A 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Oslo bankja kétféle típusú érmét bocsát ki: alumíniumot (jele A) és bronzot (jele B). Mariann előtt n alumíniumérme és n bronzérme van egy sorban elrendezve valamilyen tetszőleges kezdeti sorrendben.* Láncnak *nevezzük egymást közvetlenül követő, azonos típusú érmék tetszőleges sorozatát. Rögzített $k \leqslant 2n$ pozitív egész szám mellett Mariann ismételten végrehajtja a következő műveletet: meghatározza a leghosszabb olyan láncot, amely tartalmazza a balról számított k-adik érmét, és az ezen lánchoz tartozó összes érmét átteszi a sor bal szélére. Például, ha $n=4$ és $k=4$, akkor az $AABBBABA$ elrendezésből kiinduló folyamat:*

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to$$
$$\to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Határozzuk meg mindazon, $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tulajdonságú (n,k) párokat, amelyekre minden kiindulási elrendezés esetén lesz olyan pillanat a folyamat során, hogy a balról számított első n érme mind azonos típusú.

Terjék András József megoldása. Először megmutatjuk, hogy ha $k \leqslant n-1$ vagy $k \geqslant \frac{3}{2}n+1$, akkor van olyan kiindulási helyzet, amely után sosem lesz az első n érme azonos típusú.

Legyen először $k \leqslant n-1$ és legyen az érmék elrendezése a következő:

$$n-1 \text{ db } A, \quad 1 \text{ db } B, \quad 1 \text{ db } A, \quad n-1 \text{ db } B.$$

Ekkor a kiválasztott lánc mindig az első lánc lesz, így egy lépés nem változtat semmit, tehát sosem lesz az első n érme azonos típusú.

Ha pedig $k \geqslant \frac{3}{2}n+1$, tekintsük a következő elrendezést:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ db } A, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ db } B, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ db } A, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ db } B.$$

Ekkor a kiválasztott lánc mindig a legutolsó lesz (mert $k \geqslant \frac{3}{2}n+1 > 2\cdot\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$). Tehát az érmesor változása egy 4 hosszú ciklust fog követni és sosem lesz n hosszú lánc.

* A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Vegyük észre, hogy ha egy lépés során olyan láncot választunk ki, amely nem az első vagy utolsó, akkor ezen lánc áthelyezésével a két szomszédja egy lánccá válik, és nem keletkezik új lánc, tehát csökken a láncok száma az érmesorozatban.

Nem lehet végtelen sok olyan lépés, amely csökkenti a láncok számát (mert nincs olyan lépés, amelynek során új lánc keletkezik), így egy idő után bármilyen kiindulóhelyzetből mindig az első vagy az utolsó láncot választjuk ki.

$k=n$ és $k=n+1$ esetén, ha legszélső láncot választunk ki, az csak n hosszú lehet, tehát ezt az elejére helyezve az első n érme azonos típusú.

$n+1<k<\frac{3}{2}n+1$ esetén egy idő után mindig az utolsó láncot választjuk, és ezt helyezzük a sorozat legelejére. Ilyen lépésekkel előbb-utóbb minden láncot ki kell hogy válasszunk (mert egy lánc, amely hátulról az ℓ-edik, $\ell-1$ lépés után az utolsó lánc lesz). Ez azt jelenti, hogy minden lánc hossza legalább $2n-k+1$.

Mivel $k<\frac{3}{2}n+1$, így $2n-k+1>\frac{n}{2}$. Tehát minden lánc hossza nagyobb, mint $\frac{n}{2}$; tehát egy érméből nem lehet 2 különböző lánc. Vagyis az egész sorozat egy n hosszú A és egy n hosszú B láncból áll.

