KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 7. szám Budapest, 2022. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Oslo bankja kétféle típusú érmét bocsát ki: alumíniumot (jele A) és bronzot (jele B). Mariann előtt n alumíniumérme és n bronzérme van egy sorban elrendezve valamilyen tetszőleges kezdeti sorrendben.* Láncnak *nevezzük egymást közvetlenül követő, azonos típusú érmék tetszőleges sorozatát. Rögzített $k \leqslant 2n$ pozitív egész szám mellett Mariann ismételten végrehajtja a következő műveletet: meghatározza a leghosszabb olyan láncot, amely tartalmazza a balról számított k-adik érmét, és az ezen lánchoz tartozó összes érmét átteszi a sor bal szélére. Például, ha $n=4$ és $k=4$, akkor az $AABBBABA$ elrendezésből kiinduló folyamat:*

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to$$
$$\to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Határozzuk meg mindazon, $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tulajdonságú (n,k) párokat, amelyekre minden kiindulási elrendezés esetén lesz olyan pillanat a folyamat során, hogy a balról számított első n érme mind azonos típusú.

Terjék András József megoldása. Először megmutatjuk, hogy ha $k \leqslant n-1$ vagy $k \geqslant \frac{3}{2}n+1$, akkor van olyan kiindulási helyzet, amely után sosem lesz az első n érme azonos típusú.

Legyen először $k \leqslant n-1$ és legyen az érmék elrendezése a következő:

$$n-1 \text{ db } A, \quad 1 \text{ db } B, \quad 1 \text{ db } A, \quad n-1 \text{ db } B.$$

Ekkor a kiválasztott lánc mindig az első lánc lesz, így egy lépés nem változtat semmit, tehát sosem lesz az első n érme azonos típusú.

Ha pedig $k \geqslant \frac{3}{2}n+1$, tekintsük a következő elrendezést:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ db } A, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ db } B, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ db } A, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ db } B.$$

Ekkor a kiválasztott lánc mindig a legutolsó lesz (mert $k \geqslant \frac{3}{2}n+1 > 2\cdot\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$). Tehát az érmesor változása egy 4 hosszú ciklust fog követni és sosem lesz n hosszú lánc.

* A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Vegyük észre, hogy ha egy lépés során olyan láncot választunk ki, amely nem az első vagy utolsó, akkor ezen lánc áthelyezésével a két szomszédja egy lánccá válik, és nem keletkezik új lánc, tehát csökken a láncok száma az érmesorozatban.

Nem lehet végtelen sok olyan lépés, amely csökkenti a láncok számát (mert nincs olyan lépés, amelynek során új lánc keletkezik), így egy idő után bármilyen kiindulóhelyzetből mindig az első vagy az utolsó láncot választjuk ki.

$k=n$ és $k=n+1$ esetén, ha legszélső láncot választunk ki, az csak n hosszú lehet, tehát ezt az elejére helyezve az első n érme azonos típusú.

$n+1<k<\frac{3}{2}n+1$ esetén egy idő után mindig az utolsó láncot választjuk, és ezt helyezzük a sorozat legelejére. Ilyen lépésekkel előbb-utóbb minden láncot ki kell hogy válasszunk (mert egy lánc, amely hátulról az ℓ-edik, $\ell-1$ lépés után az utolsó lánc lesz). Ez azt jelenti, hogy minden lánc hossza legalább $2n-k+1$.

Mivel $k<\frac{3}{2}n+1$, így $2n-k+1>\frac{n}{2}$. Tehát minden lánc hossza nagyobb, mint $\frac{n}{2}$; tehát egy érméből nem lehet 2 különböző lánc. Vagyis az egész sorozat egy n hosszú A és egy n hosszú B láncból áll.

Tehát pontosan azok az (n,k) párok felelnek meg, ahol

$$n\leqslant k<\frac{3}{2}n+1.$$

2. *Jelölje $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát. Határozzuk meg mindazon $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ függvényeket, amelyekre minden $x\in\mathbb{R}^+$ esetén pontosan egy olyan $y\in\mathbb{R}^+$ létezik, hogy*

$$xf(y)+yf(x)\leqslant 2.$$

Németh Márton megoldása. A feltétel szimmetriája miatt, ha x-hez y az egyetlen megfelelő érték, akkor y-hoz az x, vagyis a feltétel meghatároz egy olyan $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ involúciót, melyre bármely $x\in\mathbb{R}^+$ esetén $g\big(g(x)\big)=x$, és x-hez $y=g(x)$ az egyetlen érték, mely kielégíti a feladat egyenlőtlenségét.

Először belátjuk, hogy $g(x)=x$ minden pozitív valós x-re. Tegyük fel indirekt, hogy nem, vagyis létezik $x\neq y\in\mathbb{R}^+$, melyekre

$$xf(y)+yf(x)\leqslant 2.$$

Ekkor az értékek egyértelműsége miatt a következők is igazak:

$$xf(x)+xf(x)>2 \quad\text{és}\quad yf(y)+yf(y)>2,$$
$$xf(x)>1 \quad\text{és}\quad yf(y)>1.$$

Használjuk a számtani-mértani közepek egyenlőtlenségét:

$$2\geqslant xf(y)+yf(x)\geqslant 2\sqrt{xyf(x)f(y)}=2\sqrt{\big(xf(x)\big)\cdot\big(yf(y)\big)}>2\sqrt{1\cdot 1}=2.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis $g(x)\equiv x$.

Tehát $xf(x) \leqslant 1$ minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Ezután belátjuk, hogy

$$f(x) \equiv \frac{1}{x}.$$

Világos, hogy $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(x) < \frac{1}{x}$. Legyen $\varepsilon = \frac{1}{x} - f(x) > 0$. Így minden x-nél kisebb y-ra (ahol $y \in \mathbb{R}^+$) teljesülnie kell, hogy:

$$xf(y) + yf(x) > 2 \quad \text{és} \quad f(y) \leqslant \frac{1}{y}.$$

Végül legyen még $z = x - y$. Vizsgálni fogjuk, hogy mi történik, amikor $z > 0$ nagyon kis értéket vesz fel. $xf(x-z) + (x-z)f(x) > 2$, ekkor $f(x-z) \leqslant \frac{1}{x-z}$ miatt

$$x\frac{1}{x-z} + (x-z)\left(\frac{1}{x} - \varepsilon\right) > 2$$

is teljesül, ebből

$$z\varepsilon + 1 + \frac{z}{x-z} + 1 > 2 + \frac{z}{x} + x\varepsilon,$$

$$z\varepsilon + \frac{z}{x-z} > \frac{z}{x} + x\varepsilon,$$

$$2zx\varepsilon + \frac{z^2}{x} > x^2\varepsilon + z^2\varepsilon,$$

$$2zx\varepsilon + \frac{z^2}{x} > x^2\varepsilon,$$

ami azonban nem teljesül, amikor $z > 0$ megfelelően kicsi, hiszen minden tag pozitív, és a jobb oldal állandó marad. Ellentmondásra jutottunk, vagyis az indirekt feltevés nem igaz, tehát $f(x) \equiv \frac{1}{x}$ teljesül.

Végül belátjuk, hogy ez eleget tesz a feltételeknek. A számtani-mértani közepek egyenlőtlenségével:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{xy}} = 2.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, amikor $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, tehát $x = y > 0$.

3. *Legyen k pozitív egész, és legyen S páratlan prímszámoknak egy véges halmaza. Bizonyítandó, hogy (elforgatástól és tükrözéstől eltekintve) legfeljebb egyféleképpen lehet az S elemeit egy kör mentén elrendezni úgy, hogy bármely két szomszédosnak a szorzata $x^2 + x + k$ alakú legyen valamilyen pozitív egész x-szel.*

Kovács Tamás megoldása. Először azt fogom belátni, hogy a legnagyobb prímnek csak kétféle szomszédja lehet, azaz minden lehetséges elrendezésben ugyanaz a két prím kell hogy mellette álljon. Legyen p a legnagyobb prím, és az egyik elrendezésben a szomszédai q és r; és legyen $pq = a^2 + a + k$, és $pr = b^2 + b + k$. Mivel

p a legnagyobb szám, $p^2 > pq$, és $p^2 > pr$, tehát $p > a$, és $p > b$, és nyilván $a \neq b$, mert $p \neq q$. Ez azt jelenti, hogy a és b is megoldásai a modulo p testen értelmezett $x^2 + x + k = 0$ egyenletnek. Azonban ez egy másodfokú egyenlet, tehát legfeljebb két megoldása lehet. Így nem lehet p-nek egy harmadik s szomszédja, mert akkor az ahhoz tartozó c érték is ugyanígy egy b-től és c-től különböző megoldás lenne.

Másodszor azt fogom belátni, hogy a legnagyobb prím q és r szomszédaira qr is előáll x^2+x+k alakban. Ehhez először vegyük észre, hogy feltéve, hogy $q > r$, és így $a > b$, $(q-r)p = a^2+a+k-b^2-b-k = (a-b)(a+b+1)$. Mivel $0 < b < a < p$, azért $p \nmid a-b$, és így $p \mid a+b+1$. Felhasználva megint, hogy $a, b < p$, kapjuk, hogy $0 < a+b+1 < 2p$, tehát $p = a+b+1$. Ekkor $q-r = a-b$, átrendezve $a-q = b-r$. Nevezzük ezt a különbséget d-nek. A $pq = a^2 + a + k$ egyenlőségbe behelyettesítve először a $p = a + b + 1$, majd az $a = q + d$, illetve $b = q + r$ kifejezést:

$$q(q + r + 2d + 1) = (q + d)^2 + q + d + k,$$

$$q^2 + qr + 2qd + q = q^2 + 2qd + d^2 + q + d + k,$$

$$qr = d^2 + d + k.$$

Innen végtelen leszállással fogjuk befejezni a bizonyítást. Tekintsük az S halmaz elemszámát, és tegyük fel, hogy egy n elemű halmazra létezik két különböző konstrukció. Azonban az eddigiek alapján tudjuk, hogy a legnagyobb prímnek mindkét konstrukcióban ugyanaz a két szomszédja, ráaadásul ha ezek szomszédosak lennének, teljesítenék a feltételt. Tehát ha az S halmazból kihagyjuk a legnagyobb elemét, akkor egy $n-1$ elemű halmazt kapunk, amire szintén van konstrukció, hiszen ha az előző konstrukcióból kivesszük a legnagyobb prímet, akkor a két szomszédja egymás szomszédjává válik. Ez teljesíti a feltételt, és így minden számnak ugyannnyi szomszédja marad. A végtelen leszállást folytatva tehát találhatnánk háromelemű S' halmazt is, aminek van kétféle felírása. Ez azonban ellentmondás, hiszen három számnak minden lehetséges felírása egymás elforgatottja vagy tükrözése.

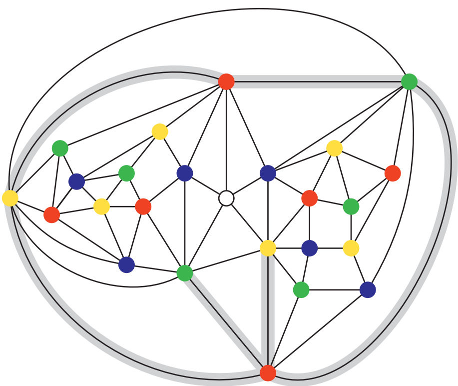
Négyszín-sejtés II: Hol a hiba Kempe bizonyításában?*

Az előző részben leírtuk Kempe hibás bizonyítását a négyszín-sejtésre, az olvasóra bízva, hogy megtalálja a hibát. Ezt a hibát Heawood vette észre 11 évvel azután, hogy Kempe publikálta a bizonyítását. Heawood jött rá arra is, hogy Kempe érvelése segítségével annyit azért be lehet látni, hogy tetszőleges (hurokélmentes) síkgráfot jól lehet színezni 5 színnel. Most mi is leírjuk, hogy hol van a hiba Kempe érvelésében, és hogy hogyan lehet belátni az ötszín-tételt.

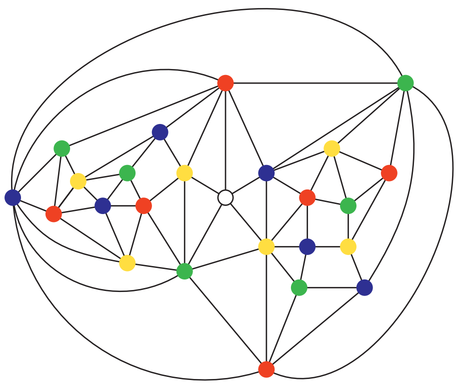
* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Hol van a hiba a Kempe-féle bizonyításban? Ahogy azt már az előző részben elárultuk, a hiba az utolsó esetben van, mégpedig akkor, ha a P csúcsot nem tudtuk sem sárgára, sem zöldre átszínezni. Ekkor az volt a módszerünk, hogy a $K1$ csúcsot átszíneztük sárgára, a $K2$ csúcsot pedig zöldre. Azt állítottuk, hogy a $K1$ sárgára színezésekor az S csúcs nem színeződik át kékre. Ez valóban így igaz, hiszen a piros-zöld kör elválasztja a $K1$-et S-től. Viszont megtörténhet, hogy az átszínezés során a piros-sárga kör néhány sárga csúcsát is átszínezzük, így a $K1$ átszínezése után a piros-sárga kör megszűnik létezni. Ezért a $K2$ zöldre színezésekor már nem tudja a piros-sárga kör garantálni, hogy a Z csúcs nem színeződik át kékre.

Hogy ez a probléma valóban bekövetkezhet, azt az *4. ábra* mutatja. A v csúcs fehér, a többi csúcs 4 színnel jól van színezve. A piros szomszédot nem lehet sem sárgára, sem zöldre átszínezni (az ezt tanúsító piros-sárga és piros-zöld utakat szürke vonal jelöli).



4. ábra



5. ábra

Az *5. ábra* mutatja, hogy mi történik, ha a $K1$ csúcsot sárgára színezzük. Ekkor a piros-sárga út egyik csúcsa kékre színeződik, tehát eltűnik a piros-sárga út. És valóban, ellenőrizhetjük, hogy ha ebben a színezésben most a $K2$ csúcsot zöldre színezzük, akkor már a Z csúcs kékre fog színeződni.

Tehát Kempe módszere nem működik minden esetben, azaz nem sikerült belátnunk a négyszín-sejtést. Persze (ahogy azóta Appel és Haken megmutatta) minden hurokélmentes síkgráfot jól lehet színezni 4 színnel. De sajnos Kempe módszerénél agyafúrtabb módszerekre van szükségünk, hogy egy ilyen 4 színnel való jó színezést mindig megtaláljunk. Viszont ha egy konkrét síkgráfot szeretnénk 4 színnel jól színezni, akkor érdekes módon Kempe módszere a gyakorlatban sokszor hatékony. Viszonylag ritkák az olyan $G-v$ gráfok és részleges színezések, amiket nem lehet Kempe módszerével befejezni. (Nyilván ezért is tartott 11 évig, amíg valaki felfedezte a bizonyításban a hibát.)

A 6-szín tétel és az 5-szín tétel

Mikor Heawood megtalálta a hibát Kempe bizonyításában, arra is rájött, hogy az ötszín-tételt azért be lehet bizonyítani Kempe módszerével. Nézzük meg hogy is megy ez a bizonyítás, de előtte jegyezzük meg, hogy a hatszín-tételt egészen meglepően egyszerű bebizonyítani.

1. tétel. *Tetszőleges hurokélmentes síkgráf jól színezhető* 6 *színnel.*

Bizonyítás. Ismét elég a tételt egyszerű síkgráfokra bizonyítani, mert a többszörös éleket egyszeres élekkel helyettesítve a jó színezések ugyanazok maradnak.

Egyszerű síkgráfokra pontszámra vonatkozó indukcióval látjuk be a tételt. Ha legfeljebb 6 pontja van a gráfnak, akkor nyilván ki tudjuk színezni 6 színnel, hiszen akár minden pontnak saját szín jut. Tegyük fel, hogy minden legfeljebb k-pontú egyszerű síkgráfot ki lehet színezni 6 színnel. Vegyünk egy $(k+1)$-pontú egyszerű G síkgráfot. Mint az előző részben megmutattuk, egy egyszerű síkgráfban mindig van legfeljebb 5-fokú pont. Vegyünk egy ilyen pontot, és jelöljük v-vel. A v törlésével kapott $G-v$ továbbra is síkgráf, de már k csúccsal. Tehát ezt a gráfot az indukciós feltevés szerint ki lehet színezni 6 színnel. Színezzük ki (jól) 6 színnel. Most rajzoljuk vissza a v pontot és a rá illeszkedő éleket. Mivel v-nek legfeljebb 5 szomszédja van, a szomszédai legfeljebb 5 színt használnak el. Mindenképp marad tehát egy szabad szín, amit v-nek adhatunk. Így jól színeztük G-t 6 színnel, tehát befejeztük az indukciós lépést. □

Most lássuk be, hogy 5 szín is elég a jó színezéshez!

2. tétel. *Tetszőleges hurokélmentes síkgráf jól színezhető* 5 *színnel.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint a hatszín-tételnél, most is elég, ha a tételt egyszerű síkgráfokra bizonyítjuk. Megint pontszámra vonatkozó indukciót használunk. Legfeljebb 5-pontú gráfra a jó színezhetőség világos. Tegyük fel, hogy legfeljebb k-pontú gráfokra már tudunk 5 színnel jó színezést adni. Vegyünk egy $(k+1)$-pontú G gráfot. Újra vehetünk egy legfeljebb 5-fokú v pontot. A v törlésével kapott gráfot az indukciós feltevés szerint ki tudjuk jól színezni 5 színnel. Nézzük, hogy ki tudjuk-e színezni a v csúcsot, miután visszarajzoltuk.

Ha a v-nek legfeljebb 4 szomszédja van, vagy 5 szomszédja van, de ezek a $G-v$ színezésekor nem mind különböző színt kaptak, akkor v szomszédai legfeljebb 4 színt használnak el, és marad a v-nek szabad szín. Probléma csak akkor van, ha a v-nek pontosan 5 szomszédja van, és a $G-v$ színezésében ez az 5 szomszéd mind különböző színeket kapott. Megmutatjuk, hogy ilyenkor Kempe módszerével meg lehet egy kicsit változtatni a $G-v$ színezését úgy, hogy továbbra is jó színezés legyen, de v szomszédai már ne legyenek mind különböző színűek.

Tegyük fel, hogy v szomszédai az óramutató járása szerint piros, sárga, kék, zöld és fekete színeket kaptak. Próbáljuk meg a piros szomszédot kékre átszínezni, majd ennek kék szomszédait pirosra, stb. Ha v kék szomszédja nem színeződik át pirosra, akkor v lehet piros. Ha a kék szomszéd átszíneződik, akkor van egy piros-kék út a v piros és kék szomszédja között, ami v-vel együtt egy kört alkot. Ez a kör elválasztja a sárga szomszédot a zöld és fekete szomszédoktól. Tehát ekkor a sárga szomszédot átszínezve például zöldre, a zöld szomszéd már nem fog sárgára átszíneződni. Vagyis v lehet sárga, és készen vagyunk. □

Vegyük észre, hogy az 5 színnel való színezés megtalálásában egész sok szabadsági fokunk volt, például az utolsó lépésben a sárga szomszédot feketére is színezhettük volna, de kezdhettük volna úgy is, hogy a piros csúcsot feketére színezzük át. Tehát az ember úgy érzi, hogy 5 színnel jó színezést találni nem túlságosan nehéz dolog. 6 színnel jó színezést találni pedig végképp nagyon egyszerű volt. 4 színnel jó színezést találni mégis olyan nehézzé válik, hogy 120 év kellett a bizonyításhoz, és még ebben a bizonyításban is rengeteg gráfról számítógéppel kellett ellenőrizni hogy van jó színezése.

A következő részben egy másik utat mutatunk be, amelyen keresztül matematikusok a négyszín-sejtést próbálták bebizonyítani. Ez a másik út a színezési polinom módszere volt, ami arról szólt, hogy ahelyett, hogy csak megpróbáljuk bizonyítani a 4 színnel való jó színezések létezését, inkább próbáljuk meg megszámolni őket. Bár végül nem a színezési polinom segítségével lett bebizonyítva a négyszín-tétel, a színezési polinom kutatása nagyon sok érdekes dolgot feltárt, és valamennyire azt is megmutatja, hogy miért olyan nehéz a négyszín-tétel.

