p a legnagyobb szám, $p^2 > pq$, és $p^2 > pr$, tehát $p > a$, és $p > b$, és nyilván $a \neq b$, mert $p \neq q$. Ez azt jelenti, hogy a és b is megoldásai a modulo p testen értelmezett $x^2 + x + k = 0$ egyenletnek. Azonban ez egy másodfokú egyenlet, tehát legfeljebb két megoldása lehet. Így nem lehet p-nek egy harmadik s szomszédja, mert akkor az ahhoz tartozó c érték is ugyanígy egy b-től és c-től különböző megoldás lenne.

Másodszor azt fogom belátni, hogy a legnagyobb prím q és r szomszédaira qr is előáll x^2+x+k alakban. Ehhez először vegyük észre, hogy feltéve, hogy $q > r$, és így $a > b$, $(q-r)p = a^2+a+k-b^2-b-k = (a-b)(a+b+1)$. Mivel $0 < b < a < p$, azért $p \nmid a-b$, és így $p \mid a+b+1$. Felhasználva megint, hogy $a, b < p$, kapjuk, hogy $0 < a+b+1 < 2p$, tehát $p = a+b+1$. Ekkor $q-r = a-b$, átrendezve $a-q = b-r$. Nevezzük ezt a különbséget d-nek. A $pq = a^2 + a + k$ egyenlőségbe behelyettesítve először a $p = a + b + 1$, majd az $a = q + d$, illetve $b = q + r$ kifejezést:

$$q(q + r + 2d + 1) = (q + d)^2 + q + d + k,$$

$$q^2 + qr + 2qd + q = q^2 + 2qd + d^2 + q + d + k,$$

$$qr = d^2 + d + k.$$

Innen végtelen leszállással fogjuk befejezni a bizonyítást. Tekintsük az S halmaz elemszámát, és tegyük fel, hogy egy n elemű halmazra létezik két különböző konstrukció. Azonban az eddigiek alapján tudjuk, hogy a legnagyobb prímnek mindkét konstrukcióban ugyanaz a két szomszédja, ráaadásul ha ezek szomszédosak lennének, teljesítenék a feltételt. Tehát ha az S halmazból kihagyjuk a legnagyobb elemét, akkor egy $n-1$ elemű halmazt kapunk, amire szintén van konstrukció, hiszen ha az előző konstrukcióból kivesszük a legnagyobb prímet, akkor a két szomszédja egymás szomszédjává válik. Ez teljesíti a feltételt, és így minden számnak ugyannnyi szomszédja marad. A végtelen leszállást folytatva tehát találhatnánk háromelemű S' halmazt is, aminek van kétféle felírása. Ez azonban ellentmondás, hiszen három számnak minden lehetséges felírása egymás elforgatottja vagy tükrözése.

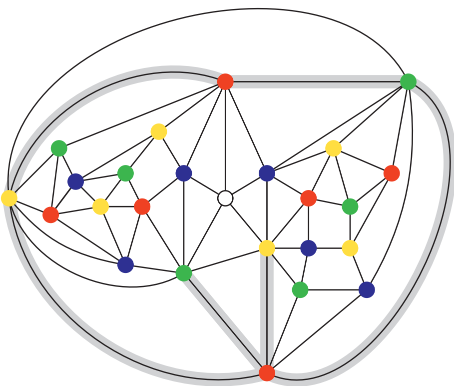
Négyszín-sejtés II: Hol a hiba Kempe bizonyításában?*

Az előző részben leírtuk Kempe hibás bizonyítását a négyszín-sejtésre, az olvasóra bízva, hogy megtalálja a hibát. Ezt a hibát Heawood vette észre 11 évvel azután, hogy Kempe publikálta a bizonyítását. Heawood jött rá arra is, hogy Kempe érvelése segítségével annyit azért be lehet látni, hogy tetszőleges (hurokélmentes) síkgráfot jól lehet színezni 5 színnel. Most mi is leírjuk, hogy hol van a hiba Kempe érvelésében, és hogy hogyan lehet belátni az ötszín-tételt.

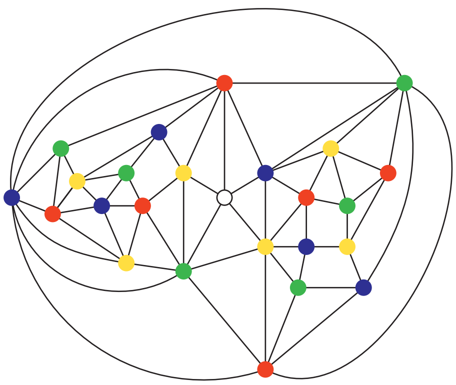
* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Hol van a hiba a Kempe-féle bizonyításban? Ahogy azt már az előző részben elárultuk, a hiba az utolsó esetben van, mégpedig akkor, ha a P csúcsot nem tudtuk sem sárgára, sem zöldre átszínezni. Ekkor az volt a módszerünk, hogy a $K1$ csúcsot átszíneztük sárgára, a $K2$ csúcsot pedig zöldre. Azt állítottuk, hogy a $K1$ sárgára színezésekor az S csúcs nem színeződik át kékre. Ez valóban így igaz, hiszen a piros-zöld kör elválasztja a $K1$-et S-től. Viszont megtörténhet, hogy az átszínezés során a piros-sárga kör néhány sárga csúcsát is átszínezzük, így a $K1$ átszínezése után a piros-sárga kör megszűnik létezni. Ezért a $K2$ zöldre színezésekor már nem tudja a piros-sárga kör garantálni, hogy a Z csúcs nem színeződik át kékre.