Tehát pontosan azok az (n,k) párok felelnek meg, ahol

$$n\leqslant k<\frac{3}{2}n+1.$$

2. *Jelölje $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát. Határozzuk meg mindazon $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ függvényeket, amelyekre minden $x\in\mathbb{R}^+$ esetén pontosan egy olyan $y\in\mathbb{R}^+$ létezik, hogy*

$$xf(y)+yf(x)\leqslant 2.$$

Németh Márton megoldása. A feltétel szimmetriája miatt, ha x-hez y az egyetlen megfelelő érték, akkor y-hoz az x, vagyis a feltétel meghatároz egy olyan $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ involúciót, melyre bármely $x\in\mathbb{R}^+$ esetén $g\big(g(x)\big)=x$, és x-hez $y=g(x)$ az egyetlen érték, mely kielégíti a feladat egyenlőtlenségét.

Először belátjuk, hogy $g(x)=x$ minden pozitív valós x-re. Tegyük fel indirekt, hogy nem, vagyis létezik $x\neq y\in\mathbb{R}^+$, melyekre

$$xf(y)+yf(x)\leqslant 2.$$

Ekkor az értékek egyértelműsége miatt a következők is igazak:

$$xf(x)+xf(x)>2 \qquad \text{és} \qquad yf(y)+yf(y)>2,$$
$$xf(x)>1 \qquad \text{és} \qquad yf(y)>1.$$

Használjuk a számtani-mértani közepek egyenlőtlenségét:

$$2\geqslant xf(y)+yf(x)\geqslant 2\sqrt{xyf(x)f(y)}=2\sqrt{\big(xf(x)\big)\cdot\big(yf(y)\big)}>2\sqrt{1\cdot 1}=2.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis $g(x)\equiv x$.

Tehát $xf(x) \leqslant 1$ minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Ezután belátjuk, hogy

$$f(x) \equiv \frac{1}{x}.$$

Világos, hogy $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(x) < \frac{1}{x}$. Legyen $\varepsilon = \frac{1}{x} - f(x) > 0$. Így minden x-nél kisebb y-ra (ahol $y \in \mathbb{R}^+$) teljesülnie kell, hogy:

$$xf(y) + yf(x) > 2 \quad \text{és} \quad f(y) \leqslant \frac{1}{y}.$$

Végül legyen még $z = x - y$. Vizsgálni fogjuk, hogy mi történik, amikor $z > 0$ nagyon kis értéket vesz fel. $xf(x-z) + (x-z)f(x) > 2$, ekkor $f(x-z) \leqslant \frac{1}{x-z}$ miatt

$$x\frac{1}{x-z} + (x-z)\left(\frac{1}{x} - \varepsilon\right) > 2$$

is teljesül, ebből

$$z\varepsilon + 1 + \frac{z}{x-z} + 1 > 2 + \frac{z}{x} + x\varepsilon,$$

$$z\varepsilon + \frac{z}{x-z} > \frac{z}{x} + x\varepsilon,$$

$$2zx\varepsilon + \frac{z^2}{x} > x^2\varepsilon + z^2\varepsilon,$$

$$2zx\varepsilon + \frac{z^2}{x} > x^2\varepsilon,$$

ami azonban nem teljesül, amikor $z > 0$ megfelelően kicsi, hiszen minden tag pozitív, és a jobb oldal állandó marad. Ellentmondásra jutottunk, vagyis az indirekt feltevés nem igaz, tehát $f(x) \equiv \frac{1}{x}$ teljesül.

Végül belátjuk, hogy ez eleget tesz a feltételeknek. A számtani-mértani közepek egyenlőtlenségével:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{xy}} = 2.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, amikor $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, tehát $x = y > 0$.