Hivatkozások

[1] `https://web.stonehill.edu/compsci/LC/Four-Color/Four-color.htm`

[2] Alfred Bray, *Kempe's "proof" of the four-color theorem,* MATH horizons, 2002. `https://mathweb.ucsd.edu/~ssam/old/19W-154/kempe.pdf`

Tóthmérész Lilla
ELTE

61. Rátz László Vándorgyűlés

Eger, 2022. július 5–8.

Eger már harmadik éve készült megrendezni a vándorgyűlést, de a pandémia közbeszólt: két éve elmaradt az esemény, tavaly pedig online rendezték meg. Így már nagyon vártuk, hogy végre újra személyesen vehessünk részt rajta, találkozhassunk a rég nem látott kedves ismerősökkel. A Bolyai János Matematikai Társulat oktatási bizottsága nagyon sokat fáradozott azért, hogy minél több fiatal, pályakezdő, vagy éppen még tanárjelölt hallgató pedagógus vegyen részt. Ebben nagy segítség lehetett a társulat által kiírt pályázat, amely pont a fiatal korosztály részvételét támogatta.

A megnyitón hagyományosan átadták a Beke Manó-emlékdíjakat, és idén először a Reményi-díjakat is. A Reményi-díj a Graphisoft-díj utóda.

Eger egy nagyon hangulatos város, akár a templomait, a várat, vagy a Szépasszony-völgyet, akár a vándorgyűlésnek otthont adó Eszterházy Károly Katolikus Egyetem campusát tekintjük. A pazar szakmai programkínálat mellett egyéb kultúrális programokban is bővelkedtünk: egész nyáron zajlottak az Agria Nyári Játékok, illetve pont a vándorgyűlés napjaiban az Egri Bor Ünnepe.

A vándorgyűlésről hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában[1]. Az előadások anyagai megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján[2].

A 2023-as vándorgyűlésre ismét nagy létszámban várja a matematikatanárokat a Bolyai János Matematikai Társulat.

Miklós Ildikó

A középiskolai tanárok[3] versenyének feladatai

1. Az $\overline{RLV20}$ és $\overline{RLV22}$ alakú ötjegyű számok összege 123 442. Mennyi az $R+L+V$ értéke? (A) 10; (B) 11; (C) 12; (D) 13; (E) 14.

2. A 16 384 legnagyobb prímosztója a 2, mivel $16\,384 = 2^{14}$. Mennyi a 16 383 legnagyobb prímosztójában a számjegyek összege? (A) 3; (B) 7; (C) 10; (D) 12; (E) 22.

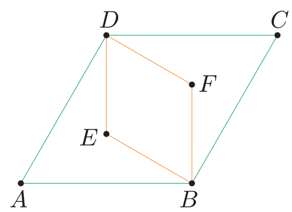
3. Egy bizonyos napon Győrben délelőtt n fokkal melegebb van, mint Szegeden ($n \in \mathbb{N}^+$). Délután 16 órára Győrben a hőmérséklet 5 fokkal csökkent, míg Szegeden 3 fokkal nőtt. Ekkor a két város hőmérséklete 2 fokkal különbözik egymástól. Mennyi az n összes lehetséges értékének szorzata? (A) 10; (B) 30; (C) 60; (D) 100; (E) 120.

4. Mennyi az alábbi kifejezés értéke?

$$\frac{\log_2 80}{\log_{40} 2} - \frac{\log_2 160}{\log_{20} 2}.$$

(A) 0; (B) 1; (C) $\frac{5}{4}$; (D) 2; (E) $\log_2 5$.

5. Az *ábrán* látható $ABCD$ és $BFDE$ rombuszok hasonlók. $T_{ABCD} = 24$, $DAB\sphericalangle = 60°$ és $DE \perp AB$. Mekkora a $BFDE$ rombusz területe? (A) 6; (B) $4\sqrt{3}$; (C) 8; (D) 9; (E) $6\sqrt{3}$.



6. Egy 8 egész számból álló adathalmaz átlaga, mediánja, egyetlen módusza és terjedelme is 8. Mekkora lehet legfeljebb az adathalmaz legnagyobb eleme? (A) 11; (B) 12; (C) 13; (D) 14; (E) 15.

7. Andris, Balázs és Dani játszanak. Mindannyian többször egymás után feldobnak egy-egy pénzérmét. Mindegyikük addig teszi ezt, amíg meg nem kapja az első fejet. Ekkor befejezi a dobássorozatát. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárman ugyanannyiszor dobják fel az érméjüket? (A) $\frac{1}{8}$; (B) $\frac{1}{7}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{4}$; (E) $\frac{1}{3}$.

8. Egy körbe írható $ABCD$ négyszögben $CAB\sphericalangle = 70°$, $BDA\sphericalangle = 40°$, $DA = 4$, $BC = 6$. Mekkora az AC átló? (A) $3+\sqrt{5}$; (B) 6; (C) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; (D) $8-\sqrt{2}$; (E) 7.

[1] `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2022-19/1220-sikeres-vandorgyules-egerben`.

[2] `https://www.bolyai.hu/61-ratz-laszlo-vandorgyules-eger`.

[3] Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait később közöljük.

9. Öt különböző színű korongot elhelyezünk egymástól egyenlő távolságra egy kör kerületén. Először Dia kiválaszt két szomszédos korongot és felcseréli azokat, majd ezután tőle függetlenül testvére, Viki teszi meg ugyanezt. A két csere után mennyi lesz az eredeti helyüket elfoglaló korongok számának várható (átlagos) értéke? (A) 1,6; (B) 1,8; (C) 2,0; (D) 2,2; (E) 2,4.

10. Mekkora azon t értékek összege ($0^\circ \leqslant t^\circ \leqslant 360^\circ$, $t \in \mathbb{R}$), melyekre a síkbeli koordinátarendszer $(\cos 40^\circ; \sin 40^\circ)$, $(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ)$ és $(\cos t^\circ; \sin t^\circ)$ pontjai egy egyenlő szárú háromszög csúcsai lehetnek? (A) 100; (B) 150; (C) 333; (D) 360; (E) 380.

11. Legyen $n = 34 \cdot 34 \cdot 63 \cdot 270$. Mennyi az n páratlan és páros osztói összegének aránya? (A) $1:16$; (B) $1:14$; (C) $1:8$; (D) $1:4$; (E) $1:2$.

12. Egy bolha mozog a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben. A $(0;0)$ pontból indul, 5 egység hosszúságú ugrásokkal halad, és minden ugrása végén egész koordinátájú pontokba érkezik. Legkevesebb hány ugrással juthat el az $(1;0)$ pontba? (A) 2; (B) 3; (C) 5; (D) 7; (E) nem juthat el.

13. Az egész számok halmazán hány $(x;y)$ megoldása van az alábbi egyenletnek?

$$x^{2022} + y^2 = 2y.$$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) végtelen sok.

14. Egy kalapba beleteszünk 40 kártyát, amelyeken egy-egy szám szerepel 1-től 40-ig. Viki és Dávid becsukott szemmel kihúz a kalapból egy-egy kártyát, és az azon szereplő számot nem mondják meg egymásnak, majd közöttük a következő beszélgetés zajlik le:

Viki: Nem tudom megmondani, hogy kettőnk közül ki húzott nagyobb számot.
Dávid: Én viszont most már ezt tudom.
Viki: Prímszámot húztál?
Dávid: Igen.
Viki: Nos, akkor a számodat 100-zal megszorozva, és az eredményhez az enyémet hozzáadva négyzetszámot kapunk.

Mennyi a beszélgetés alapján a két kihúzott kártyán levő szám összege? (A) 27; (B) 37; (C) 47; (D) 57; (E) 67.

15. Nevezzük az $\frac{a}{b}$ nem feltétlenül redukált törtet különlegesnek, ha a és b pozitív egész számok és $a+b=15$. Hány különböző egész szám írható fel két nem feltétlenül különböző különleges tört összegeként? (A) 9; (B) 10; (C) 11; (D) 12; (E) 13.

16. Egy építész a vízszintes talajon kijelölt $ABCDEF$ szabályos hatszög csúcsaiban különböző magasságú, függőleges oszlopokat állít, majd ezek tetejére erősít egy talajjal nem párhuzamos hatszög alakú napelemet. A napelem billegés nélkül illeszkedik a tartóoszlopokra. Ha az A, B, C pontokban elhelyezett oszlopok magassága rendre 12, 9 és 10 méter, akkor hány méter az E pontban elhelyezett tartóoszlop? (A) 9; (B) $6\sqrt{3}$; (C) $8\sqrt{3}$; (D) 17; (E) $12\sqrt{3}$.

17. Az a, b, c, d, e olyan pozitív egész számok, melyekre $a+b+c+d+e=2022$. Legyen M az $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$ összegek maximuma. Mekkora M legkisebb lehetséges értéke? (A) 674; (B) 675; (C) 807; (D) 808; (E) 809.

18. Egy matematikaversenyen az egyes iskolák 3-3 fős csapatokkal vettek részt. Az egyéni versenyben minden résztvevő különböző egész pontszámot kapott. A Bolyai Iskola tanulói közül Réka érte el a legjobb eredményt. Az ő pontszáma az összes pontérték mediánja volt. Réka csapattársai közül Petra 37. helyezett, Vivien pedig 64. helyezett lett. Hány iskola vett részt a versenyen? (A) 22; (B) 23; (C) 24; (D) 25; (E) 26.

19. Egy egyfordulós körmérkőzéses asztalitenisz tornán minden játékos 10 mérkőzést nyert meg és 10-et veszített el. Döntetlen mérkőzés nem volt. Hány olyan $(A;B;C)$ trió volt a versenyzők között, amelyeknél A legyőzte B-t, B legyőzte C-t és C legyőzte A-t? (A) 385; (B) 665; (C) 945; (D) 1140; (E) 1330.

20. Legyen P és Q rendre az $ABCD$ négyzet DA és AB oldalának egy-egy belső pontja. A PB és QC szakaszok merőlegesek egymásra, és az R pontban metszik egymást. Mekkora a négyzet területe, ha $PR=7$ és $BR=6$? (A) 85; (B) 96; (C) 100; (D) 117; (E) 136.

21. A rendezett alakban megadott $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú függvényeknél a főegyütthatók rendre 2 és -2. Mindkét függvény grafikonja áthalad a $(16;54)$, $(20;53)$ pontokon. Mennyi az $f(0)+g(0)$ összeg számjegyeinek összege? (A) 8; (B) 10; (C) 12; (D) 14; (E) 16.

22. 10 ember áll kör alakban, egymástól egyenlő távolságra. Közülük mindenki 3 másikat ismer a többiek közül, a két szomszédját és a vele szemköztit. Hányféleképpen oszthatjuk el az embereket 5 párba úgy, hogy az egyes párok tagjai ismerjék egymást? (A) 8; (B) 11; (C) 12; (D) 13; (E) 18.

23. Az R, L, V pozitív valós számok teljesítik az

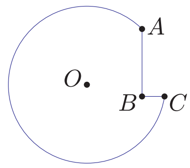
$$R+\frac{1}{L}=4,$$

$$L+\frac{1}{V}=1,$$

$$V+\frac{1}{R}=\frac{7}{3}$$

feltételeket. Mekkora az RLV szorzat értéke? (A) $\frac{2}{3}$; (B) 1; (C) $\frac{4}{3}$; (D) 2; (E) $\frac{7}{3}$.

24. Egy gépi forgácsoló szerszám kése egy $\sqrt{50}$ cm sugarú körala-kú lemezből készült oly módon, hogy annak egy darabját kivágták. Formáját az *ábra* mutatja. Mekkora a B pontnak O-tól való távolsága, ha $AB=6$ cm, $BC=2$ cm és $ABC\sphericalangle=90°$? (A) $3\sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{6}$; (C) 5; (D) $\sqrt{26}$; (E) 6.



25. Adottak a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben az $O(0;0)$ ponton áthaladó e és f egyenesek. Az e egyenes egyenlete $5x-y=0$. A $P(-1;4)$ pontot előbb az e, majd az f egyenesre tükrözve rendre a P_1 és $P_2(4;1)$ pontokhoz jutunk. Mi az f egyenes egyenlete? (A) $-x+5y=0$; (B) $2x-3y=0$; (C) $3x+2y=0$; (D) $x-3y=0$; (E) $5x-3y=0$.

26. Egy zsákban kezdetben 1 piros és 1 kék golyó található, a közelében levő dobozban pedig nagyszámú ugyanilyen piros és kék golyó van. Vivi négyszer hajtja végre a következő műveletsort:

– véletlenszerűen kihúz a zsákból egy golyót,
– majd kivesz egy ugyanilyen színű golyót a dobozból,
– végül mindkettőt visszarakja a zsákba.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a végén a zsák mindkét színű golyóból azonos számút tartalmaz? (A) $\frac{1}{6}$; (B) $\frac{1}{5}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{3}$; (E) $\frac{1}{2}$.

27. Egy körbe szabályos 5, 6, 7, 8 oldalú sokszöget írunk úgy, hogy bármely két sokszög csúcsai páronként különbözőek, és nincs olyan pont, amely illeszkedne legalább három sokszög oldalára. A körön belül hány közös pontja van az oldalaknak? (A) 52; (B) 56; (C) 60; (D) 64; (E) 68.

28. A 13 sorból és 17 oszlopból álló négyzethálós táblázat minden mezőjébe egy-egy számot írunk 1-től 221-ig. Először soronként felülről lefelé haladva balról jobbra írjuk be egyesével növekedve a számokat. A második kitöltés esetén oszloponként balról jobbra haladva felülről lefelé írjuk be egyesével növekedve a számokat. Mennyi azoknak a számoknak az összege, amelyek a kétféle kitöltés esetén ugyanabba a mezőbe kerülnek? (A) 222; (B) 333; (C) 444; (D) 555; (E) 666.

29. Egy kört 20 pont segítségével egyenlő hosszúságú ívekre osztunk fel, majd a pontokhoz az egyiktől elindulva az óramutató járásának megfelelően haladva az 1-től 20-ig terjedő számokat rendeljük. Ezután berajzoljuk a kör azon húrjait, amelyek olyan pontokat kötnek össze, amelyeknél a hozzájuk rendelt számok különbsége egy prímszámmal egyenlő. Mennyi a berajzolt szakaszok által meghatározott háromszögek száma? (A) 20; (B) 36; (C) 40; (D) 72; (E) 96.

30. Balázsnak, Beának és Daninak az év ugyanazon napján van a születésnapja. Dani ma 1 éves, Balázs pedig 1 évvel idősebb Beánál. Ma van az első olyan születésnapja Daninak, amikor Bea életkora többszöröse Daniénak, és 100 éves koráig összesen a mai napot is beszámítva 9 ilyen alkalom lesz. Mennyi lesz Balázs életkorában a számjegyek összege, amikor életkora legközelebb többszöröse lesz Daniénak? (A) 7; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) 11.

A feladatsort **Fonyóné Németh Ildikó** és **Fonyó Lajos** állították össze, és **Kiss Géza** lektorálta.

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. Koncz Levente (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.),
2. Magyar Zsolt (Budapest, Szent István Gimn.),
3. Fridrik Richárd (Szeged),
4. Baloghné Cseh Judit (Szolnok, Varga Katalin Gimn.),
5. Kallós Béla (Nyíregyháza, Szent Imre Katolikus Gimn., Ált. Isk., Koll. és Óvoda),
6. Molnár István (Békéscsaba, Andrássy Gyula Gimn. és Koll.),
Vértes Judit (Budapest VI. Kerületi Kölcsey Ferenc Gimn.),
8. Balga Attila (Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimn.),
9. Tulipán (jelige).

A 2022. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2022-ben a díj második fokozatában részesült **Burom Mária** (Egri Szilágyi Erzsébet Gimn. és Koll.), **Göncfalviné Cseh Éva** (Eger, Eszterházy Károly Egyetem Gyakorlóisk.), **Kiss Zoltán** (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), **Nagyné Lelkes Anikó** (Kecskeméti Kodály Zoltán Ének-zenei Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Alapfokú Művészeti Isk.), **Szántó Zsuzsanna** (Budapest, Zuglói Herman Ottó Tudásközpont Ált. Isk.), **Székeli Andrea** (Kecskemét, Petőfi Sándor Katolikus Ált. Isk. és Óvoda) és **Tóth Mariann** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

A részletes indoklás a honlapunkon (`www.komal.hu`) olvasható.

A 2022. évi Rényi-díjasok

Ádám Réka (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Árki Tamás** (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll.), **Balázs Ferenc** (Kiskunfélegyházi Szent Benedek PG Két Tanítási Nyelvű Techn. és Koll.), **Balázs Tivadar** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), **Balga Attila** (Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimn.), **Baráti Ákos** (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn. és Koll.), **Cs. Nagy András** (Váci SzC Boronkay György Műszaki Techn. és Gimn.), **Gaál Istvánné** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), **Gyenes Zoltán** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Holló Gábor** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Horváth Orsolya** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Kötél Tamás** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Lányi Veronika** (Pécsi Janus Pannonius Gimn.), **Lenger Dániel** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Szalahov Mária Zsuzsanna** (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn. és Koll.), **Számadóné Békéssy Szilvia** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Szlobodnikné Kiss Edit** (Váci SzC Boronkay György Műszaki Techn. és Gimn.), **Tassy Gergely** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Tóth Tibor** (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.), **Varga Attila** (Balassagyarmat, Balassi Bálint Gimn.).

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Adott az $f(x)=\frac{(x^2-4x)(2-x)}{x-2}$ függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, és a $g(x)=3|x-1|-3$ függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_g=\mathbb{R}$.

a) Oldjuk meg az $f(x)=g(x)$ egyenletet.

A K és L halmazokat értelmezzük a következőképpen: $K:=\{x\mid x\in D_f$ és $f(x)\geqslant 0\}$; $L:=\{x\mid x\in D_g$ és $g(x)\geqslant 0\}$.

b) Adjuk meg a $K\cap L$, $K\setminus L$ és $(K\cup L)\setminus K$ halmazokat. (*12 pont*)

2. Egy háromszög csúcsai: $A(-2;-2)$, $B(7;1)$, $C(5;5)$.

a) Mekkora a háromszög területe?

b) Számítsuk ki a háromszög súlypontja és magasságpontja távolságának pontos értékét. (*12 pont*)

3. *a*) Határozzuk meg az alábbi kijelentések logikai értékét, állításainkat indokoljuk.

A) Minden pozitív egész számra teljesül, hogy az összes pozitív osztójának átlaga kisebb a szám felénél.

B) Van olyan n csúcsú teljes gráf, amelynek háromszor annyi éle van, mint az n csúcsú fagráfnak.

b) Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha P és Q, akkor nem R."

c) Tegyük fel, hogy „Ha P és Q, akkor nem R." Igaz-e most a „Ha R, akkor nem P és nem Q." állítás? Válaszunkat indokoljuk. (*13 pont*)

4. A 32 lapos magyar kártya egyik legérdekesebb játéka az ulti. (A magyar kártyában a színek: makk, piros, tök, zöld; színenként ász, király, felső, alsó, 10-es, 9-es, 8-as és 7-es alkotja a 32 lapot.) Ha pl. Bélának a játék elején leosztott 10 lapjából egy ötlapos piros ultija van, ez azt jelenti, hogy nála van a piros hetes és még négy piros, továbbá öt másik, nem piros lap.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bélának ötlapos piros ultit osztottak a játék elején?

Képzeljük el, hogy 10 jól megkevert magyar kártyacsomag van előttünk és mindegyikről levesszük a legfelső lapot.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 lapból pontosan 5 piros?

c) Ha az előbbi húzáskor öt piros lapot húztunk, mennyi a valószínűsége, hogy közöttük legalább egy hetes van?

Minden végeredményt négy tizedesjegyre kerekítve adjunk meg. (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Vizsgáljuk meg monotonitás és korlátosság szempontjából az

$$a_n = \frac{n^2+3n+2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

sorozatot.

b) Határozzuk meg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ határértékét, ha $n \to +\infty$.

c) Mennyi az x, ha a b_n sorozatról a következőket tudjuk: $b_n = \frac{n^2}{2} + x \cdot n$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$), valamint $(b_{n+1} - b_n)^2 = b_n + b_{n+1}$? (*16 pont*)

6. *a*) Milyen számjeggyel kezdődik a 16^{2022} a tízes számrendszerben felírva és mi az utolsó két számjegye?

b) Igazoljuk, hogy $2^{2023} + 1$ osztható 43-mal. (*16 pont*)

7. Két középiskola sakkbajnokságot rendezett úgy, hogy a versenyzők először a saját iskolájukon belül lebonyolított háziversenyen vettek részt, melynek során mindenki mindenkivel egy partit játszott. Ezután került sor az iskolák egymás elleni küzdelmére, ahol minden versenyző a másik iskola mindegyik versenyzőjével egy mérkőzést vívott. Az egymás elleni mérkőzések száma éppen annyi volt, mint a két háziversenyen összesen.

a) Iskolánként hányan vettek részt a bajnokságban, ha az egyikben kétszer annyian indultak, mint a másikban?

