{n+1}$? (*16 pont*)

6. *a*) Milyen számjeggyel kezdődik a 16^{2022} a tízes számrendszerben felírva és mi az utolsó két számjegye?

b) Igazoljuk, hogy $2^{2023} + 1$ osztható 43-mal. (*16 pont*)

7. Két középiskola sakkbajnokságot rendezett úgy, hogy a versenyzők először a saját iskolájukon belül lebonyolított háziversenyen vettek részt, melynek során mindenki mindenkivel egy partit játszott. Ezután került sor az iskolák egymás elleni küzdelmére, ahol minden versenyző a másik iskola mindegyik versenyzőjével egy mérkőzést vívott. Az egymás elleni mérkőzések száma éppen annyi volt, mint a két háziversenyen összesen.

a) Iskolánként hányan vettek részt a bajnokságban, ha az egyikben kétszer annyian indultak, mint a másikban?

Két rivális asztalitenisz csapat úgy dönti el, melyikük a jobb, hogy kiválasztják saját maguk közül a legjobbat, majd a két legjobb megküzd egymással a címért.

A csapaton belüli kiválasztás ún. egyenes kieséses rendszerben történik, amelyben minden forduló előtt párokba sorsolják a résztvevőket. A pár játszik egy mérkőzést, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Akinek a sorsoláskor nem marad pár, mérkőzés nélkül jut a következő fordulóba. A pingpongban nincs döntetlen, az utolsó mérkőzés győztese lesz a csapat legjobbja. Összesen 24 mérkőzést játszottak, mire kiderült, hogy melyik csapat lett a győztes.

b) Hány játékos nevezett a versenyre az egyik, illetve a másik csapatból, ha az egyikben öttel kevesebben voltak, mint a másikban? (*16 pont*)

8. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 30; a sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat három szomszédos eleme.

a) Mennyi a számtani sorozat első tagja és különbsége?

Egy mértani sorozat tagjaira fennáll, hogy $a_1+a_3+a_5=182$ és $a_2+a_4=-60$.

b) Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát. (*16 pont*)

9. Az $ABCD$ téglalap átlói $30°$-os szöget zárnak be egymással.

a) Mekkora az AB és BC oldal, ha $AC=12$ cm?

b) Milyen messze van a B csúcs az AC átlótól?

Egy $KLMN$ téglalap LN átlója a téglalapot két derékszögű háromszögre bontja. A KLN háromszög K-ból induló magassága, belső szögfelezője és súlyvonala legyen rendre m, f, s.

c) Mekkora szöget zár be egymással az LN átló és a KL oldal, ha $3f^2=2ms$? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2022/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $x\cdot(1-\lg 5)=2\cdot\lg(2^x-2)$, (*7 pont*)

b) $1+2\cdot\cos^2 x=\sin(2x)$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, ezért $2^x-2>0$, azaz

$$2^x>2,\quad\text{vagyis}\quad x>1. \tag{1}$$

A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$x\cdot(1-\lg 5)=x\cdot(\lg 10-\lg 5)=x\cdot\lg\left(\frac{10}{5}\right)=x\cdot\lg 2=\lg(2^x),$$