Hogy ez a probléma valóban bekövetkezhet, azt az *4. ábra* mutatja. A v csúcs fehér, a többi csúcs 4 színnel jól van színezve. A piros szomszédot nem lehet sem sárgára, sem zöldre átszínezni (az ezt tanúsító piros-sárga és piros-zöld utakat szürke vonal jelöli).



4. ábra



5. ábra

Az *5. ábra* mutatja, hogy mi történik, ha a $K1$ csúcsot sárgára színezzük. Ekkor a piros-sárga út egyik csúcsa kékre színeződik, tehát eltűnik a piros-sárga út. És valóban, ellenőrizhetjük, hogy ha ebben a színezésben most a $K2$ csúcsot zöldre színezzük, akkor már a Z csúcs kékre fog színeződni.

Tehát Kempe módszere nem működik minden esetben, azaz nem sikerült belátnunk a négyszín-sejtést. Persze (ahogy azóta Appel és Haken megmutatta) minden hurokélmentes síkgráfot jól lehet színezni 4 színnel. De sajnos Kempe módszerénél agyafúrtabb módszerekre van szükségünk, hogy egy ilyen 4 színnel való jó színezést mindig megtaláljunk. Viszont ha egy konkrét síkgráfot szeretnénk 4 színnel jól színezni, akkor érdekes módon Kempe módszere a gyakorlatban sokszor hatékony. Viszonylag ritkák az olyan $G-v$ gráfok és részleges színezések, amiket nem lehet Kempe módszerével befejezni. (Nyilván ezért is tartott 11 évig, amíg valaki felfedezte a bizonyításban a hibát.)

A 6-szín tétel és az 5-szín tétel

Mikor Heawood megtalálta a hibát Kempe bizonyításában, arra is rájött, hogy az ötszín-tételt azért be lehet bizonyítani Kempe módszerével. Nézzük meg hogy is megy ez a bizonyítás, de előtte jegyezzük meg, hogy a hatszín-tételt egészen meglepően egyszerű bebizonyítani.

1. tétel. *Tetszőleges hurokélmentes síkgráf jól színezhető* 6 *színnel.*

Bizonyítás. Ismét elég a tételt egyszerű síkgráfokra bizonyítani, mert a többszörös éleket egyszeres élekkel helyettesítve a jó színezések ugyanazok maradnak.

Egyszerű síkgráfokra pontszámra vonatkozó indukcióval látjuk be a tételt. Ha legfeljebb 6 pontja van a gráfnak, akkor nyilván ki tudjuk színezni 6 színnel, hiszen akár minden pontnak saját szín jut. Tegyük fel, hogy minden legfeljebb k-pontú egyszerű síkgráfot ki lehet színezni 6 színnel. Vegyünk egy $(k+1)$-pontú egyszerű G síkgráfot. Mint az előző részben megmutattuk, egy egyszerű síkgráfban mindig van legfeljebb 5-fokú pont. Vegyünk egy ilyen pontot, és jelöljük v-vel. A v törlésével kapott $G-v$ továbbra is síkgráf, de már k csúccsal. Tehát ezt a gráfot az indukciós feltevés szerint ki lehet színezni 6 színnel. Színezzük ki (jól) 6 színnel. Most rajzoljuk vissza a v pontot és a rá illeszkedő éleket. Mivel v-nek legfeljebb 5 szomszédja van, a szomszédai legfeljebb 5 színt használnak el. Mindenképp marad tehát egy szabad szín, amit v-nek adhatunk. Így jól színeztük G-t 6 színnel, tehát befejeztük az indukciós lépést. $\square$

Most lássuk be, hogy 5 szín is elég a jó színezéshez!

2. tétel. *Tetszőleges hurokélmentes síkgráf jól színezhető* 5 *színnel.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint a hatszín-tételnél, most is elég, ha a tételt egyszerű síkgráfokra bizonyítjuk. Megint pontszámra vonatkozó indukciót használunk. Legfeljebb 5-pontú gráfra a jó színezhetőség világos. Tegyük fel, hogy legfeljebb k-pontú gráfokra már tudunk 5 színnel jó színezést adni. Vegyünk egy $(k+1)$-pontú G gráfot. Újra vehetünk egy legfeljebb 5-fokú v pontot. A v törlésével kapott gráfot az indukciós feltevés szerint ki tudjuk jól színezni 5 színnel. Nézzük, hogy ki tudjuk-e színezni a v csúcsot, miután visszarajzoltuk.