Két rivális asztalitenisz csapat úgy dönti el, melyikük a jobb, hogy kiválasztják saját maguk közül a legjobbat, majd a két legjobb megküzd egymással a címért.

A csapaton belüli kiválasztás ún. egyenes kieséses rendszerben történik, amelyben minden forduló előtt párokba sorsolják a résztvevőket. A pár játszik egy mérkőzést, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Akinek a sorsoláskor nem marad pár, mérkőzés nélkül jut a következő fordulóba. A pingpongban nincs döntetlen, az utolsó mérkőzés győztese lesz a csapat legjobbja. Összesen 24 mérkőzést játszottak, mire kiderült, hogy melyik csapat lett a győztes.

b) Hány játékos nevezett a versenyre az egyik, illetve a másik csapatból, ha az egyikben öttel kevesebben voltak, mint a másikban? (*16 pont*)

8. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 30; a sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat három szomszédos eleme.

a) Mennyi a számtani sorozat első tagja és különbsége?

Egy mértani sorozat tagjaira fennáll, hogy $a_1+a_3+a_5=182$ és $a_2+a_4=-60$.

b) Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát. (*16 pont*)

9. Az $ABCD$ téglalap átlói $30°$-os szöget zárnak be egymással.

a) Mekkora az AB és BC oldal, ha $AC=12$ cm?

b) Milyen messze van a B csúcs az AC átlótól?

Egy $KLMN$ téglalap LN átlója a téglalapot két derékszögű háromszögre bontja. A KLN háromszög K-ból induló magassága, belső szögfelezője és súlyvonala legyen rendre m, f, s.

c) Mekkora szöget zár be egymással az LN átló és a KL oldal, ha $3f^2=2ms$? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2022/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $x\cdot(1-\lg 5)=2\cdot\lg(2^x-2)$, (*7 pont*)

b) $1+2\cdot\cos^2 x=\sin(2x)$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, ezért $2^x-2>0$, azaz

$$2^x>2,\quad\text{vagyis}\quad x>1. \tag{1}$$

A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$x\cdot(1-\lg 5)=x\cdot(\lg 10-\lg 5)=x\cdot\lg\left(\frac{10}{5}\right)=x\cdot\lg 2=\lg(2^x),$$

illetve:

$$2 \cdot \lg(2^x - 2) = \lg\left((2^x - 2)^2\right).$$

Vezessük be az $y = 2^x$ új ismeretlent, így az eredeti egyenletet ilyen alakra hoztuk:

$$\lg y = \lg\left((y-2)^2\right).$$

A logaritmusfüggvény monotonitása miatt:

$$y = (y-2)^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

A másodfokú egyenlet gyökei $y = 1$ és $y = 4$. Mivel (1) miatt $y = 2^x > 2$, ezért az első eset nem lehetséges, vagyis $y = 2^x = 4$, ahonnan $x = 2$. Minden lépésünk megfordítható és a kapott gyök eleme az értelmezési tartománynak.

b) I. megoldás. Használjuk ki, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, illetve $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$. Az egyenlet rendezése után a következő, úgynevezett homogén egyenletet kapjuk:

$$\sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Ha $\cos x = 0$, akkor az egyenlet alapján $\sin x = 0$, ekkor azonban $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, ami nem lehetséges, tehát ebben az esetben nem adódik megoldás. Ezek szerint $\cos x \neq 0$, így az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk $\cos^2 x$-szel:

$$\mathrm{tg}^2\, x - 2 \cdot \mathrm{tg}\, x + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát nincs valós gyöke, vagyis az eredeti egyenletnek sincs valós gyöke.

II. megoldás. Vizsgáljuk meg az egyenlet két oldalán álló kifejezések értékkészletét. Tudjuk, hogy $\cos^2 x \geqslant 0$, ezért $1 + 2 \cdot \cos^2 x \geqslant 1$. Mivel $\sin(2x) \leqslant 1$, ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezés értéke egyenlő 1-gyel.

Ha $1 + \cos^2 x = 1$, akkor $\cos x = 0$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol k egész szám.

Ekkor azonban $\sin(2x) = \sin(\pi + 2k\pi) = 0$, vagyis ha az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értéke egyenlő 1-gyel, akkor a jobb oldali kifejezés értéke nem egyenlő 1-gyel, tehát az egyenletnek nincs valós gyöke.

2. *Az e egyenes egyenlete $4x - 3y = 15$. Mennyi a sugara annak a körnek, amely érinti az e egyenest, továbbá az origóban érinti az y tengelyt?* (*12 pont*)

Megoldás. *I. megoldás.* Ha a kör az origóban érinti az y tengelyt, akkor középpontja az x tengelyre illeszkedik, koordinátái $O(u;0)$, és a kör sugara $r = |u|$, ezért a kör egyenlete:

$$(x-u)^2 + y^2 = u^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2ux = 0.$$

Ha az egyenes érinti a kört, akkor az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszernek egy megoldása van. Az egyenes egyenletéből y-t kifejezve, a kör egyenletébe helyettesítve:

$$x^2 + \left(\frac{4x}{3} - 5\right)^2 - 2ux = 0,$$

$$25x^2 - (18u + 120)x + 225 = 0.$$

Az egyenletnek akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0:

$$(18u + 120)^2 - 22\,500 = 0,$$

$$|18u + 120| = 150.$$

Ha $18u + 120 = 150$, akkor $u = \frac{5}{3}$, ha pedig $18u + 120 = -150$, akkor $u = -15$. Két kör felel meg a feladat feltételeinek: az egyiknek a középpontja $O_1\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ és sugara $r_1 = \frac{5}{3}$, a másiknak pedig a középpontja $O_2(-15; 0)$ és sugara $r_2 = 15$.

II. megoldás. Ha a kör az origóban érinti az y tengelyt, akkor középpontja az x tengelyre illeszkedik, koordinátái $O(u; 0)$. A függvénytáblázatban is megtalálható összefüggés alapján a $P_0(x_0; y_0)$ pont és az $Ax + By + C = 0$ egyenletű e egyenes távolsága így számítható ki:

$$d(P_0; e) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Az $O(u; 0)$ pont egyenlő távolságra van a $4x - 3y - 15 = 0$ egyenletű egyenestől és az y tengelytől:

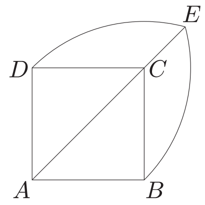
$$\left|\frac{4u - 15}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = |u|,$$

$$\frac{|4u - 15|}{5} = |u|.$$

Ha $4u - 15 = -5u$, akkor $u = \frac{5}{3}$, ha pedig $4u - 15 = 5u$, akkor $u = -15$. Két kör felel meg a feladat feltételeinek: az egyiknek a középpontja $O_1\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ és a sugara $r_1 = \frac{5}{3}$, a másiknak pedig a középpontja $O_2(-15; 0)$ és a sugara $r_2 = 15$.

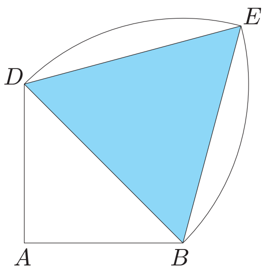
Megjegyzés. Egy, a második megoldástól nem lényegesen különböző harmadik megoldás gondolatmenete: a keresett körök középpontjai illeszkednek az e egyenes és az y tengely által meghatározott valamely szög szögfelezőjére. A szögfelezők egyenlete felírható többféle módszerrel, például a második megoldásban használt képlet segítségével. A két szögfelező egyenlete: $3x - y = 5$ és $x + 3y = -15$, a körök középpontját a szögfelezők és az x tengely metszéspontjai adják.

3. *A Fából Vaskarika Kft. logóján látható $ABCD$ négyzet oldalai* 4 cm *hosszúak, a BE körív középpontja a D pont, az ED körív középpontja pedig a B pont. A logó mind a négy részét pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre festik úgy, hogy ha két rész kerületének van közös szakasza, akkor azok különböző színűek lesznek.*



a) Hány négyzetcentiméter a lefestendő terület? (*6 pont*)

b) Hány különböző kifestés lehetséges? (*8 pont*)



Megoldás. *a*) A körívek sugara a négyzet BD átlója: $BE=DE=BD=4\sqrt{2}$. Ez azt is jelenti, hogy a BED háromszög szabályos, ezért belső szögei 60 fokosak. A BD átló az alakzatot két részre osztja, így az alakzat területe a részek területének összege. Az egyik rész az ABD derékszögű háromszög: $t_{ABD}=\frac{4\cdot 4}{2}=8\ \text{cm}^2$. Határozzuk meg a másik rész területét. Ha a B középpontú, BD sugarú, 60° középponti szögű körcikk területéhez hozzáadjuk a D középpontú, DB sugarú, 60° középponti szögű körcikk területét, akkor a BED háromszög területét kétszer számoltuk, így ezt a kapott összegből ki kell vonni:

$$t_{BED}=2\cdot\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{6}-\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}\approx 19{,}65\ \text{cm}^2.$$

A lefestendő terület tehát 27,65 cm^2.

b) A festésre minimum két színt fel kell használni. Bontsuk szét az eseteket annak megfelelően, hogy hány színt használunk.

Ha a színek száma kettő, akkor az ABC rész színe 4-féle lehet, ugyanilyen színnel viszont csak a CED rész színezhető. Az ACD rész színére 3 lehetőség maradt, a BEC rész színe pedig ezzel megegyező lesz. Ebben az esetben tehát a lehetőségek száma $4\cdot 3=12$.

Ha a színek száma három, akkor az egyik színt nem fogjuk használni, ezt 4-féleképpen választhatjuk ki, egy másik színt viszont két rész festésére is használunk, erről a színről 3-féleképpen dönthetünk. Azt, hogy melyik két rész lesz egyforma, az előző esetnél látottak miatt 2-féleképpen dönthetjük el, mint ahogy az üresen maradt részek festésére is 2 lehetőség van a megmaradt két szín felhasználásával. A lehetőségek száma tehát: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$.

Végül, ha mind a négy színt felhasználjuk, akkor a lehetőségek száma $4!=24$.

A lehetséges kifestések száma összesen $12+48+24=84$.

4. *Az iskolai focicsapat edzésén az edző megkérdezett minden jelenlévő diákot, hogy hány osztálytársuk tagja a csapatnak. Ketten* 1*-et, hatan* 2*-t, egyvalaki* 3*-at, öten* 4*-et és hárman* 5*-öt válaszoltak a kérdésre.*

a) Mennyi az elhangzott válaszok módusza, mediánja, átlaga és terjedelme? (*7 pont*) *b) Miután a matematika–testnevelés szakos edző nagyon elcsodálkozott a válaszokat hallva, a csapat tagjai elárulták neki, hogy néhány csapattag matematikaversenyre ment, ezért nem tudott eljönni a mai edzésre. Legalább hányan hiányoztak?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A módusz 2, mert ezt mondták a legtöbben.

A medián megállapításához rendezzük az elhangzott válaszokat növekvő sorrendbe:

$$1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 3;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4;\ 5;\ 5;\ 5.$$

A 17 szám közül a középső a 9-edik, ami 3, így ennyi a medián.

A számok átlaga:

$$\frac{2\cdot 1+6\cdot 2+1\cdot 3+5\cdot 4+3\cdot 5}{17}=\frac{2+12+3+20+15}{17}=\frac{52}{17}\approx 3{,}06.$$

A terjedelem a legnagyobb és a legkisebb elhangzott válasz különbsége: $5-1=4$.

b) Ha egy osztályból n gyerek tagja a csapatnak, akkor az osztály mindegyik tagjának $n-1$ osztálytársa tagja a csapatnak. Ha tehát mindenki ott lenne az edzésen, akkor n-nel osztható lenne azoknak a száma, akik azt mondják, hogy $n-1$ osztálytársuk tagja a csapatnak. Ekkor azonban még legalább 3 olyan gyerek van, aki 3-at mondana, és legalább 3 olyan gyerek, akinek 5 lenne a válasza, tehát legalább 6 gyerek hiányzik az edzésről. Ez az eset lehetséges, ha egy osztályból 2, két osztályból 3-3, egy osztályból 4, egy osztályból 5 és egy osztályból 6 gyerek lenne a csapat tagja.

II. rész

5. *A tavasszal három nagy sportversenyt rendeztek a nekeresdfalvi általános iskolában. Az asztalitenisz bajnokságban* 120 *gyerek indult. A fociligába* 8 *csapat nevezett, mindegyik csapatban* 9 *játékos lépett pályára. Az úszóversenyen* 81*-en teljesítették a távot.* 23 *gyerek mind a három sportágban versenyzett. Összesen* 45*-en voltak azok, akik egynél több számban is indultak.*

a) Hányan vettek részt legalább az egyik sportág versenyén? (*6 pont*)

A fociligában mindegyik csapat mindegyik másik csapattal egyszer játszott. Az első héten összesen 13 *mérkőzésre került sor.*

b) Bizonyítsuk be, hogy volt olyan csapat, amely az első héten legalább négyszer lépett pályára. (*4 pont*)

Az asztalitenisz bajnokságban négy olyan gyerek jutott be a legjobb nyolc közé, aki a Futrinka utcában lakik. A versenyzőkből sorsolással négy párt alkottak, akik megküzdhettek egymással a legjobb négy közé jutásért.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy nem volt olyan pár, ahol mindkét gyerek a Futrinka utcában lakik? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Ha összeadjuk a három sportágban indulók számát, akkor 45 tanulót legalább kétszer, 23 tanulót pedig pontosan háromszor számoltunk, így a legalább egy számban indulók száma $120+8\cdot 9+81-45+23=251$ fő.

b) Indirekt módszerrel végezzük el a bizonyítást. Tegyük fel, hogy nincs olyan csapat, amelyik az első héten legalább négyszer játszott. Ez azt jelenti, hogy mind a nyolc csapat legfeljebb háromszor lépett pályára. Mivel mindegyik mérkőzésen két csapat lép a pályára, így ebben az esetben a mérkőzések száma legfeljebb $\frac{8\cdot 3}{2}=12$ lett volna. Ellentmondáshoz jutottunk, mivel 13 mérkőzésre került sor. Indirekt feltevésünk tehát hamisnak bizonyult, vagyis van olyan csapat, amelyik legalább négyszer lépett pályára.

(*Megjegyzés.* Felhívjuk a figyelmet ennél a bizonyításnál egy tipikus és hibás gondolatmenetre. *A bajnokságokat úgy szokták szervezni, hogy egy fordulóban mindegyik csapat játszik egy meccset. Mivel nyolc csapat van, így mindegyik fordulóban négy meccset rendeznek. Három forduló esetén ez* 12 *meccset jelent. Vagyis a* 13. *meccs már a negyedik fordulóban kerül megrendezésre.* Mi a hiba a gondolatmenetben? Az, hogy nem tudjuk, hogy ezt a bajnokságot hogyan bonyolítják le, és azt kell belátnunk, hogy tetszőleges sorrendben rendezzük is meg a meccseket, az állítás akkor is igaz lesz, nem csak egy konkrét lebonyolítási forma esetén.)

c) *I. megoldás.* Képzeljük el, hogyan zajlik a negyeddöntők sorsolása. Az első pár kisorsolásakor a nyolc játékos közül húznak ki kettőt, és a párosítás akkor lesz csak a végén jó, ha a négy Futrinka utcai közül és a négy máshol lakó közül is egyet húznak, a pár kihúzásának sorrendje nem számít. Hasonlóan folytatva a második és a harmadik pár kihúzásakor, a keresett valószínűség:

$$p=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}\cdot\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}\cdot\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{8}{35}\approx 0{,}229.$$

II. megoldás. Képzeljük el, hogyan zajlik a negyeddöntők sorsolása. Az első név kihúzásánál még nem dőlt el semmi, nézzük a második húzást. Ha az első kihúzott játékos Futrinka utcai, akkor a lehetséges ellenfelek közül 3 Futrinka utcai, 4 pedig nem. Ha az első kihúzott játékos máshol lakó, akkor a lehetséges ellenfelek közül 3 máshol lakó, 4 pedig nem. Mivel mindegyik párba egy Futrinka utcai és egy máshol lakó versenyzőnek kell kerülnie, ezért a második név kihúzásakor $\frac{4}{7}$ annak a valószínűsége, hogy az első pár kisorsolása jól sikerült. Hasonlóan gondolkodva, a negyedik név kihúzásakor $\frac{3}{5}$, a hatodik név kihúzásakor pedig $\frac{2}{3}$ valószínűséggel sikerül a feladat feltételeinek megfelelően a sorsolás. Mivel ekkor már csak egy Futrinka utcai és egy máshol lakó marad a negyedik párba, így az egész sorsolás a feladat feltételeinek megfelelően sikerült. A keresett valószínűség:

$$p=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{35}\approx 0{,}229.$$

6. *a*) *Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapélei* 6 *cm, oldalélei* 5 *cm hosszúak. Milyen hosszú testátlói vannak a hasábnak, és melyik fajtából hány darab?* (*8 pont*)

b) *Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy egy szabályos n oldalú hasáb csúcsai közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, azok egy lapátló végpontjai lesznek. Határozzuk meg a következő határértéket:*

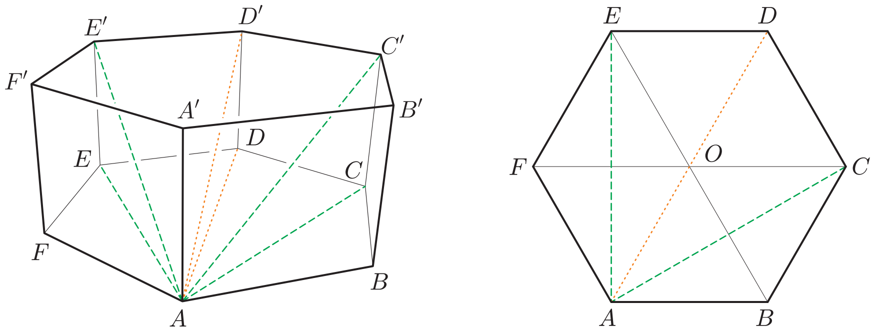
$$\lim_{n\to\infty} p_n. \qquad (8\ pont)$$

Megoldás. *a*) Legyenek a hasáb alapjai az $ABCDEF$ és az $A'B'C'D'E'F'$ hatszögek. Az $ABCDEF$ hatszög felbontható hat darab egybevágó szabályos háromszögre. Ezt felhasználva az AD átló hossza az alapél hosszának kétszerese, vagyis 12 cm. Az AC és AE átlók hossza egyenlő, hiszen egymás tükörképei az AD átlóra nézve. Az AC átló hossza kiszámolható koszinusztétellel, vagy kihasználva azt, hogy az $ABCO$ rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Azt kapjuk, hogy $AC = AE = 6\sqrt{3}$. Az oldalélek merőlegesek az alapokra, így azok minden egyenesére is, ezért az ACC', ADD', AEE' háromszögek derékszögűek. Mivel mindkét befogójuk hossza ismert, így Pitagorasz-tétellel az átfogók, vagyis a hasáb A csúcsból induló testátlóinak hossza kiszámolható:

$$AC' = AE' = \sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{108+25} = \sqrt{133} \approx 11{,}53 \text{ cm},$$

$$AD' = \sqrt{12^2+5^2} = 13 \text{ cm}.$$

Szimmetria-okokból az $ABCDEF$ alap mindegyik csúcsából két 11,53 cm hosszú és egy 13 cm hosszú testátló húzható, így a hasábnak összesen 12 darab 11,53 cm hosszú és 6 darab 13 cm hosszú testátlója van.



b) *I. megoldás.* Számoljuk össze az egy csúcsból húzható lapátlókat. Az n oldalú alapon $n-3$ darab, míg az adott pontra illeszkedő két oldallapon további 1-1 darab lapátló húzható, így az egy csúcsból húzható lapátlók száma $n-3+2 = n-1$. Mivel a hasábnak $2n$ csúcsa van, és mindegyik lapátlót kétszer számoljuk, így a lapátlók száma összesen $\frac{2n\cdot(n-1)}{2}$. Mivel két csúcsot összesen $\binom{2n}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, ezért a keresett valószínűség:

$$p_n = \frac{\frac{2n\cdot(n-1)}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n\cdot(n-1)}{\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

A keresett határérték pedig:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

II. megoldás. Bármelyik csúcsot is választjuk ki elsőként, minden esetben a második csúcs kiválasztása dönti el, hogy lapátlót határoz meg a két csúcs vagy sem. A második csúcs kiválasztására összesen $2n-1$ lehetőség van. Határozzuk meg, hogy ezek közül hány olyan van, amely az elsőként kiválasztott csúcsból húzott valamelyik lapátlónak a végpontja. Az n oldalú alapon $n-3$ darab, még az adott pontra illeszkedő két oldallapon további 1-1 darab lapátló húzható, így az elsőként kiválasztott csúcsból húzható lapátlók száma $n-3+2=n-1$. Ezen lapátlóknak az elsőként kiválasztott ponttól különböző végpontjai a megfelelő választások második pontként, ezért a keresett valószínűség:

$$p_n = \frac{n-1}{2n-1}.$$

A keresett határérték pedig:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

7. *Vizsgáljuk az $a_n = n^2+4n+9$ sorozatot.*

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat szigorúan monoton növő. (*3 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak egyik tagja sem négyzetszám. (*5 pont*)

c) Hányféleképpen lehet a sorozat első 100 *tagja közül kiválasztani két különbözőt úgy, hogy azok összege osztható legyen* 5*-tel?* (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* Mivel $a_n = n^2+4n+9 = (n+2)^2+5$, ezért a sorozat grafikonja a valós számokon értelmezett $f(x)=(x+2)^2+5$ függvény grafikonjára illeszkedő pontokból áll. Az f függvény grafikonja $T(-2;5)$ tengelypontú, normál állású parabola, ezért az f függvény szigorúan monoton növő, ha $x>-2$, így minden n pozitív egész szám esetén $n+1>n>-2$, ezért $a_{n+1} = f(n+1) > f(n) = a_n$, vagyis a sorozat szigorúan monoton növő.