3. *Legyen k pozitív egész, és legyen S páratlan prímszámoknak egy véges halmaza. Bizonyítandó, hogy (elforgatástól és tükrözéstől eltekintve) legfeljebb egyféleképpen lehet az S elemeit egy kör mentén elrendezni úgy, hogy bármely két szomszédosnak a szorzata $x^2 + x + k$ alakú legyen valamilyen pozitív egész x-szel.*

Kovács Tamás megoldása. Először azt fogom belátni, hogy a legnagyobb prímnek csak kétféle szomszédja lehet, azaz minden lehetséges elrendezésben ugyanaz a két prím kell hogy mellette álljon. Legyen p a legnagyobb prím, és az egyik elrendezésben a szomszédai q és r; és legyen $pq = a^2 + a + k$, és $pr = b^2 + b + k$. Mivel

p a legnagyobb szám, $p^2 > pq$, és $p^2 > pr$, tehát $p > a$, és $p > b$, és nyilván $a \neq b$, mert $p \neq q$. Ez azt jelenti, hogy a és b is megoldásai a modulo p testen értelmezett $x^2 + x + k = 0$ egyenletnek. Azonban ez egy másodfokú egyenlet, tehát legfeljebb két megoldása lehet. Így nem lehet p-nek egy harmadik s szomszédja, mert akkor az ahhoz tartozó c érték is ugyanígy egy b-től és c-től különböző megoldás lenne.

Másodszor azt fogom belátni, hogy a legnagyobb prím q és r szomszédaira qr is előáll x^2+x+k alakban. Ehhez először vegyük észre, hogy feltéve, hogy $q > r$, és így $a > b$, $(q-r)p = a^2+a+k-b^2-b-k = (a-b)(a+b+1)$. Mivel $0 < b < a < p$, azért $p \nmid a-b$, és így $p \mid a+b+1$. Felhasználva megint, hogy $a, b < p$, kapjuk, hogy $0 < a+b+1 < 2p$, tehát $p = a+b+1$. Ekkor $q-r = a-b$, átrendezve $a-q = b-r$. Nevezzük ezt a különbséget d-nek. A $pq = a^2+a+k$ egyenlőségbe behelyettesítve először a $p = a+b+1$, majd az $a = q+d$, illetve $b = q+r$ kifejezést:

$$q(q+r+2d+1) = (q+d)^2 + q + d + k,$$

$$q^2 + qr + 2qd + q = q^2 + 2qd + d^2 + q + d + k,$$

$$qr = d^2 + d + k.$$

Innen végtelen leszállással fogjuk befejezni a bizonyítást. Tekintsük az S halmaz elemszámát, és tegyük fel, hogy egy n elemű halmazra létezik két különböző konstrukció. Azonban az eddigiek alapján tudjuk, hogy a legnagyobb prímnek mindkét konstrukcióban ugyanaz a két szomszédja, ráaadásul ha ezek szomszédosak lennének, teljesítenék a feltételt. Tehát ha az S halmazból kihagyjuk a legnagyobb elemét, akkor egy $n-1$ elemű halmazt kapunk, amire szintén van konstrukció, hiszen ha az előző konstrukcióból kivesszük a legnagyobb prímet, akkor a két szomszédja egymás szomszédjává válik. Ez teljesíti a feltételt, és így minden számnak ugyannnyi szomszédja marad. A végtelen leszállást folytatva tehát találhatnánk háromelemű S' halmazt is, aminek van kétféle felírása. Ez azonban ellentmondás, hiszen három számnak minden lehetséges felírása egymás elforgatottja vagy tükrözése.

Négyszín-sejtés II: Hol a hiba Kempe bizonyításában?*

Az előző részben leírtuk Kempe hibás bizonyítását a négyszín-sejtésre, az olvasóra bízva, hogy megtalálja a hibát. Ezt a hibát Heawood vette észre 11 évvel azután, hogy Kempe publikálta a bizonyítását. Heawood jött rá arra is, hogy Kempe érvelése segítségével annyit azért be lehet látni, hogy tetszőleges (hurokélmentes) síkgráfot jól lehet színezni 5 színnel. Most mi is leírjuk, hogy hol van a hiba Kempe érvelésében, és hogy hogyan lehet belátni az ötszín-tételt.

* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.