Ha a v-nek legfeljebb 4 szomszédja van, vagy 5 szomszédja van, de ezek a $G-v$ színezésekor nem mind különböző színt kaptak, akkor v szomszédai legfeljebb 4 színt használnak el, és marad a v-nek szabad szín. Probléma csak akkor van, ha a v-nek pontosan 5 szomszédja van, és a $G-v$ színezésében ez az 5 szomszéd mind különböző színeket kapott. Megmutatjuk, hogy ilyenkor Kempe módszerével meg lehet egy kicsit változtatni a $G-v$ színezését úgy, hogy továbbra is jó színezés legyen, de v szomszédai már ne legyenek mind különböző színűek.

Tegyük fel, hogy v szomszédai az óramutató járása szerint piros, sárga, kék, zöld és fekete színeket kaptak. Próbáljuk meg a piros szomszédot kékre átszínezni, majd ennek kék szomszédait pirosra, stb. Ha v kék szomszédja nem színeződik át pirosra, akkor v lehet piros. Ha a kék szomszéd átszíneződik, akkor van egy piros-kék út a v piros és kék szomszédja között, ami v-vel együtt egy kört alkot. Ez a kör elválasztja a sárga szomszédot a zöld és fekete szomszédoktól. Tehát ekkor a sárga szomszédot átszínezve például zöldre, a zöld szomszéd már nem fog sárgára átszíneződni. Vagyis v lehet sárga, és készen vagyunk. $\square$

Vegyük észre, hogy az 5 színnel való színezés megtalálásában egész sok szabadsági fokunk volt, például az utolsó lépésben a sárga szomszédot feketére is színezhettük volna, de kezdhettük volna úgy is, hogy a piros csúcsot feketére színezzük át. Tehát az ember úgy érzi, hogy 5 színnel jó színezést találni nem túlságosan nehéz dolog. 6 színnel jó színezést találni pedig végképp nagyon egyszerű volt. 4 színnel jó színezést találni mégis olyan nehézzé válik, hogy 120 év kellett a bizonyításhoz, és még ebben a bizonyításban is rengeteg gráfról számítógéppel kellett ellenőrizni hogy van jó színezése.

A következő részben egy másik utat mutatunk be, amelyen keresztül matematikusok a négyszín-sejtést próbálták bebizonyítani. Ez a másik út a színezési polinom módszere volt, ami arról szólt, hogy ahelyett, hogy csak megpróbáljuk bizonyítani a 4 színnel való jó színezések létezését, inkább próbáljuk meg megszámolni őket. Bár végül nem a színezési polinom segítségével lett bebizonyítva a négyszín-tétel, a színezési polinom kutatása nagyon sok érdekes dolgot feltárt, és valamennyire azt is megmutatja, hogy miért olyan nehéz a négyszín-tétel.

Hivatkozások

[1] `https://web.stonehill.edu/compsci/LC/Four-Color/Four-color.htm`

[2] Alfred Bray, *Kempe's "proof" of the four-color theorem,* MATH horizons, 2002. `https://mathweb.ucsd.edu/~ssam/old/19W-154/kempe.pdf`

Tóthmérész Lilla
ELTE

61. Rátz László Vándorgyűlés

Eger, 2022. július 5–8.

Eger már harmadik éve készült megrendezni a vándorgyűlést, de a pandémia közbeszólt: két éve elmaradt az esemény, tavaly pedig online rendezték meg. Így már nagyon vártuk, hogy végre újra személyesen vehessünk részt rajta, találkozhassunk a rég nem látott kedves ismerősökkel. A Bolyai János Matematikai Társulat oktatási bizottsága nagyon sokat fáradozott azért, hogy minél több fiatal, pályakezdő, vagy éppen még tanárjelölt hallgató pedagógus vegyen részt. Ebben nagy segítség lehetett a társulat által kiírt pályázat, amely pont a fiatal korosztály részvételét támogatta.

A megnyitón hagyományosan átadták a Beke Manó-emlékdíjakat, és idén először a Reményi-díjakat is. A Reményi-díj a Graphisoft-díj utóda.

Eger egy nagyon hangulatos város, akár a templomait, a várat, vagy a Szépasszony-völgyet, akár a vándorgyűlésnek otthont adó Eszterházy Károly Katolikus Egyetem campusát tekintjük. A pazar szakmai programkínálat mellett egyéb kultúrális programokban is bővelkedtünk: egész nyáron zajlottak az Agria Nyári Játékok, illetve pont a vándorgyűlés napjaiban az Egri Bor Ünnepe.