II. megoldás. Mivel $a_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) + 9 = n^2+6n+14$, ezért

$$a_{n+1} - a_n = (n^2+6n+14) - (n^2+4n+9) = 2n+5 > 0$$

minden n pozitív egész számra, vagyis $a_{n+1} > a_n$, tehát a sorozat szigorúan monoton növő.

b) I. megoldás. Mivel $n>0$, ezért

$$(n+2)^2 = n^2+4n+4 < n^2+4n+9 < n^2+6n+9 = (n+3)^2.$$

A sorozat n-edik tagja az $n+2$ négyzeténél nagyobb, és az eggyel nagyobb szám, az $n+3$ négyzeténél kisebb, így nincs olyan egész szám, amelynek a négyzetével egyenlő lenne, tehát nem négyzetszám.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $a_n = k^2$, ahol k pozitív egész szám.

$$(n+2)^2 + 5 = k^2,$$

$$5 = k^2 - (n+2)^2,$$

$$5 = (k+n+2)\cdot(k-n-2).$$

Mivel az első tényező pozitív, és a szorzat is pozitív, ezért a második tényezőnek is pozitívnak kell lennie. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $k+n+2=5$ és $k-n-2=$ $=1$. A két egyenletből álló egyenletrendszernek egy megoldása van: $n=0$ és $k=3$. Mivel a sorozat definíciója szerint n pozitív egész szám, így ez a megoldás nem megfelelő, vagyis a sorozatnak egyik tagja sem négyzetszám. (*Megjegyzés:* sok helyen elfogadott, hogy a sorozatnak legyen nulladik tagja, ebben az esetben egyetlen olyan tagja van a sorozatnak, amely négyzetszám, hiszen $a_0=9$.)

c) Ha $n=5h+m$ alakú, akkor

$$a_n=(5h+m+2)^2+5=5\cdot\left(5h^2+2hm+4h+1\right)+(m+2)^2.$$

Tehát annyi az a_n ötös maradéka, mint amennyi az $(m+2)^2$ ötös maradéka. Ha tehát az n ötös maradéka $0,1,2,3,4$, akkor az a_n ötös maradéka rendre $4,4,1,0,1$. A sorozat első 100 tagjából így 20 darab ötös maradéka 0, 40 darab ötös maradéka 1 és 40 darab tag ötös maradéka 4. Kétféleképpen kaphatunk két kiválasztott tag összegeként 5-tel osztható számot: vagy két olyan számot adunk össze, melynek 0 az ötös maradéka, vagy két olyat, melyek közül az egyik 1, a másik 4 maradékot ad 5-tel osztva. Az összes eset száma tehát:

$$\binom{20}{2}+40\cdot 40=190+1600=1790.$$

8. *Egy kis teherszállító hajó* 100 *kilométeren* $0{,}1\cdot v^2$ *liter gázolajat fogyaszt, ha a sebessége* v km/h. *Egy liter gázolaj ára* 500 *forint, a legénység fizetése pedig óránként összesen* 27 000 *forint.*

a) *Milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a lehető legolcsóbban tudja teljesíteni az* 500 km *hosszú távot?* (*10 pont*)

b) *A hajó többek között* 15 *birkát szállít. Sajnos, az egyik birkát betegen vitték fel a fedélzetre. Tudjuk, hogy ez a beteg birka bármelyik egészséges birkát* 10% *valószínűséggel fertőzi meg. Az így megfertőzött birkák már nem fertőznek tovább. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb* 2 *további birka kapja el a fertőzést?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a hajó sebessége $v\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, akkor a menetidő $\frac{500}{v}$ h. Mivel az üzemanyagköltség $5\cdot 0{,}1\cdot v^2\cdot 500$ Ft, ezért a teljes költséget forintban a következő függvény adja meg ($v>0$):

$$k(v)=250\cdot v^2+\frac{13\,500\,000}{v}=250\cdot v^2+13\,500\,000\cdot v^{-1}.$$

A függvénynek akkor lehet minimuma, ha első deriváltja 0:

$$k'(v)=500\cdot v-13\,500\,000\cdot v^{-2}=0,$$

$$500\cdot v=\frac{13\,500\,000}{v^2},$$

$$v^3=27\,000,$$

$$v=30.$$

Mivel $k''(v) = 500 + 27\,000\,000 \cdot v^{-3} > 0$, ha $v > 0$, így a függvénynek $v = 30$ esetén tényleg minimuma van, tehát az ideális sebesség 30 km/h.

b) A 14 másik birka mindegyike 0,1 valószínűséggel fertőződik meg, és 0,9 valószínűséggel marad egészséges. A fertőzést elkapó birkák száma binomiális eloszlást alkot, és azt kell meghatároznunk, hogy a számuk milyen valószínűséggel lesz 0, 1 vagy 2:

$$0{,}9^{14} + \binom{14}{1} \cdot 0{,}9^{13} \cdot 0{,}1 + \binom{14}{2} \cdot 0{,}9^{12} \cdot 0{,}1^2 \approx 0{,}229 + 0{,}356 + 0{,}257 \approx 0{,}842.$$

Körülbelül 84,2 százalék a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 2 újabb birka fertőződik meg.

9. *A hagyományos, úgynevezett ötös lottón a szelvényen* 1*-től* 90*-ig szerepelnek a számok, és ezek közül kell kiválasztani azt az* 5 *számot, amit a sorsoláson kihúznak.*

a) *Hány olyan számötös van, amelyben a számok számtani sorozatot alkotnak?* (*6 pont*)

b) *Hány olyan számötös van, amelyben a számok mértani sorozatot alkotnak?* (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a legkisebb kihúzott szám a, a számtani sorozat differenciája pedig a d pozitív egész szám, ekkor a legnagyobb kihúzott szám $a + 4d \leqslant 90$, tehát $4d < 90$, így $d < 22{,}5$. Számoljuk össze a lehetséges eseteket úgy, hogy d értékét rögzítjük, és megszámoljuk minden esetben a lehetséges értékeit. Ha $d = 22$, akkor $a \leqslant 90 - 4d = 90 - 4 \cdot 22 = 2$, vagyis a értéke 2-féle lehet.

Ha $d = 21$, akkor $a \leqslant 90 - 4d = 90 - 4 \cdot 21 = 6$, vagyis a értéke 6-féle lehet.

Észrevehetjük, hogy ha d értékét 1-gyel csökkentjük, akkor a lehetséges értékeinek száma 4-gyel nő, vagyis az esetek száma egy 22 tagú számtani sorozatot alkot. Kérdésünk ezen tagok összege, ehhez határozzuk meg a 22-edik tagot: ha $d = 1$, akkor $a \leqslant 90 - 4d = 90 - 4 \cdot 1 = 86$, vagyis a értéke 86-féle lehet.

Most már elvégezhetjük az összegzést, a megfelelő számötösök száma:

$$S_{22} = \frac{2 + 86}{2} \cdot 22 = 44 \cdot 22 = 968.$$

b) Legyen a legkisebb kihúzott szám a, a mértani sorozat hányadosa pedig a q pozitív racionális szám, ekkor a legnagyobb kihúzott szám $a \cdot q^4 \leqslant 90$, tehát $q^4 \leqslant 90$, így $q \leqslant \sqrt[4]{90} \approx 3{,}08$. Vizsgáljuk először azt az egyszerűbb esetet, amikor q egész szám, ekkor értéke csak 2 vagy 3 lehet.

Ha $q = 2$, akkor $a \leqslant \frac{90}{16} = 5{,}625$, tehát a értéke csak $1, 2, 3, 4, 5$ lehet.

Ha $q = 3$, akkor $a \leqslant \frac{90}{81}$, ami csak akkor teljesül, ha $a = 1$.

Egész q esetén tehát összesen 6 esetet találtunk. Mi a helyzet, ha $q = \frac{b}{c}$, ahol b és c relatív prím pozitív egész számok és $b > c$? Ekkor a legnagyobb szám

$$a \cdot \frac{b^4}{c^4} = \frac{a \cdot b^4}{c^4} \leqslant 90.$$

Mivel ez a szám is egész, ezért c^4 osztója $a \cdot b^4$-nek. Mivel azonban $\left(c^4; b^4\right) = 1$, ezért az euklidészi lemma miatt c^4 osztója a-nak. Ebből az is következik, hogy $c^4 \leqslant a \leqslant 90$, így c értéke csak 2 vagy 3 lehet.

Ha $c = 2$, akkor a a $c^4 = 16$ többszöröse. Ha $a \geqslant 2 \cdot 16$, akkor $b > c = 2$ miatt

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{32 \cdot 3^4}{2^4} = \frac{32 \cdot 81}{16} = 162 > 90,$$

vagyis ellentmondáshoz jutottunk. Azt kaptuk, hogy $a = 16$ lehet csak.

Ha $b = 3$, akkor ebből kapunk is egy megfelelő számötöst: $16, 24, 36, 54, 81$.

Ha $b \geqslant 4$, akkor viszont

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{16 \cdot 4^4}{2^4} = 16 \cdot 16 = 256 > 90,$$

vagyis nincs több megfelelő számötös, ha $c = 2$.

Mi a helyzet, ha $c = 3$? Ekkor $a \geqslant 81$ és $b \geqslant 4$ miatt

$$\frac{a \cdot b^4}{c^4} \geqslant \frac{81 \cdot 4^4}{3^4} = 256 > 90,$$

vagyis ebben az esetben nem kapunk megfelelő számokat.

Találtunk tehát öt olyan számötöst, ahol $q = 2$, egy olyat, ahol $q = \frac{3}{2}$ és egy olyat, amelyben $q = 3$, így összesen 7 megfelelő számötös van.

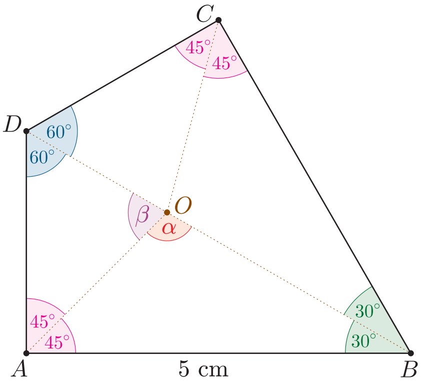
Erdős Gábor
Nagykanizsa

C gyakorlatok megoldása

C. 1680. *Egy négyszög egyik oldalának hossza* 5 cm, *a rajta fekvő két szög* $90°$ *és* $60°$. *Tudjuk továbbá, hogy a négyszög húr- és érintőnégyszög is. Hogyan lehet ezek alapján megszerkeszteni a négyszöget? Írjuk le és indokoljuk a szerkesztés lépéseit (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni).*

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

Megoldás. Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az $ABCD$ négyszögben $AB = 5$ cm és $DAB\sphericalangle = 90°$, illetve $ABC\sphericalangle = 60°$. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, ezért a szemben levő szögeinek összege páronként $180°$, így $BCD\sphericalangle = 90°$ és $CDA\sphericalangle = 120°$. A feltétel szerint $ABCD$ érintőnégyszög is, ezért van beírt köre, tehát belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a beírt kör O középpontja.



Tekintsük az *ábrát.*

Az AO szakasz felezi a $DAB\sphericalangle$-et, a BO szakasz pedig felezi az $ABC\sphericalangle$-et, ezért $OAB\sphericalangle = 45°$, illetve $ABO\sphericalangle = 30°$. Ebből azonnal következik, hogy az ABO háromszögben az ábra α szögére $\alpha = BOA\sphericalangle = 105°$. A DO szakasz felezi a $CDA\sphericalangle$-et, ezért $ODA\sphericalangle = 60°$, és így a DAO háromszögben $\beta = AOD\sphericalangle = 75°$.

Eszerint

$$\alpha + \beta = 105° + 75° = 180°,$$

ez pedig azt jelenti, hogy a B, O és D pontok egy egyenesen vannak, vagy másként: a BDA és BDC derékszögű háromszögek közös átfogója a BD szakasz, amelyre illeszkedik az $ABCD$ négyszög beírt körének O középpontja. A BDA és BDC derékszögű háromszögek megfelelő szögei megegyeznek, továbbá a derékszöggel szemben levő BD átfogó közös bennük, ezért ez a két háromszög egyrészt egybevágó, másrészt a BD egyenesére vonatkozóan egymás tükörképei.

Ennek alapján az ABD háromszög megszerkeszthető, hiszen AB adott és a rajta fekvő $90°$-os és $30°$-os szögek szerkeszthetők.

Az A pontnak a BD átló egyenesére való tükrözésével megkapjuk a négyszög hiányzó C csúcsát.

A szerkesztés a fentiek alapján mindig végrehajtható és csak egy megoldás van.

Bencsik Bendegúz (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 10. évf.)
és mások dolgozata alapján

Összesen 238 dolgozat érkezett. 5 pontos 71, 4 pontos 30, 3 pontos 39, 2 pontos 40, 1 pontos 43 dolgozat. 0 pontot 15 versenyző kapott.

C. 1686. *Az ABC derékszögű háromszög átfogója az AB szakasz. Az A csúcsból kiinduló f belső szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BD$ és $AC + CD$ szakaszok hosszának mértani közepe éppen az $f = AD$ szögfelező hossza.*

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon, legyen $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$. A belső szögfelező tétele szerint

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}.$$

Eszerint van olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy a BD és DC szakaszok hosszára

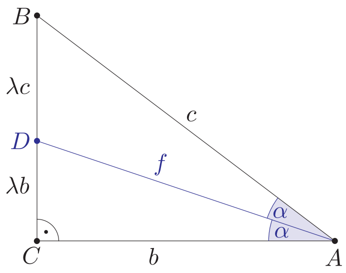
$$(1) \qquad BD = \lambda c, \quad DC = \lambda b$$

teljesül. Tekintsük az *1. ábrát.*

Az ABC derékszögű háromszögben felírhatjuk, hogy $\cos 2\alpha = \frac{b}{c}$, az ADC derékszögű háromszögben pedig $\cos\alpha = \frac{b}{f}$, illetve $\sin\alpha = \frac{\lambda b}{f}$.

Felhasználjuk a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ trigonometrikus azonosságot, ezzel

$$\frac{b}{c} = \frac{b^2}{f^2} - \frac{\lambda^2 b^2}{f^2} = \frac{b^2 - \lambda^2 b^2}{f^2}. \tag{2}$$



1. ábra

A (2) egyenlet jobb oldalát átalakítjuk:

$$\frac{b}{c} = \frac{(b-\lambda b)(b+\lambda b)}{f^2} = \frac{b(1-\lambda)(b+\lambda b)}{f^2},$$

ahonnan b-vel való osztás és rendezés után $f^2 = (c-\lambda c)(b+\lambda b)$ következik.

Nyilvánvaló, hogy az ABD háromszögben a D csúcsnál tompaszög van, ezért $c > \lambda c$, vagyis $c - \lambda c > 0$, másrészt $b + \lambda b > 0$, tehát

$$f = \sqrt{(c-\lambda c)(b+\lambda b)}. \tag{3}$$

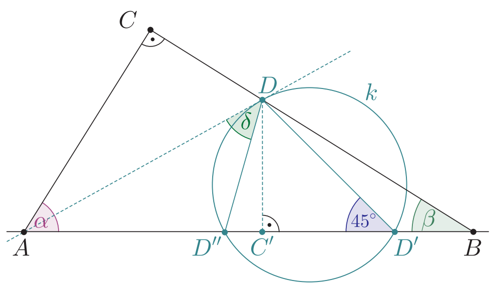
Mivel $c - \lambda c = AB - BD$, illetve $b + \lambda b = AC + CD$, ezért a (3) egyenlet éppen azt jelenti, amit bizonyítani akartunk:

$$f = \sqrt{(AB-BD)(AC+CD)},$$

tehát az $AB - BD$ és $AC + CD$ szakaszok hosszának mértani közepe valóban az f szögfelező hossza.

Sipeki Márton (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimnázium, 11. évf.)

II. megoldás. Bocsássunk merőlegest a D pontból az AB átfogóra, a merőleges talppontja legyen C'. Az AB egyenesére mérjük föl a C' pontból kiindulva a B irányába a $C'D' = CD$ szakaszt, a B pontból kiindulva az A pont felé a $BD'' = BD$ szakaszt.



2. ábra

Tekintsük a *2. ábrát.* Az AD szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szögszáraktól, ezért $CD = C'D$, és így $C'D' = C'D$, tehát $D'DC'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. A szögfelező egy másik tulajdonsága szerint a $CAB\sphericalangle$ szárain az AC és AC' szakaszok is egyenlő hosszúak.

A D' és D'' pontok konstrukciójából az előzőek szerint következik, hogy

$$AD' = AC' + C'D' = AC + CD; \quad AD'' = AB - BD'' = AB - BD. \tag{4}$$

A $DD''D'$ háromszög, és ezzel annak k körülírt köre mindig létrejön, ez csak akkor nem lenne lehetséges, ha a D'' és D' pontok azonosak lennének. Ez azonban azt jelentené, hogy $AD'' = AD'$, amiből (4) alapján az következne, hogy $AC + CD = AB - BD$, azaz $AB = AC + CD + BD = AC + BC$, de ez az ABC háromszögre felírt háromszög-egyenlőtlenség miatt lehetetlen.

Bizonyítani fogjuk, hogy a 2. ábrán jelölt $ADD''\sphericalangle$ szögre $\delta = 45°$.

Nyilvánvaló, hogy

$$ADC\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

a BDD'' háromszögben pedig $BD = BD''$, emiatt

$$BDD''\sphericalangle = BD''D\sphericalangle = \frac{180° - \beta}{2},$$

felírhatjuk tehát, hogy

$$90° - \frac{\alpha}{2} + \delta + \frac{180° - \beta}{2} = 180°. \tag{5}$$

A (5) egyenletben a műveletek elvégzésével és $\alpha + \beta = 90°$ felhasználásával valóban azt kapjuk, hogy $\delta = 45°$.

A k körben a DD'' húrhoz $45°$-os kerületi szög tartozik, a δ szög egyik szára a DD'' szakasz, így $\delta = 45°$ csak úgy lehetséges, hogy a δ szög AD szára a k kör érintője.

A körhöz húzott szelő- és érintőszakaszok tételéből következik, hogy $AD^2 = AD' \cdot AD''$, amelyből (4) szerint

$$AD^2 = (AC + CD) \cdot (AB - BD),$$

ebből pedig négyzetgyökvonás után a feladat állítása adódik.

Megjegyzés. A D' pont az AB egyenesen a B ponton túl is elhelyezkedhet, ez azonban a megoldást menetét nem befolyásolja, mert a (2) összefüggés ebben az esetben is felírható.

Jármai Roland (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., (10. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Tükrözzük a D pontot a B csúcsból induló BE belső szögfelezőre, a szögfelező tulajdonsága miatt a D' tükörkép az AB átfogó belső pontja. Jelöljük meg továbbá az AC egyenesen, a C ponton túl azt a D'' pontot, amelyre $CD'' = CD$.

Mivel a tükrözés miatt $BD = BD'$, ezért egyrészt $AD' = AB - BD$, másrészt $AD'' = AC + CD$.

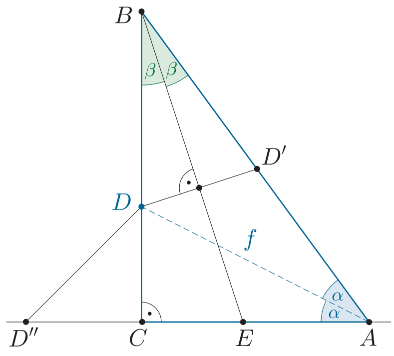
A *3. ábra* jelöléseivel $2\alpha+2\beta=90°$, így $\alpha+\beta=45°$. Egyszerűen belátható, hogy $BD'D\sphericalangle=90°-\beta$, és ezért

$$AD'D\sphericalangle=90°+\beta.$$

A $DD''C$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög, tehát $D''DC\sphericalangle=45°$, és mivel $ADC\sphericalangle=90°-\alpha$, ezért

$$ADD''\sphericalangle=90°-\alpha+45°,$$

ebből $\alpha+\beta=45°$ alapján $ADD''\sphericalangle=90°+\beta$ következik.



3. ábra

Az $AD'D$ és ADD'' háromszögek két-két szögének nagysága α és $90°+\beta$, így a háromszögek harmadik szöge is nyilván megegyezik, ez pedig azt jelenti, hogy a két háromszög hasonló. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért

$$\frac{AD'}{AD}=\frac{AD}{AD''},\quad \text{azaz}\quad AD^2=AD'\cdot AD''.$$

Mivel $AD=f$, $AD'=AB-BD$, illetve $AD''=AC+CD$, előző eredményünkből $f^2=(AB-BD)\cdot(AC+CD)$ következik, ez éppen a feladat állítása, hiszen ebből a nyilvánvalóan pozitív $AB-BD$ és $AC+CD$ számok mértani közepe:

$$f=\sqrt{(AB-BD)\cdot(AC+CD)}.$$

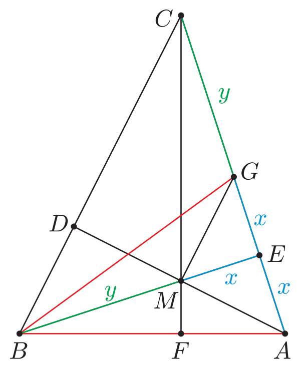
(A KöMaL-honlapon is megtalálható a II. megoldás)

Összesen 116 dolgozat érkezett. 5 pontos 67, 4 pontos 13, 3 pontos 7, 2 pontos 9 dolgozat. 1 pontot 7, 0 pontot 12 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5193. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $BCA\sphericalangle=45°$, a magasságok talppontjai a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, a háromszög magasságpontja M. Tudjuk, hogy az F pont az AB szakaszt $AF:FB=2:3$ arányban osztja. Az AC oldalon megjelöljük azt a G pontot, amelyre $CG=BM$. Mutassuk meg, hogy az ABG háromszög súlypontja M.*

(*4 pont*)



Megoldás. Először azt fogjuk bizonyítani, hogy az ABG háromszögnek BM súlyvonala, majd pedig azt, hogy az M pont harmadolja a BM szakaszt.

Az ADC egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $DAC\sphericalangle = 45°$. Az AME háromszögben E-nél derékszög, E-nél 45°-os szög van, tehát az AME háromszög szintén egyenlő szárú és derékszögű, $AE = ME = x$. Az eredeti ABC háromszögben C-nél 45°-os szög van, így az is azonnal adódik, hogy a BEC háromszög is egyenlő szárú és derékszögű. A feladatban szereplő feltétel alapján $CG = BM = y$. Mivel $y + x = BE = CE = y + EG$, ezért $EG = x$.

Az eddigiek alapján az ABG háromszögben az E pont az AG oldal felezőpontja, ezért BE a súlyvonala, tehát az M pont rajta van a súlyvonalon. Azt kell még belátni, hogy $BM : ME = y : x = 2 : 1$.

Tudjuk, hogy $AF : FB = 2 : 3$. Legyen a számolásainkhoz $AF = 2z$ és $FB = 3z$.

A BFM derékszögű háromszög hasonló a BEA derékszögű háromszöghöz, mert további egy szögük, a B-nél fekvő szög egybeesik. A megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$(1) \qquad \frac{y}{5z} = \frac{3z}{x+y} \quad \Longleftrightarrow \quad 15z^2 = y(x+y).$$

Az ACF háromszög is hasonló az ABE háromszöghöz, mert szögeik megegyeznek. Az oldalak aránya itt

$$(2) \qquad \frac{2z}{x} = \frac{2x+y}{5z} \quad \Longleftrightarrow \quad 10z^2 = x(2x+y).$$

Az (1) és (2) egyenletekben szereplő számok mindegyike pozitív, a megfelelő oldalak osztásával:

$$\frac{3}{2} = \frac{y(x+y)}{x(2x+y)},$$

$$6x^2 + 3xy = 2y^2 + 2xy,$$

$$6x^2 + xy - 2y^2 = 0.$$

Szorzattá alakítva: $(2x-y)(3x+2y) = 0$. Az x és y szakaszok hosszai, így a második tényező biztosan pozitív, tehát $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$. Ezzel beláttuk, hogy az M pont $2 : 1$ arányban osztja ketté a BE súlyvonalat, vagyis az M pont az ABG háromszög súlypontja.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., Szeged, 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 97 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 58 versenyző, 3 pontos 16, 2 pontos 13 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 8, 0 pontot 2 tanuló.

B. 5218. *Legfeljebb hány választható ki az első* 2022 *pozitív egész szám közül úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prímszám?*

(*5 pont*)

Megoldás. *Segédállítás:* Nyolc egymást követő egész szám közül legfeljebb kettő választható ki úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prím.

Bizonyítás: Bármely két kiválasztott szám különbsége 1, 4 vagy 6 (mivel 8 egymást követő számról van szó és a különbség nem lehet 2, 3, 5 vagy 7). Tegyük fel, hogy ki tudunk választani hármat úgy, hogy bármelyik kettő különbsége 1, 4 vagy 6. Legyenek ezek a számok $a<b<c$ és legyenek $x=b-a$, $y=c-b$. Ilyenkor x, y, és $x+y$ is az 1, 4, 6 számok valamelyike. Ez nem lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem tudunk kiválasztani három számot.

Az első 2022 pozitív egész számot feloszthatjuk 252 ilyen 8-as csoportra (1–8, 9–16, …, 2009–2016) és egy 6-os csoportra (2017–2022). Egyik csoportból sem választhatunk ki 2-nél több számot. Így összesen nem választhatunk ki $2\cdot 253=$ $=506$-nál több számot.

Példa 506-ra: 4-gyel osztva 1 maradékot adó számok (bármely 2 különbsége osztható 4-gyel, így nem lehet prím).

Így legfeljebb 506 számot választhatunk ki.

Kovács Alex (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. Egy tipikus hiba az volt, hogy a megoldó a helyes konstrukcióból indult ki ($4k+1$ alakú számok halmaza), és azt mondta, hogy több elemet már nem lehet kiválasztani ebből a halmazból. Ez hibás érvelés, mert pl. ha mohó algoritmussal elkezdjük kiválasztani a legkisebb számot, amit még bevehetünk, akkor az $\{1,2,10,11,\ldots\}$ halmazt kapjuk. Így viszont lényegesen kevesebb elemet választunk ki, mint 506, azonban további elemet már nem tudunk a listánkhoz adni.

2. Szintén hasonló hiba, hogy feltették, hogy periodikusan kell kiválasztani a számokat.

3. Egy másik tipikus hiba, hogy lényegeben csak annyit mondtak, hogy ha van két szomszédos szám, akkor utána van legalább hét nem kiválasztható szám. Ez az érvelés azonban nem zárja ki azt az esetet, hogy a választott számok halmaza az $\{1,5,\ldots,2021,$ $2022\}$.

88 dolgozat érkezett. 5 pontos 45, 4 pontos 11, 3 pontos 8, 2 pontos 10, 1 pontos 12, 0 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (734–738.)

K. 734. Sanyi és barátai a focimeccsen az egyik héten 6 zacskó szotyit és 4 zacskó tökmagot vettek, ezért összesen 1900 Ft-ot fizettek. A következő héten 4 zacskó szotyit és 2 zacskó tökmagot vettek, és összesen 1100 Ft-ot fizettek. Egy zacskó szotyi és egy zacskó tökmag ára mindeközben nem változott. Hány forintba került egy zacskó szotyi, illetve egy zacskó tökmag?

K. 735. A logikai készletet Dienes Zoltán fejlesztette ki. Peti kiveszi a készletből a piros és a zöld köröket és négyzeteket, összesen 16 darab síkidomot. Ezen alakzatok mindegyike különbözik valamiben a többitől. Az alakzatok négy szempont alapján is két egyforma darabszámú csoportra oszthatók:

– kicsi vagy nagy,
– piros vagy zöld,
– körlap vagy négyzet,
– lyukas vagy sima.

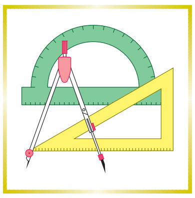
El tudja-e Peti helyezni a 16 síkidomot egy kör mentén úgy, hogy a szomszédos alakzatok pontosan egy tulajdonságban egyezzenek meg?

K. 736. Egy cégnél 120 alkalmazott dolgozik: vízvezeték-szerelők, burkolók, kőművesek és festők. A vízvezeték-szerelők és a kőművesek mindannyian rendelkeznek jogosítvánnyal, a többiek pedig nem. A kőművesek és a festők a Pipacs utcában dolgoznak, a többiek a Kankalin utcában. A jogosítvánnyal nem rendelkező alkalmazottak száma 64, a Kankalin utcában dolgozóké 84. A vízvezeték-szerelők száma a festők számának kétszerese. Melyik foglalkozású alkalmazottból hány dolgozik a cégnél?

K/C. 737. Ha van két ismert hosszúságú zsinórunk, akkor lemérhetjük és kijelölhetjük a két zsinór hosszának összegét, különbségét, illetve egy zsinór hosszát félbehajtással felezhetjük. Van egy 2240 centiméteres és egy 1760 centiméteres vékony zsinórunk, ezek segítségével szeretnénk kijelölni egy 10 centiméteres távolságot csupán *egyetlen méréssel.* (Az eljárás során tehát félbehajtással felezést akárhányszor végrehajthatunk, de összeg vagy különbség lemérését csak egyetlen alkalommal tehetjük meg.) Adjunk meg egy megfelelő eljárást.

K/C. 738. A falinaptáron a hónap napjait hét oszlopba rendezve tüntetik fel. Balról jobbra és utána fentről lefelé haladva az egyes oszlopok a hét napjainak megfelelő napok sorszámát tartalmazzák egymás után. Egy ilyen falinaptárban egy $n \times n$-es négyzetes elrendezésben található napsorszámok összege 198. Mekkora lehet az érintett napsorszámok között a legkisebb?

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (737–738., 1733–1737.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 737. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 738. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1733. Legfeljebb hány különböző pozitív prímosztója lehet egy olyan háromjegyű számnak, amelynek a három számjegye valamilyen sorrendben három, egymás utáni pozitív egész szám?

Berkó Erzsébet (Szolnok) javaslata alapján

C. 1734. Az AB átmérőjű k kör középpontja O. Megrajzoljuk az OB átmérőjű k_1 kört, illetve a k_1 kört C pontban érintő, AB-vel párhuzamos egyenest, amely a k kört a D_1 és D_2 pontokban metszi. Határozzuk meg a $COD_1\sphericalangle$ és $COD_2\sphericalangle$ szögek nagyságának pontos értékét.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1735. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{16}$$

egyenletrendszert.

(*The Mathematical Association of America*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1736. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán felvesszük a P belső pontot, a CD-vel párhuzamos AB oldalon a Q belső pontot. A PA és QD szakaszok metszéspontja M, a PB és QC szakaszok metszéspontja N.

Határozzuk meg annak a feltételét, hogy $MN \parallel AB$.

(*Amerikai versenyfeladat ötletéből*)

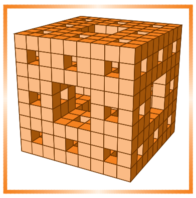
C. 1737. Aladár a 32. születésnapjára kapott két kockát. Az egyik kocka lapjait 1-től 6-ig megszámozta, a másikra rendre a $0; 1; 2; 7; 8; 9$ számokat írta. Ezekkel a kockákkal 10-től kezdve éppen az életkoráig, azaz 32-ig bármelyik pozitív egész számot kirakhatja, de a 33-at már nem. Köbüki kockák helyett szabályos oktaédereket használt. Az oktaéderek lapjaira egy-egy számjegyet írt, így 10-től kezdve a saját – években mért – életkoráig az összes egész számot kirakta. Hány éves most Köbüki, ha ez egy év múlva már nem sikerülne?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

❄

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5262–5269.)

B. 5262. Lenke leírt egy lapra egy természetes számot, amely nem tartalmaz 0-t, de tartalmaz legalább két különböző számjegyet. Ezután a szám alá leírta az összes olyan számot, amely az eredeti szám jegyei sorrendjének megváltoztatásával létrehozható. Legfeljebb mekkora lehet a lapon szereplő számok legnagyobb közös osztója?

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5263. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege nem kisebb a félkerület négyzeténél.

(*3 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5264. Ketten a következő játékot játsszák. Először Kezdő előírja egy 0–1 sorozat tetszőleges számú (akár végtelen sok) elemét úgy, hogy végtelen sok elem még ne legyen előírva. Ezután Második előírja a sorozat legkisebb indexű még nem előírt elemének értékét. Majd ezeket a lépéseket ismételgetik felváltva a végtelenségig. Kezdő nyer, ha a kapott sorozat valahonnan kezdve periodikus, Második nyer, ha nem az. Van-e valakinek nyerő stratégiája (és ha igen, kinek)?

(*4 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5265. Nagyítsuk kétszeresére egy derékszögű háromszög beírt körét a derékszögű csúcsból. Mutassuk meg, hogy a kapott kör érinti a háromszög körülírt körét.

(*4 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

B. 5266. Néhány focista együtt nyaral. Összesen k klubból és n nemzetből valók, ahol $k<n$. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább $n-k+1$ olyan focista, aki több klubtársával nyaral együtt, mint honfitársával.

(*5 pont*)

B. 5267. Adott egy p és egy q hosszúságú szakasz, valamint egy ABC háromszög, amelynek oldalegyenesei a, b és c a szokásos betűzés szerint. Szerkesszük meg az ABC körülírt körén azt a P pontot, amire P_a a P_bP_c szakaszt $p:q$ arányban osztja, ahol P_x a P pont merőleges vetülete az x oldalegyenesre.

(*5 pont*)

B. 5268. Az ABC háromszög beírt körének középpontját jelölje I. Az ABC háromszög belsejében, az ABI körön vegyünk fel egy P pontot. Az AP egyenes AI-re vett tükörképe az ABI kört az A-n kívül még a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CP = CQ$.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5269. Legyen $p \geqslant 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \ldots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leqslant i \leqslant p$ esetén x_i a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \ldots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \ldots + x_p$.

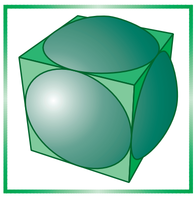
(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (833–835.)



A. 833. A koordináta-rendszer néhány rácspontját kiszínezzük pirosra, a többit fehérre. Egy ilyen színezést *végesen univerzálisnak* nevezünk, ha tetszőleges véges, nemüres $A \subset \mathbb{Z}$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy az (x, k) pont pontosan akkor van pirosra színezve, ha $x \in A$.

a) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezünk pirosra, és minden sort különbözőképpen színezünk meg, továbbá a pirosra színezett rácspontok halmaza összefüggő?

b) Létezik-e olyan végesen univerzális színezés, hogy minden sorban véges sok rácspontot színezünk pirosra, továbbá a pirosra és a fehérre színezett rácspontok halmaza is összefüggő?

A rácspontok egy H részhalmazát akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármely $x, y \in H$-ra létezik egy olyan rácsvonalakon haladó út, amely csak H-beli pontokon megy át, és x-et összeköti y-nal.

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

A. 834. Legyen $A_1A_2 \ldots A_8$ konvex húrnyolcszög, és $i = 1, 2 \ldots, 8$ esetén $B_i = A_iA_{i+3} \cap A_{i+1}A_{i+4}$ (az indexek modulo 8 értendők). Igazoljuk, hogy a $B_1, \ldots, B_8$ pontok egy kúpszeleten vannak.

A. 835. Jelölje $f^{(n)}(x)$ az f függvény n-szeres iteráltját (azaz $f^{(1)}(x) = f(x)$, $f^{(n+1)}(x) = f\big(f^{(n)}(x)\big)$).

Legyen $p(n)$ egy adott egész együtthatós polinom, amely pozitív egész n-ekre pozitív egész értéket vesz föl. Lehet-e az $f^{(n)}(n) = p(n)$ függvényegyenletnek pontosan egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény a megoldása?

Javasolta: *Matolcsi Dávid* és *Szabó Kristóf* (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 571. Sokan szívesen játszanak a pozitív egész számokkal és azok számjegyeivel. Egy játékban a pozitív egészeket egyszerűsítjük több lépésben a következők szerint:

1. Az egyjegyű számokat nem egyszerűsítjük tovább.
2. A nem egyjegyű, de páros számú számjegyből álló számok esetén megvizsgáljuk, hogy a szám utolsó számjegye osztója-e a szám utolsó számjegyének elhagyásával keletkező számnak. Ha osztója, akkor a számot egyszerűsítjük arra számra, amelyet az utolsó számjegy elhagyásával kapunk.
3. A nem egyjegyű, de páratlan számú számjegyből álló számok esetén megvizsgáljuk, hogy a szám első számjegye osztója-e a szám első számjegyének elhagyásával keletkező számnak. Ha osztója, akkor a számot egyszerűsítjük arra számra, amelyet az első számjegy elhagyásával kapunk.

Például az 1208 esetén a 120 osztója a 8, így a számot először a 120-ra egyszerűsítjük, majd a 20-nak osztója az 1, így a következő lépésben 20-ra egyszerűsítjük, végül a 2-nek nem osztója a 0, vagyis tovább nem egyszerűsíthető, így az 1208 egyszerűsítés után 20 lesz.

Készítsünk programot, amely megadja az $[a;b]$ intervallumba eső ($10 \leqslant a < b \leqslant$ $\leqslant 10\,000\,000$) egyjegyű számra egyszerűsíthető pozitív egészek számát. A program a standard bemenet első sorából olvassa be a és b értékét, majd a standard kimenet első sorában adja meg a keresett egészek számát.

Példák:

Bemenet	**Kimenet**
`20 80`	`15`
`10000 20000`	`415`
`1000000 3000000`	`7831`

Beküldendő egy tömörített `i571.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 572. Sok sportág lebonyolítási formája részben, vagy teljesen körmérkőzéses rendszerben történik. Az ilyen versenyek során minden résztvevő az összes többi résztvevővel egyszer megmérkőzik.

Készítsük el $n=8$ résztvevőre a körmérkőzés párosításait táblázatkezelő alkalmazás segítségével a *minta* alapján. A mintán látható sárga mezőkbe szabad a csapatneveket begépelni, a többi cella értékét függvényekkel állítsuk elő. A megoldás annál több pontot ér, minél több a függvények között a másolható.

	A	B	C	D
1		Csapatok		Mérkőzések
2	1	Vörös Rókák		Vörös Rókák - Computerbontók
3	2	Computerbontók		Polimer Buksi - Agresszív Mohák
4	3	Polimer Buksi		Nyerőmű - Real Margit
5	4	Agresszív Mohák		Egri Csillagok - Árvák
6	5	Nyerőmű		Vörös Rókák - Árvák
7	6	Real Margit		Computerbontók - Polimer Buksi
8	7	Egri Csillagok		Agresszív Mohák - Nyerőmű
9	8	Árvák		Polimer Buksi - Agresszív Mohák
10				Vörös Rókák - Egri Csillagok

A táblázat szerkezetét, a cellák formázását állítsuk be a minta szerint. Ügyeljünk a megfelelő cellák szélességére, szegélyezésére és a tartalom igazítására. Segédszámításokat végezhetünk az `E` oszloptól jobbra, amelyek értelmezését feliratokkal segítsük elő vagy a dokumentációban írjuk le. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i572.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

I. 573 (É). Az `atomok.txt` egyszerű szöveges állomány az egyes atomok izotópjainak táblázatát tartalmazza. A táblázat minden sorában egy atom egy izotópjának adatai szerepelnek az alábbi *minta* szerint:

```
...
5 B 10 10,012 936 95(41) 0,199(7)
5 B 11 11,009 305 36(45) 0,801(7)
6 C 12 12,000 000 00(00) 0,9893(8)
6 C 13 13,003 354 835 07(23) 0,0107(8)
6 C 14 14,003 241 9884(40)
7 N 14 14,003 074 004 43(20) 0,996 36(20)
7 N 15 15,000 108 898 88(64) 0,003 64(20)
...
```

Az első szám az elem rendszáma (`Z`), a második a vegyjele (jelöljük `V`-vel), a harmadik az elem izotópjának tömegszáma (`A`), a negyedik szám az izotóp relatív atomtömege (`m`), az ötödik szám – amennyiben van – az izotóp előfordulásának aránya (jelöljük `ea`-val) egy adott elem esetén. A zárójelben lévő mennyiségek az értékek utolsó egy-két számjegyének hibáját jelentik, de a feladatban ezekkel nem kell számolni.

Készítsünk számítógépes programot, amely beolvassa a táblázatot tartalmazó szöveges állományt, majd megoldja az alábbi feladatokat. A képernyőre írást igénylő részfeladatok esetén – a mintához tartalmában hasonlóan – írjuk ki a képernyőre a feladat sorszámát (például: `2. feladat:`), és utaljunk a kiírt tartalomra is. Ha a felhasználótól kérünk be adatot, akkor jelenítsük meg a képernyőn, hogy milyen értéket várunk. Mindkét esetben az ékezetmentes kiírás is elfogadott.

1. Olvassuk be az `atomok.txt` szöveges állományból az izotópok adatait. A zárójelben lévő mennyiségeket a számítás során nem fogjuk használni, így azokat nem kell eltárolni. Az egy sorban lévő értékek között szóköz az elválasztójel. Ügyeljünk arra, hogy a számok egész- és törtrésze között tizedesvessző szerepel, illetve a legtöbb esetben ezres tagolással vannak megadva az értékek, tehát itt is szóköz található. Amennyiben egy izotópnál az előfordulás aránya nincs megadva, úgy ott az `ea` értéket tekintsük nullának.

   Helyes beolvasás esetén a fenti mintában szereplő izotópok számadatai feldolgozás után így néznek ki:

```
...
5 B 10 10.01293695 0.199
5 B 11 11.00930536 0.801
6 C 12 12.0 0.9893
6 C 13 13.003354835069999 0.0107
6 C 14 14.003241988400001 0.0
7 N 14 14.00307400443 0.99636
7 N 15 15.00010889888 0.00364
...
```

2. Kérjük be a felhasználótól egy elem vegyjelét, és írjuk ki az elem összes izotópjának adatait a következő formában:

```
2. feladat:
Kérem egy elem vegyjelét: C
Z=6 A=12 m=12.0 ea=0.9893
Z=6 A=13 m=13.003354835069999 ea=0.0107
Z=6 A=14 m=14.003241988400001 ea=0.0
```

3. Adjuk meg, hogy melyik elemeknek szerepel a táblázatban a legtöbb izotópjuk, és mennyi ez az érték.

```
3. feladat:
A legnagyobb izotópszám: 10
Az elemek: Sn
```

4. Készítsünk függvényt `tomeg` néven, amely megadja egy elem relatív atomtömegét figyelembe véve az izotópjainak relatív atomtömegét és előfordulások arányát.

A függvény bemenete az elem vegyjele, visszaadott értéke egy valós szám legyen. Például a szén (C) esetén az elem relatív atomtömege a három izotóp adatai alapján (lásd a *mintát*):

$$\frac{12{,}0\cdot 0{,}9893+13{,}003\,354\,835\,069\,999\cdot 0{,}0107+14{,}003\,241\,988\,400\,001\cdot 0{,}0}{3}=$$
$$=12{,}010\,735\,896\,735\,248.$$

5. Készítsünk `tomegek.txt` néven egyszerű szöveges állományt, amely azon elemek relatív atomtömegét tartalmazza, amelyeknél legalább egy izotóp aránya 0-tól különböző érték. Egy sorban egy elem vegyjele és relatív atomtömege szerepeljen. Az állományban minden megfelelő elem csak egyszer forduljon elő.

   Minta a `tomegek.txt` állományról:

```
H 1.0077091323512934
He 4.002601932120928
Li 6.94003660291572
Be 9.012183065
B 10.811028046410001
C 12.010735896735248
N 14.006703211445798
```

Beküldendő egy tömörített `i573.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 65. Adott egy N csúcsból és M élből álló irányítatlan gráf. A csúcsokat 1-től N-ig indexeljük. A gráfot az alábbi módon több lépésben bővítjük élek hozzáadásával: egy lépésben keresünk egy olyan x és y csúcspárt, amely nincs összekötve, de létezik olyan z csúcs, ami össze van kötve x-szel és y-nal is ($1\leqslant x,y,z\leqslant N$). Ha találtunk ilyen x,y csúcspárt, akkor összekötjük őket egy éllel, ha nem, akkor befejeződött a gráf bővítése.

Adjuk meg, hogy a gráfbővítés befejeztével hány él van a gráfban. Mivel ez a szám nagyon nagy is lehet, ezért a szám (10^9+7)-tel vett osztási maradékát kell megadni.

A standard bemenet első sorában az N és M számok szerepelnek szóközzel elválasztva. A további M sor mindegyike 2 számot tartalmaz szóközzel elválasztva: egy adott él két végpontjának indexét.

A standard kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: a gráfbővítés befejeztével a gráfban levő élek száma modulo 10^9+7.

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`8 5 / 1 2 / 2 4 / 3 2 / 6 7 / 7 8`	`9`

Korlátok: $2\leqslant N,M\leqslant 10^5$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program az $N,M\leqslant 500$ tesztesetekre helyes kimenetet ad.

S. 164. A fordítóprogramok nagyon alacsony szinten átrendezhetik a forrásprogramban kiszámítandó kifejezésben az elvégzendő műveletek sorrendjét azért, hogy időt vagy memóriát spóroljanak. Ez sokat javíthat egy programon, de nem változtathatja meg annak jelentését. Ebben a feladatban egy egyszerű számítás memóriaigényét próbáljuk csökkenteni.

Adott egy csak változókat, valamint összeadás és szorzás műveleteket tartalmazó kifejezés. Az egyszerűség kedvéért fordított lengyel jelölést használunk. Például az $(a+b)*c$ kifejezés lengyel formában $ab+c*$ lesz. Ennek előnye, hogy a számítógép ezt balról jobbra haladva egyszerűen végre tudja hajtani. Kezdetben az összes változó értéke bent van a memóriában, mindegyik egy egységnyi tárhelyet foglal el. Egy matematikai művelet végrehajtása után az eredmény egy új (egységnyi) memóriaterületre kerül. Az előző példában $x=a+b$, $y=x*c$. A program így 5 egységnyi memóriát használ, kezdetben a, b és c értékének, majd x és y tárolására.

A kifejezés kiértékelése javítható, ha a később már nem használt (egységnyi) memóriaterületeket minden lehetséges alkalommal felülírjuk. A példa egy lehetséges végrehajtása ezzel a javítással: $a=a+b$, $b=a*c$. A program így 3 egységnyi memóriát használ a kezdeti változók miatt. (Nem számít, hogy az eredmény végül melyik változóba kerül.)

Készítsünk programot, amely egy lengyelformában adott kifejezés esetén megadja, hogy hány egységnyi tárhely szükséges a kifejezés kiértékeléséhez az eredeti és az optimalizált módszer felhasználásával.

A bemenet első és egyetlen sora egy számítást tartalmaz a fordított lengyel jelölés szerint. Ennek minden karaktere az angol abc egy kisbetűje, illetve a „`+`” és „`*`” karakter lehet.

A kimenet első sorába a számolás optimalizáció nélküli, a második sorába az optimalizáció utáni memóriaigényét kell írni.

Minta:

Bemenet	**Kimenet** (a `/` jel sortörést helyettesít)
`ab+bc+*ca+*`	`8 / 4`

Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 20%-a kapható, ha a megoldás a kimenet első sorát helyesen határozza meg.

Beküldendő egy `s164.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. november 15.

❄

Nyári matematika- és fizikatábor 2022. Dombóvár

2022. június végén összesen 39 középiskolás diák gyűlt össze a Dombóvár-Gunaras üdülőközpontban. A társaság egyik fele matematikával, a másik fizikával foglalkozott, a szabadidőt pedig közösen töltötték. A tábort a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat kiadó MATFUND Alapítvány szervezte.

A Nemzeti Tehetség Program keretében fogadta el a Miniszterelnökség az NTP-TSZM-21-0144 pályázatot (**„Miénk a tér és az idő – a tömeg KöMaL táborba jön”**.

A szervezők

Nyári tábor 2022.

Ha nyár eleje, akkor KöMaL tábor! Én idén másodszor vettem részt a KöMaL nyári táborában, ahol a KöMaL **M**, **P** és **G** pontversenyének eredményes beküldői egy kis fizikával indíthatták a nyarat, a matek olimpiai csapatok pedig felkészülhettek a megmérettetésekre.

Az első közös programunk egy fizika előadás volt, amit *Honyek Gyula* tanár úr és *Baranyai Klára* tanárnő tartottak. Az első táboromban a rivalizálás jegyében nem fogadtam kitörő örömmel, hogy távol az iskolától fizikát kelljen hallgatnom, de az előadás gyökeresen megváltoztatta a véleményem. Mindkét alkalommal szórakoztató stílusban hallgathattuk meg különböző fizikai kísérletek és jelenségek magyarázatát. A bátrabb vállalkozók meggyújthatták szappanos oldatba mártott tenyerüket, vagy megkóstolhatták a szárított jeget.

Az előadást követően a fizikások egy része megpróbálkozott a lehetetlen feladattal, hogy megtanítsanak biliárdozni, amit pár kör forgó követett. Habár az IMO–MEMO focimeccs idén elmaradt, a matekosok és fizikások számos sportban mérhették össze tudásukat.

Mialatt mi az általunk, illetve *Kiss Géza* és *Dobos Sándor* tanár úr által hozott feladatokkal próbáltunk megbirkózni, a fizikások krumpliágyúval lőttek, méréseket és becsléseket végeztek, és kis csapatokban versenyeztek nagy tábla csokikért. Mi, matekosok két egyéni próbaversenyt is írtunk, míg egy MEMO-jellegű próbacsapatversenyt is kipróbálhattunk. Habár nagy meglepetésre senki nem tudta megoldani a kínai válogató 6-os feladatát, elégedettek lehettünk az eredményeinkkel. Az ifik strandolás közben javítgatták a dolgozatainkat, így a medencéből kilépve betekintést nyerhettünk a javításba, és reklamálhattunk is. A fizikások az élményfürdőben sem pihenhettek, csúszások sebességét kellett mérniük, amiben igyekeztünk segítségükre lenni.

Utolsó este sajnos nem rakhattunk tábortüzet, mint tavaly, de a közös éneklés így is átmelengette szívünket. Mikor az eső a fizikások faházaiba száműzött minket, közös társasozással és beszélgetéssel ütöttük el az időt. Sajnos ennek következtében fél szandállal a lábamon jutottam vissza hajnalban a matekos szállásra, így megtanultam értékelni az alsó egészrész fontosságát. Mindezek ellenére összességében mégis nagyon pozitív érzésekkel távoztam Dombóvárról, ahol új barátokat szereztem, csodás élményekkel, és sok-sok tudással gazdagodtam.

Sztranyák Gabriella
Budapest

Támogatók:

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Nemzeti Tehetség Program

AIT-BUDAPEST

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Beszámoló a 6. Európai Fizikai Diákolimpiáról

Két év online rendezés után ismét hagyományos formában, 2022. május 20. és 24. között Ljubljanában, Szlovénia fővárosában rendezték meg a hatodik Európai Fizikai Diákolimpiát (EuPhO). A versenyen 30 európai és 7 Európán kívüli ország összesen 182 diákja vett részt. A versenyen mindössze 12 aranyérmet osztottak ki, amelyből az egyiket egy magyar diák, *Kovács Balázs Csaba* szerezte meg, aki az abszolút 6. helyen végzett.

A csapat és eredményeik:

Kovács Balázs Csaba (Hatvani Bajza József Gimnázium, 12. oszt.) *aranyérem* (34,4 pont), felkészítő tanárai: *Maruzsiné Sevella Judit* és *Kovács László;*

Gurzó József (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.) *ezüstérem* (26,1 pont), felkészítő tanára: *Nagy Piroska Mária;*

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium, 9. oszt.) *bronzérem* (18,6 pont), felkészítő tanára: *Horváth Norbert;*

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium, 12. oszt.) *bronzérem* (18,5 pont), felkészítő tanára: *Horváth Norbert;*

Molnár-Szabó Vilmos (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. oszt.) *dicséret* (14,9 pont), felkészítő tanára: *Nagy Piroska Mária.*

A magyar csapat vezetői *Szász Krisztián* és *Vankó Péter* voltak, *Vigh Máté* pedig a zsűriben, az első elméleti feladat szerzőjeként képviselte hazánkat.

Az alábbiakban közöljük a verseny feladatait, a megoldások a verseny honlapján (`https://eupho.ee/eupho-2022/`) érhetők el.

Kísérleti feladat: A megvilágítás fizikája

Egy izzó úgy bocsát ki fényt, hogy kellően magas hőmérsékletre hevít egy volfrámszálat, és így a feketetest-sugárzás a spektrum látható részébe esik, de az energia jelentős része elvész az infravörös tartományban.

Az emberi látás számára érzékelhető fény mennyiségi jellemzésére olyan fotometrikus mértékegységet használunk, amely figyelembe veszi az emberi szem hullámhosszfüggő érzékenységét.

Egy forrás által minden irányban *kibocsátott* teljes látható fénymennyiséget **fényáramnak** nevezzük, és lumenben [lm] mérjük. Egy felület egységnyi területe által *érzékelt* látható fénymennyiséget **megvilágításnak** nevezzük, mértékegysége a lux [$\mathrm{lx} = \mathrm{lm/m^2}$], és fénymérővel mérhetjük.

Ha a fény mennyiségét az általa szállított energia alapján jellemezzük, akkor radiometrikus egységeket használunk, amelyek a teljesítmény hagyományos egységeivel fejezhetők ki. A fényáram radiometrikus megfelelője a **sugárzási fluxus,** mértékegysége a watt [W], a **besugárzás** [$\mathrm{W/m^2}$] pedig a megvilágítás megfelelője.

A feladatban a fényforrások termikus és világítástechnikai tulajdonságaival fogsz foglalkozni. A három feladat nagyrészt független egymástól. Vázold fel a mérési elrendezésedet mindegyik feladathoz! Az 1. és 2. feladatnál nem kell hibaszámítást végezned.

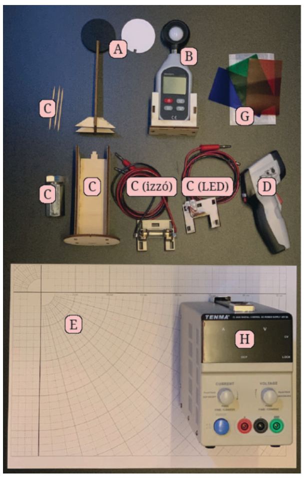
Mérési eszközök (lásd az 1. ábrát!)

A – Fekete és fehér, 3 mm vastag műanyag lemez tartóval. Mindkét lemez jól elnyeli az infravörös sugárzást.

B – Fénymérő tartóval. A fénymérő 6 perc után automatikusan kikapcsol – az on/off gomb hosszan tartó benyomásával tudod újra bekapcsolni. Figyelj az egységekre: (lx legyen, ne fc)! A `HOLD` gombbal tudod a kijelzett értéket rögzíteni.

C – Kerek talpú tartó a fényforrások rögzítésére, egy nehezék a stabilizálására és két cserélhető fénymodul: egy izzólámpa (**maximális feszültség** 12 V) és egy LED (**maximális feszültség** 3,0 V), **ne lépd túl a** 400 mA **áramot**). A modulok beékeléséhez használhatod a fogpiszkálót. A fekete papírral védheted a szemed a műszer leolvasásakor.

D – Infravörös hőmérő. A mért érték a ravasz *megnyomása* után kis késéssel jelenik meg. A méréseknek lehet egy jelentős, de állandó (szisztematikus) hibája.



1. ábra. Fénykép a kísérleti feladatok eszközeiről. A szögmérő és a fekete árnyékoló papír nincs rajta a fényképen

E – Nagy papír, amin dolgozhatsz, távolság- és szögbeosztásokkal.

F – Szögmérő.

G – Vörös, zöld és kék színszűrő borítékban. (Ha színtévesztő vagy, kérj a tábláddal segítséget!)

A szűrők érzékenyek a hőre. Tartsd távol azokat a fényforrástól!

H – Tápegység. Nyomd meg *többször* a feszültség/áram gombot a beállítani kívánt számjegy kiválasztásához (a számjegy alatt villogó fény jelzi), és a gomb tekerésével állítsd be a számértéket. Pár másodperc múlva a villogás abbamarad, és a kijelző az aktuális feszültség/áramértéket mutatja. A fényforrás szabályozásához az áramot változtasd. Ha a kívánt áram nem érhető el a feszültséglimit túllépése nélkül, akkor a tápegység átvált állandó feszültségű (feszültséggenerátor) módba, és korlátozza az áramot. Csatlakoztasd a vezetékeket a megfelelő negatív (fekete) és pozitív (vörös) csatlakozóba a tápegységen. A zöld csatlakozót ne használd!

A fényforrás védelme érdekében először állítsd be a feszültséget a megengedett maximális értékre, az áramot pedig nullára, mielőtt csatlakoztatod a vezetékeket!

Ha kiég a fényforrásod, kérhetsz helyette másikat. (Csak korlátozott mennyiség áll rendelkezésre.)

1. Szín és hőmérséklet (4 pont)

A feketetest-sugárzás színe a hőmérséklettől függ. A csillagászatban a csillagok hőmérsékletét a színindexük alapján határozzák meg, ami két különböző színszűrővel mért megvilágítás hányadosa.

T [K]	vörös [lx]	zöld [lx]	kék [lx]	T [K]	vörös [lx]	zöld [lx]	kék [lx]
1570	2	0	0	1940	120	91	36
1600	4	0	0	2000	165	130	53
1610	5	1	0	2060	230	194	80
1620	6	2	0	2120	310	274	118
1630	8	3	0	2160	379	348	155
1640	10	4	0	2220	484	460	210
1660	12	5	0	2260	586	570	264
1670	14	6	0	2310	753	748	348
1700	18	9	1	2350	888	929	440
1730	24	14	3	2390	1032	1107	527
1780	37	23	7	2460	1292	1452	697
1820	51	34	11	2500	1577	1826	879
1880	80	57	21	2540	1811	2198	1078

1. táblázat. Ismert hőmérsékleten működő izzó megvilágítása három különböző színű, a fényforrástól és a fénymérőtől rögzített távolságban lévő színszűrővel megmérve. A mérés pontossága ± 2 lx

a) Az *1. táblázat* tartalmazza egy izzólámpa vörös, zöld és kék színszűrőn keresztül mért megvilágítását a hőmérséklet függvényében. Válassz megfelelő színszűrőket, és a táblázat alapján készíts egy kalibrációs görbét, amely megadja a kiválasztott színindexet a hőmérséklet függvényében!

b) Mérd meg, milyen összefüggés van az izzószálra kapcsolt elektromos teljesítmény és az izzószál hőmérséklete között! Ábrázold eredményedet a mért tartományban.

2. Fényhasznosítás (8 pont)

Egy fényforrást a **fényhasznosítás** jellemez, amit lumen/watt egységekben mérünk, azaz a fényáram és a felhasznált teljesítmény hányadosaként. Összehasonlításként a Nap fényhasznosítása 93 lm/W.

Mérd meg a fényhasznosítást a rákapcsolt elektromos teljesítmény függvényében mindkét fényforrás esetében a mérhető fénykibocsátás tartományában! Ábrázold eredményeidet fényforrásonként külön-külön grafikonon. Írd le az összes számítási lépést, és add meg az összes mért adatot.

3. Sugárzó fűtés (8 pont)

Ez a feladat időigényes. Ennek megfelelően tervezd meg az időbeosztásodat!

Ha egy testre fény esik, akkor annak egy része elnyelődik. Ha a test és a környezet között nem túl nagy a hőmérséklet-különbség, a test hőleadását a környezet felé a h **hőátadási tényezővel** jellemezhetjük, $P/A = h(T - T_0)$ formában, ahol T a felület hőmérséklete, T_0 a környezet hőmérséklete, és P/A jelöli az egységnyi felület hőleadását a környezet felé.

a) Határozd meg a fekete műanyag h hőátadási tényezőjét és λ hővezetési együtthatóját, és végezz hibaszámítást! Tételezd fel, hogy a test minden ráeső fényt elnyel, és hogy az izzólámpa minden teljesítményt elektromágneses sugárzás formájában ad le.

b) Mérd meg a fehér műanyag albedóját (azt, hogy a beérkező sugárzás mekkora hányada verődik vissza, ahelyett, hogy elnyelődne), és végezz hibaszámítást!

Hasznos összefüggés: Egy r sugarú gömböv területe a θ_1 és θ_2 polárszögek között (ahol $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi$)

$$\Delta A = 2\pi r^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

Útmutató a tápegység használatához

A mérésen használt tápegységet feszültséggenerátor és áramgenerátor üzemmódban is lehetett használni. A feszültség- és áramlimitek beállításának módját itt nem közöljük, de megtekinthető a fent megadott honlapon.

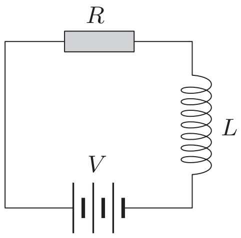
Elméleti feladatok

1. Úszó henger (10 pont)

Egy szilárd, homogén, $h = 10$ cm magas és $s = 100$ cm^2 alapterületű henger úszik egy $H = 20$ cm magas és $S = 102$ cm^2 alapterületű, folyadékkal töltött hengeres edényben. A henger és a folyadék sűrűségének hányadosa $\gamma = 0{,}70$. A henger alja néhány centiméterrel az edény alja felett van. A henger függőleges rezgéseket végez, miközben tengelye mindvégig egybeesik az edény tengelyével. A folyadék felszínének rezgési amplitúdója $A = 1$ mm.

Határozd meg a mozgás T periódusidejét! A folyadék viszkozitását hanyagold el.

2. Hőtani rezgések (10 pont)



2. ábra

Egy ellenállás olyan anyagból készült, amelynek van egy fázisátalakulása olyan módon, hogy az ellenállása a következő két érték valamelyike: R_1, ha a hőmérséklete kisebb, mint T_c, és $R_2 > R_1$, ha a hőmérséklete nagyobb, mint T_c.

Ezt az ellenállást egy L induktivitású tekercsen keresztül egy feszültségforrásra kötjük. Azt látjuk, hogy ha a forrás V feszültsége két kritikus érték közé esik, $V_1 < V < V_2$, akkor az ellenállás hőmérséklete oszcillálni kezd. Tegyük fel, hogy

(*i*) az ellenállásból a környezetbe jutó P hőáramot a $P = \alpha(T - T_0)$ kifejezés adja meg, ahol α egy állandó, T az ellenállás hőmérséklete, T_0 pedig a környezet hőmérséklete;

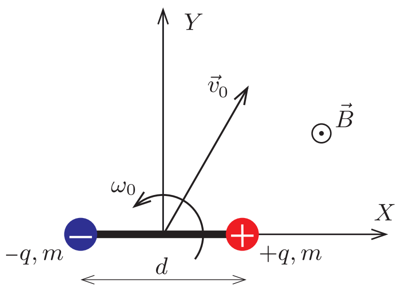
(*ii*) az ellenállás geometriai mérete olyan kicsi, hogy sokkal gyorsabban eléri a termikus egyensúlyt, mint az L/R_2 karakterisztikus idő.

a) (*2 pont*) Fejezd ki V_1 és V_2 értékét a fent megadott paraméterek segítségével!

b) (*6 pont*) Feltételezve, hogy $V_1 < V < V_2$, vázold fel az ellenállás T hőmérsékletét a t idő függvényében, és határozd meg a $(T_{\max} - T_0)/(T_{\min} - T_0)$ hányadost, ahol $T_{\max}$ és $T_{\min}$ a T hőmérséklet maximális és minimális értékét jelöli!

c) (*2 pont*) Határozd meg az oszcilláció periódusidejét, ha $V = \sqrt{V_1V_2}$ és $R_2 = 16R_1$!

3. Dipólus mágneses mezőben (10 pont)



3. ábra

Két kicsiny, egyenként m tömegű, rendre $+q$ és $-q$ töltéssel rendelkező golyót egy d hosszúságú, merev rúddal összekötünk, és így egy dipólust kapunk. A dipólus az XY-síkban helyezkedik el, és az XY-síkra merőleges irányú, homogén $\vec{B}$ mágneses térben van.

Kezdetben a dipólus az X tengely mentén helyezkedik el, és ω_0 kezdeti szögsebességgel forog az XY-síkban a *3. ábrán* látható módon. A dipólus tömegközéppontja kezdetben az origóban található, kezdősebessége $\vec{v}_0$, ami szintén az XY-síkban fekvő vektor.

Tekintsünk három különböző esetet (a, b és $c - d$):

a) (*2 pont*) Határozd meg ω_0 értékét és $\vec{v}_0$ irányát ahhoz, hogy a tömegközéppont állandó $\vec{v} = \vec{v}_0$ sebességgel mozogjon!

b) (*3 pont*) Adott ω_0 esetén határozd meg azt a $\vec{v}_0$ vektort (irányt és nagyságot), amelynek eredményeképp a tömegközéppont körpályán fog mozogni! Határozd meg a körpálya R_c sugarát és középpontjának x_c és y_c koordinátáit! Nem kell bizonyítanod, hogy csak egyetlen megoldás létezik.

c) (*4 pont*) Legyen $\vec{v}_0 = 0$. Határozd meg azt a legkisebb $\omega_0 = \omega_{\min}$ szögsebességet, ami ahhoz szükséges, hogy a dipólus iránya ellentétessé váljon a mozgása során!

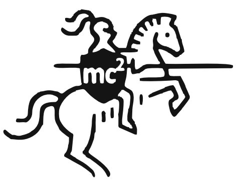
d) (*1 pont*) Ha a dipólus úgy indul, hogy $\vec{v}_0 = 0$ és a szögsebessége a *c)* részben meghatározott $\omega_0 = \omega_{\min}$, akkor a tömegközéppont pályájának van egy aszimptotája. Határozd meg az aszimptota D távolságát az origótól!

Hasznos vektorazonosság:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

ahol a „×” és a „·” rendre a vektoriális, illetve a skaláris szorzatot jelöli.

Szász Krisztián, Vankó Péter



Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye

Versenyfelhívás és beszámoló

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (több mint 30 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell. A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) az `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje:

2022. november 1. éjfél.

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott IYPT problémáról 10 perces angol nyelvű előadást kell készíteni és felvenni, majd 2022. november 29-ig beküldeni. Ezen előadások alapján a legjobb beküldők az ELTE TTK-n, december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk beküldött előadást élőben kell előadniuk.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Pakisztánban megrendezésre kerülő 36. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `hypt@ttk.elte.hu` email címen.

Néhány példa a 2023-ra kitűzött IYPT problémák közül:

3. Sziréna. Ha levegőt fújunk egy forgó, lyukakkal ellátott lemezre, hang hallható. Magyarázd meg ezt a jelenséget, és vizsgáld meg, hogyan függnek a hang tulajdonságai a releváns paraméterektől!

14. Vízsugártörés. A függőleges vízsugár megtörhet, ha egy ferde szitán halad keresztül, melynek finom a hálózata. Írj fel egy törvényt, mely leírja a törést, és vizsgáld meg a releváns paramétereket!

17. Fékező sáv. A homokkal teli mélyedés elnyelheti egy mozgó jármű kinetikus energiáját. Milyen hosszúságú fékező sáv képes egy passzívan mozgó tárgyat (pl. egy labdát) teljesen megállítani? Milyen paraméterektől függ ez a hosszúság?

Ezüstérmesek lettek az ifjú fizikusaink Romániában

2022. július 15–23. között került megrendezésre 35. alkalommal az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye (IYPT – International Young Physicists' Tournament, `https://www.iypt.org/`). A koronavírus után végre ismét sok ország tudott részt venni. A magyar csapat 25 ország közül végül a 8. helyen végzett, ezzel ezüstérmet szerzett.

11 kutatási témával érkeztünk Temesvárra, melyből 5-öt mutattunk be a versenyen. A megmérettetésen a saját kutatási eredmények prezentálása mellett a többi ország eredményeinek opponálása és értékelése (review) is a verseny része.

További információkért látogasd meg, és kövesd Facebook-oldalunkat: `www.facebook.com/hypt.elte.hu`, ahol a csapat részletes élménybeszámolóját, képeit és eseményeit találod, amelyek többet mondanak minden szónál.

A magyar csapat tagjai:

Bodor Emma (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 10. évf.);

Czehlár Gergely (Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium, 11. évf.);

Kalocsai Zoltán (Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, 12. évf.);

Pesti Patrik (ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. évf.);

Simon Tamás (Budapesti Német Iskola, 12. évf.).

A versenyzők felkészítése az ELTE Anyagfizikai Tanszékén folyt egyetemi hallgatók, oktatók és középiskolai tanárok vezetésével.

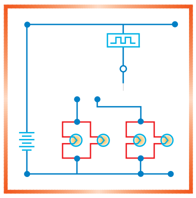
– Egyetemi és középiskolai oktatók: *Hömöstrei Mihály* (Budapesti Német Iskola, ELTE), *Ispánovity Péter* (ELTE), *Jenei Péter* (ELTE), *Szeidemann Ákos* (Eötvös József Gimnázium, Tata), *Széchenyi Gábor* (ELTE), *Vincze Miklós* (ELTE-MTA).

– Egyetemi hallgatók és doktoranduszok: *Bánóczki Tímea* (BME), *Beregi Ábel* (University of Oxford), *Kadlecsik Ádám* (ELTE), *Lipovics Dániel* (University College London), *Penc Patrik* (BME), *Vavrik Márton* (BME).

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2023-as megmérettetésre, mely Pakisztánban kerül megrendezésre.

az HYPT szervezők csapata

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 769. *Vízszintes úton egyenletesen haladó autó fogyasztásmérője* 5 liter/100 km *értéket mutat. Ha ugyanez az autó ugyanezen az úton gyorsulva mozog, akkor a fogyasztásmérő* 10 liter/100 km-*t mutat abban a pillanatban, amikor a kocsi eléri az egyenletes haladás sebességét. Ha az autó ugyanekkora sebességgel egy emelkedőn halad, akkor a fogyasztása* 12 liter/100 *km. Mit mutat a fogyasztásmérő, ha az autó ugyanezen az emelkedőn az előzőekben leírt gyorsulással mozog felfelé, és a sebessége is éppen megegyezik az előzőekben leírtakkal?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az autó fogyasztása egyenesen arányos a motor $P=Fv$ teljesítményével, ahol F a motor (áttételeken keresztül érvényesülő) „húzóereje”, v pedig az autó sebessége. Az F erő egy része az egyenletes mozgásnál legyőzendő erők eredőjével egyezik meg, a maradék pedig az autó gyorsításához szükséges erő.

Az autó sebessége mind a négy esetben ugyanakkora, így a sebességtől függő közegellenállási erők is ugyanakkora nagyságúak. A következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$P_1=F_1v, \qquad F_1=F_{\text{közeg.}},$$
$$P_2=F_2v, \qquad F_2=F_{\text{közeg.}}+F_{\text{gyorsít}},$$
$$P_3=F_3v, \qquad F_3=F_{\text{közeg.}}+F_{\text{lejtő}},$$
$$P_4=F_4v, \qquad F_4=F_{\text{közeg.}}+F_{\text{lejtő}}+F_{\text{gyorsít}}.$$

A fenti egyenletekből $P_4=P_2-P_1+P_3$ következik, vagyis ezekkel arányosan az emelkedőn gyorsító autó fogyasztására $10-5+12=17$ liter/100 km adódik.

Sós Ádám (Sopron, Berzsenyi D. Ev. (Líceum) Gimázium és Koll., 9. évf.)

28 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Hibás 9, nem versenyszerű 1 dolgozat.

G. 779. *Ha a Hold felszínét óceánok és szárazulatok borítanák, akkor lenne-e a Holdon apály és dagály?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az árapály a közeli égitestek egymásra gyakorolt tömegvonzása által létrehozott alakváltozások összessége. A Földön az árapály jelenségeket nagyobbrészt a Hold, kisebbrészt a Nap gravitációs hatásai okozzák.

A Hold által létrehozott földi árapályt két erő eredője hozza létre: a Hold gravitációs vonzása (amely a Föld felszínén helyről helyre változik), valamint a Földnek a Föld–Hold rendszer tömegközéppontja körüli keringéséből származó centrifugális erő. E két erő vektoriális eredőjeként a Földnek a Hold felőli és azzal ellentétes oldalán többleterő jelenik meg, itt megemelkedik az óceánok vize (dagály). (Az árapályt okozó erők nemcsak a vízre, hanem a Föld szilárd kérgére és a légkörre is hatnak, de ennek hatása nem okoz megfigyelhető változást.) A Nap hasonló módon hoz létre árapályt a Földön, és az árapályjelenségek összegződnek.

A Hold esetében ugyanezek az erők fennállnak, tehát a Holdon is lehetne árapály, ezt azonban nem a Föld, hanem csak a Nap okozná.

Mivel a Hold 27,3 napos keringési ideje és tengely körüli forgásának ideje megegyezik (ezt épp az ún. árapálysúrlódás jelensége alakította ki), ezért a Holdnak mindig azonos oldala fordul a Föld felé. Emiatt a Föld okozta dagály a Holdnak mindig ugyanazon a helyén lenne a legnagyobb, tehát a Holdnak egy adott helyén nem váltakozna a Föld keltette dagály és az apály.

A Nap azonban okozna a földihez hasonló árapályt a Holdon, hiszen a helyzete a Hold egy adott pontjából nézve 29,5 napos periódusidővel változik. Emiatt a Holdon kb. 15 naponta lenne dagály, illetve apály.

Hruby Laura (Budapest, Veres Pálné Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

33 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 14, nem versenyszerű 2 dolgozat.

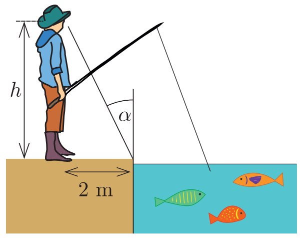
G. 780. *Zavarja-e a halakat, ha a parttól 2 méter távolságban beszélgetnek a horgászok? (A hang terjedési sebessége levegőben 340 m/s, vízben pedig 1500 m/s.)*

(*4 pont*)

Megoldás. A vízben gyorsabban terjednek a hanghullámok, mint levegőben, tehát a hangterjedés szempontjából a víz ritkább, a levegő sűrűbb közegnek számít. (Az akusztikai értelemben vett sűrűség természetesen lényegesen különbözik a tömegsűrűségtől.)

A levegőből a víz felé terjedő hang esetében hangtanilag sűrűbb közegből hangtanilag ritkább közegbe lépünk át, így felléphet a teljes visszaverődés jelensége. Az α beesési szöggel érkező hullám olyan β törési szöggel halad tovább, amelyre

$$\sin\beta = \frac{c_{\text{víz}}}{c_{\text{levegő}}}\,\sin\alpha.$$



Mivel $\sin\beta \leqslant 1$, megtört (a vízben is terjedő) hanghullám csak akkor alakulhat ki, ha

$$\sin\alpha \leqslant \frac{c_{\text{levegő}}}{c_{\text{víz}}} = 0{,}227, \quad \text{vagyis} \quad \alpha \leqslant 13{,}1^\circ.$$

Ezek szerint az $\alpha_0 = 13{,}1^\circ$-nál nagyobb beesési szögben érkező „hangsugár” már nem hatol be a vízbe, hanem teljes egészében visszaverődik.

A vízparttól 2 méter távolságra lévő ember hangja akkor érne a vízhez α_0-nál kisebb szögben, ha a horgász szája a talajtól számítva legalább

$$h = \frac{2\ \text{m}}{\operatorname{tg}\alpha_0} = 8{,}6\ \text{m}$$

magasan lenne. Ilyen magas ember nincs, tehát a halakat nem zavarja a horgászok beszélgetése.

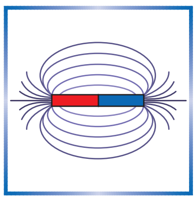
Biró Kata (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A teljes visszaverődés jelensége nem azt jelenti, hogy a hullám semennyire nem jut be a másik közegbe, hanem csak azt, hogy a hullám erőssége (intenzitása) nagyon erősen (exponenciális ütemben) lecsökken, így egy bizonyos „behatolási mélységet” elérve a hangerősség elhanyagolhatóan kicsivé válik. A behatolási mélység nagyságrendileg a hanghullám hullámhosszával egyezik meg, tehát sok méter is lehet, vagyis elképzelhető, hogy a halakat még a parttól viszonylag messze beszélgető horgászok hangja is elriaszthatja.

(*G. P.*)

21 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1 pont) 1, hibás 7 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5386. *Egy $\alpha = 30^\circ$-os lejtésű, $d = 2$ méter hosszú, szigetelő anyagból készült vályú aljához $Q = 5{,}55\ \mu\text{C}$ töltésű kis golyót rögzítünk. A vályú tetejéről $m = 100$ g tömegű, $q = 10\ \mu\text{C}$ töltésű kis golyót engedünk el. Milyen messzire jut el ez a golyó, ha tisztán gördül? (A mozgása során a golyó töltése nem változik meg.)*

(*3 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

Megoldás. Jelöljük a töltött golyó által megtett utat s-sel. A golyó helyzeti energiája az indulásától a megállásáig

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = -mgs\sin\alpha$$

értékkel változott meg (ennyivel csökkent). A töltött golyó elektrosztatikus potenciális energiája (a Coulomb-energia)

$$\Delta E_{\text{Coulomb}} = k\frac{qQ}{d-s} - k\frac{qQ}{d} = kqQ\frac{s}{d(d-s)}$$

értékkel nőtt. A tiszta gördülés miatt súrlódási energiaveszteség nincs, így az összenergia nem változik meg:

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} + \Delta E_{\text{Coulomb}} = kqQ\frac{s}{d(d-s)} - mgs\sin\alpha = 0.$$

Ennek az egyenletnek $s \neq 0$ megoldása:

$$s = d - \frac{kqQ}{mgd\sin\alpha} = (2\ \text{m}) - \frac{(9\cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2)\cdot\left(10^{-5}\ \text{C}\right)\cdot\left(5{,}55\cdot 10^{-6}\ \text{C}\right)}{(0{,}1\ \text{kg})\cdot(9{,}81\ \text{N/kg})\cdot(2\ \text{m})\cdot 0{,}5} =$$

$$= 1{,}49\ \text{m}.$$

A töltött golyó tehát kb. 1,5 m utat tesz meg a vályúban a megállásáig.

Waldhauser Miklós (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

56 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 15, hibás 12, nem versenyszerű 7 dolgozat.

P. 5391. *Egy mély kútba követ ejtünk. A csobbanás hangját* 4,25 s*-mal az elejtés után halljuk meg. Milyen mélynek találjuk a kutat, ha* $g = 10\ \text{m/s}^2$*-tel és* $v_{\text{hang}} = 320\ \text{m/s}$*-mal számolunk? Mekkorának adódik a kút mélysége, ha* $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$*-tel és* $v_{\text{hang}} = 340\ \text{m/s}$*-mal számolunk? (A közegellenállás hatását hanyagoljuk el.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Legyen a kő esési ideje t_1, a csobbanás pillanatától a hang érzékeléséig eltelt idő t_2. Tudjuk, hogy $t_1 + t_2 = T = 4{,}25$ s. A szabadon eső kő és a hang ugyanannyi utat tesz meg:

$$\frac{g}{2}t_1^2 = v_{\text{hang}}(T - t_1),$$

azaz

$$\frac{g}{2}t_1^2 + v_{\text{hang}}t_1 - v_{\text{hang}}T = 0.$$

a) Számoljunk először $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $v_{\text{hang}} = 320\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ adatokkal. A t_1-re vonatkozó másodfokú egyenlet (mértékegységek nélkül):

$$5\,t_1^2 + 320\,t_1 - 1360 = 0,$$

amelynek pozitív megoldása: $t_1 = 4$ (s), és innen a kút mélységére a

$$h = \frac{g}{2}t_1^2 = 80\ \text{m}$$

eredményt kapjuk.

b) Használjuk most a pontosabb $g=9{,}81~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ és a $v_{\text{hang}}=340~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ adatokat. A fenti másodfokú egyenlet (mértékegységek nélkül) most így néz ki:

$$4{,}905\,t_1^2+340\,t_1-1445=0,$$

aminek a pozitív gyöke: $t_1\approx 4{,}02$ (s). A kút mélysége ilyen adatok mellett kb. 79,2 m-nek adódik.

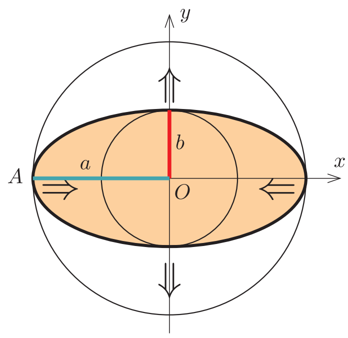
Elekes Dorottya (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn., 9. évf.)

68 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5394. *Egy m tömegű, homogén tömegeloszlású, ellipszis alakú lemez féltengelyeinek hossza a és b. Mekkora a test tehetetlenségi nyomatéka a $2a$ hosszúságú nagytengely végpontján átmenő, a lemez síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva? (A feladat elemi úton is megoldható.)*

(*5 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. Számítsuk ki először az ellipszislemez Θ_O tehetetlenségi nyomatékát az O tömegközéppontján (geometriai középpontján) átmenő, a lemez síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva. Osszuk fel – gondolatban – a lemezt kicsiny m_i tömegű darabkákra, amelyek távolsága a forgástengelytől r_i. Ekkor a tehetetlenségi nyomaték definíciója szerint



$$\Theta_O=\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i r_i^2.$$

Helyezzük el a lemezt egy olyan síkbeli koordináta-rendszerben, amelynek origója a tömegközéppont, tengelyei pedig párhuzamosak az ellipszis tengelyeivel. Mivel a Pitagorasz-tétel szerint $r_i^2=x_i^2+y_i^2$, fennáll

$$\Theta_O=\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i r_i^2=\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i x_i^2+\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i y_i^2.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal első tagja nem függ az y_i koordinátáktól, vagyis hogyha az ellipszist y irányban a/b arányban megnyújtjuk, tehát a sugarú körré alakítjuk, az a tag nem fog megváltozni, vagyis

$$\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i x_i^2=\sum_i^{\text{kör}} m_i x_i^2.$$

De azt is tudjuk, hogy a körlemez szimmetrikus az x és az y tengelyek felcserélése, és így

$$\sum_i^{\text{kör}} m_i x_i^2 = \sum_i^{\text{kör}} m_i y_i^2 = \frac{1}{2}\Theta_O^{\text{körlemez}} = \frac{1}{4}ma^2.$$

Ugyanezt megtehetjük y irányban, b/a arányú nyújtással b sugarú körré alakíthatjuk az ellipszisünket:

$$\sum_i^{\text{ellipszis}} m_i y_i^2 = \sum_i^{\text{kör}} m_i y_i^2 = \frac{1}{4}mb^2.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\Theta_O = \frac{1}{4}m(a^2+b^2).$$

A feladat nem ezt, hanem az A ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot kérdezte, amit a Steiner-tétel segítségével határozhatunk meg:

$$\Theta_A = \Theta_O + ma^2 = \frac{1}{4}m(a^2+b^2) + ma^2 = \frac{1}{4}m(5a^2+b^2).$$

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Hiányos (2 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

P. 5401. *Egy kicsiny (pontszerűnek tekinthető), de nehéz testet két egyforma hosszú, közel azonos teherbírású fonálon tartunk. A fonalak felső végét egy vízszintes egyenes mentén lassan eltávolítjuk egymástól. Amikor a fonalak 2α szöget zárnak be egymással, az egyik fonál elszakad, és a test a másik fonál rögzítettnek tekinthető vége körül ingaként lengeni kezd. Mekkora lehetett α, ha a másik fonál a lengések során nem szakad el?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Amikor a fonalak felső végét eltávolítjuk egymástól, a szimmetrikus elrendezés miatt a fonalakat feszítő erők egyforma nagyságúak lesznek:

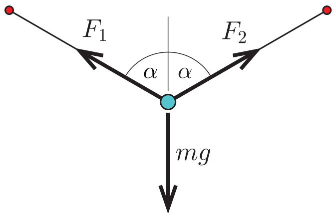
$$F_1 = F_2 = F,$$

ahol F a fonalak szögének növekedtével egyre nagyobb lesz. Ha a kicsiny test tömege m, akkor a függőleges erők egyensúlya miatt az elszakadást megelőző pillanatban (*1. ábra*)

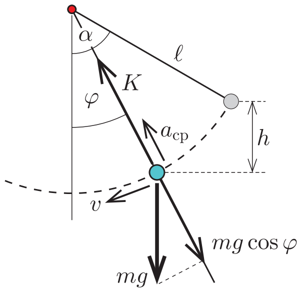
$$mg = 2F\cos\alpha,$$

vagyis a fonalak „szakítószilárdsága”

$$F = \frac{mg}{2\cos\alpha}. \tag{1}$$



1. ábra



2. ábra

(A beküldött dolgozat nem tartalmazott ábrákat, azokkal a jobb érthetőség kedvéért egészítettük ki a megoldást. – A szerk.)

Az egyik fonál elszakadása után a másik test ℓ hosszúságú matematikai ingaként lengeni kezd. Amikor a fonál φ szöget zár be a függőlegessel (*2. ábra*), a test v sebessége az energiamegmaradás tétele segítségével számolható:

$$mgh = mg\ell(\cos\varphi - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Ebben a helyzetben a test centripetális gyorsulása:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{\ell} = 2g(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{2}$$

a nehézségi erő fonálirányú komponense pedig $mg\cos\varphi$. Ha a fonalat valamekkora K erő feszíti, akkor a fonálirányú mozgás dinamikai egyenlete:

$$K - mg\cos\varphi = ma_{\mathrm{cp}},$$

vagyis (2) felhasználásával

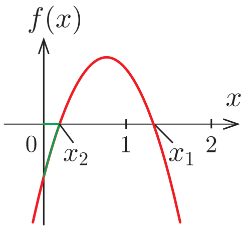
$$K(\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha).$$

Látszik, hogy a fonálban $\varphi = 0$-nál ébred a legnagyobb erő, vagyis amikor a kis test éppen a pálya legalsó pontján halad át:

$$K_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha).$$

A fonál biztosan nem szakad el, ha $K_{\max}$ kisebb, mint az (1) által megadott szakítószilárdság:

$$mg(3 - 2\cos\alpha) < \frac{mg}{2\cos\alpha},$$



3. ábra

vagyis

$$-4\cos^2\alpha + 6\cos\alpha - 1 < 0.$$

Ez $x = \cos\alpha$-ra nézve másodfokú egyenlőtlenség:

$$f(x) \equiv -4x^2 + 6x - 1 < 0.$$

Mivel a fő együttható negatív, a függvény képe egy alul nyitott parabola (*3. ábra*), melynek zérushelyei:

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \approx 1{,}3 \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}19.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\cos\alpha > x_1 > 1$ (ez nyilván értelmetlen), illetve

$$\cos\alpha < x_2 \approx 0{,}19, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha > \arccos x_2 \approx 79°.$$

Ha tehát a széthúzott fonalak szöge az egyik fonál elszakadásának pillanatában legalább 158°, akkor a további lengések során a másik fonál biztosan *nem* fog elszakadni.

Beke Bálint (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., Gimn., 11. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 3, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5407. *A CERN egyik lineáris gyorsítójában kezdetben állónak tekinthető protonokat gyorsítanak $L = 30{,}0$ m hosszú úton $U = 500$ MV feszültséggel. Feltehetjük, hogy a gyorsítóban az elektromos tér homogén. Mennyi idő alatt teszik meg a protonok az L távolságot?*

(*5 pont*) Svájci versenyfeladat

Megoldás. Newton 2. törvénye szerint (ami ebben az alakjában a relativisztikus fizikában is érvényes):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

ahol p a relativisztikus impulzus, $F = e\frac{U}{L}$ pedig az e töltésű protont gyorsító erő. Mivel homogén elektromos erőtérben F állandó, továbbá a protonok kezdősebessége nullának tekinthető, a gyorsítás ideje:

$$T = \frac{pL}{eU},$$

ahol p a felgyorsított proton impulzusa. Feladatunk tehát az, hogy ezt az impulzust meghatározzuk; belőle a gyorsítás ideje könnyen kiszámítható.

A proton (nyugalmi) energiája kezdetben $E_0 = m_0c^2$, a gyorsítás végén pedig

$$E = E_0 + eU = mc^2,$$

ahol m (a szokásos szóhasználattal) a proton „megnövekedett tömege", c pedig a vákuumbeli fénysebesség. A megadott és táblázatból kikereshető adatok szerint

$$m = m_0 + \frac{eU}{c^2} = 2{,}56 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}53\, m_0.$$

Másrészt igaz, hogy

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ahonnan a felgyorsított proton végsebessége:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} = 2{,}274 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ennek megfelelően a keresett időtartam:

$$T = \frac{mvL}{eU} = \frac{(2{,}56 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (2{,}274 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}) \cdot (30\ \mathrm{m})}{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}) \cdot (500 \cdot 10^6\ \mathrm{V})} = 2{,}18 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

A relativisztikus impulzust (a sebesség kiszámítása nélkül) az energia-impulzus relációból is kiszámíthatjuk:

$$E^2 = \left(m_0c^2 + eU\right)^2 = \left(m_0c^2\right)^2 + (pc)^2,$$

ahonnan

$$p = \sqrt{2m_0eU + \left(\frac{eU}{c}\right)^2},$$

a keresett idő pedig

$$T = \frac{L}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{eU}} = 218\ \mathrm{ns}.$$

Kürti Gergely (Kiskunfélegyházi Szent Benedek PG Két Tanítási Nyelvű Technikum és Koll., 12. évf.) és
Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

25 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Gábriel Tamás, Hauber Henrik, Kürti Gergely, Téglás Pannha és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 4, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 416. Akasszunk egy kilincs végére egy kis méretű tárgyat, és fokozatosan növeljük a terhelést további testek ráhelyezésével. Mérjük meg a kilincs egyensúlyi szöghelyzetét a ráakasztott tömeg függvényében! A lehetséges legnagyobb szög elérése után fokozatosan csökkentsük a terhelést, és mérjük meg ebben az esetben is a szöghelyzetet a tömeg függvényében. Adatainkat ugyanazon a grafikonon ábrázoljuk!

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián*, Budapest

G. 789. Becsüljük meg, hogy mennyivel csökken testünk tömege, miközben nyolc órán keresztül, egyfolytában, nyugodtan alszunk! Használjuk a következő adatokat:

– Egy lélegzetvétel során 0,5 l levegő cserélődik ki.

– Percenként 15-öt lélegzünk.

– A kilélegzett levegő szén-dioxid-tartalma 5 V/V%.

– A kilélegzett levegő 6 V/V% vízgőzt tartalmaz.

(*3 pont*)

G. 790. Egy autó átlagos fogyasztása 6 liter/100 km. Teljesen üres, kanyargós, kétsávos autópályán 300 km-t tesz meg a gépkocsi. Az útszakaszon a kanyarok összhossza 50 km, a kanyarok sugara átlagosan 1 km, a sávok szélessége pedig 4 m. Becsüljük meg, hogy mennyivel csökken a jármű fogyasztása, ha egy felelőtlen sofőr minden kanyart a belső íven tesz meg!

(*3 pont*)

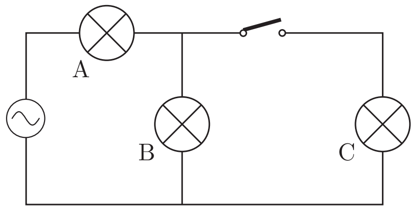
G. 791. Zsonglőrködő elméleti fizikus a következő mutatványt találja ki. Egymás tetejére helyez n számú, tökéletesen rugalmas labdát, közöttük igen kicsiny résekkel. A labdatornyot kemény felületre ejti, ahová a labdák v sebességgel érkeznek meg. A sorozatos pillanatszerű ütközések után a legfelső labda kivételével minden lejjebb lévő labda megáll, a legfelső viszont nv sebességgel pattan fel. Bizonyítsuk be (például a teljes indukció módszerével), hogy ez a mutatvány akkor teljesülhet, ha a labdák tömege kielégíti a következő formulát:

$$m_k = \frac{2m_0}{k(1+k)},$$

ahol m_0 a legalsó labda tömege, valamint $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$.

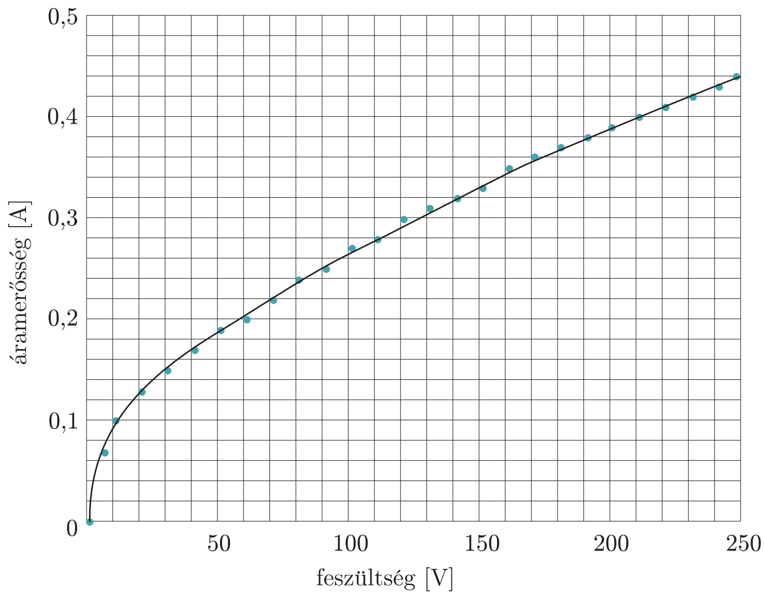
(*4 pont*)

G. 792. Az *ábrán* látható áramkörben egyforma izzólámpák vannak. A kapcsoló zárását követően az A és a B lámpa fényesebben vagy halványabban fog világítani? (Tekintsünk el az izzólámpák ellenállásának hőmérsékletfüggésétől.)



(*3 pont*)

P. 5427. A fenti *ábrán* látható áramkörben található 230 V névleges feszültségű volfrámszálas izzólámpák egyformák, melyeknek áram–feszültség karakterisztikáját az alábbi *grafikon* mutatja. Az áramkörben található feszültségforrás 230 V-os.



100 W-*os villanykörte áram–feszültség karakterisztikája*

a) Mekkora egy ilyen izzólámpa elektromos ellenállása a névleges feszültségen?

b) Mekkora ellenállású az A és a B lámpa izzószála a kapcsoló nyitott állásában?

c) Mekkora ellenállásúak az izzószálak a kapcsoló zárása után?

d) Mekkora teljesítményt adnak le az izzólámpák a fenti esetekben?

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5428. Képzeljük el, hogy nap-éj egyenlőség idején egy egyenlítői ország tengerpartján hason fekszünk a homokban, és figyeljük a naplementét. A tenger tükörsima, az ég tiszta kék, és abban a pillanatban, amikor a Nap utolsó sugara eltűnik a horizonton, hirtelen felállunk, és így még újra láthatjuk a Nap felső karimáját. Becsüljük meg, hogy felállásunk után mennyi idővel tűnik el újra a napkorong!

(*4 pont*) Amerikai feladat nyomán

P. 5429. Egy elektromos autó álló helyzetből indulva 10 s alatt egyenletes gyorsulással 108 km/h sebességet ér el. Kerekeinek sugara 0,4 m, a keréktárcsán található egy 0,2 m sugarú díszítőgyűrű. Az indulástól számítva mennyi idő múlva lesz ennek a vékony gyűrűnek olyan pontja, amely nem gyorsul? Mekkora ebben a pillanatban az autó sebessége?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5430. A klímaváltozás egyik okaként szokták említeni az „intenzív hústermelést". Egy szarvasmarha naponta 160-320 liter metángázt bocsát ki. A globális állattenyésztésben egymilliárd marhát tartanak nyilván. Becsüljük meg, hogy milyen vastag réteget alkotna az állatok egy évi metángáz-kibocsátása a Föld felszínén! (A Földet tekintsük 6370 km sugarú gömbnek.)

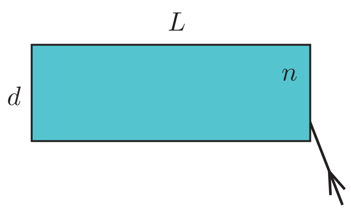
(*3 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5431. Egy 10 cm sugarú, gömb alakú, homogén, tömör testnek egy bizonyos t tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka 10%-kal nagyobb, mint a gömb lehető legkisebb tehetetlenségi nyomatéka. Milyen messze van a t egyenes a gömb középpontjától? (Lásd még a „Merev testek mozgásegyenletei" c. rövid cikket a KöMaL honlapján*.)

(*3 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 5432. Egy függőleges helyzetben rögzített, vékony szigetelőpálcára három egyforma tömegű és egyenlő töltésű szigetelőgyöngyöt fűztünk fel. Az alsó gyöngy rögzített, a fölötte lévő másik kettő szabadon elcsúszhat a pálcán. Egyensúlyi helyzetben hányszor messzebb van a legfelső gyöngy a középsőtől, mint a középső a legalsótól?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

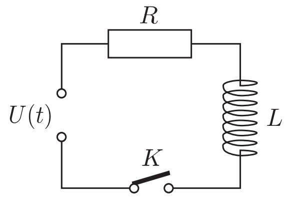


P. 5433. Egy vízzel töltött, téglatest alakú, elhanyagolható falvastagságú akvárium három függőleges oldala a vízből rájuk eső fényt visszaveri. Az akvárium szélessége $d=50$ cm, hossza $L=120$ cm. Az akvárium rövidebb oldalához vízszintes síkban valamekkora beesési szögben lézersugár érkezik. Az *ábra* felülnézetet mutat. (A víz törésmutatója: $n=4/3$.)

A kilépő fénysugár – többszöri tükröződés után – éppen a beeső fénysugárral párhuzamosan haladva hagyja el az akváriumot. Legfeljebb hány tükröződés történhetett?

(*5 pont*) *Zsigri Ferenc* (Budapest) feladata nyomán

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`



P. 5434. Az *ábrán* szereplő feszültségforrás elektromotoros ereje bekapcsolás után időben lineárisan növekszik fel a kezdeti 0 voltos értékről; $U(t)=U_0\frac{t}{t_0}$. A K kapcsoló segítségével bármelyik pillanatban rákapcsolható a feszültségforrás az áramkörre. A feszültségforrás bekapcsolása után mennyi idővel kell zárni a kapcsolót, hogy ezután az ellenálláson átfolyó áram erőssége időben lineárison nőjön? Milyen ütemben nő ekkor az áramerősség?

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5435. Egy cső belső sugara R, tengelye α szöget zár be a vízszintessel. A csövet állandó ω szögsebességgel forgatjuk a tengelye körül.

A csőbe egy pontszerűnek tekinthető, kicsiny testet helyezünk. A cső fala és a kis test közötti csúszási súrlódási együttható μ ($\mu>\operatorname{tg}\alpha$). Azt tapasztaljuk, hogy kellően hosszú idő elteltével a kis test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Mekkora a mozgás sebessége?

(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

Beküldési határidő: 2022. november 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 72. No. 7. October 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 415): **K. 734.** Alex and his friends bought 6 bags of sunflower seeds and 4 bags of pumpkin seeds for 1900 HUF. Next week they bought 4 bags of sunflower seeds and 2 bags of pumpkin seeds for 1100 HUF. How much does a single bag of each type cost (assuming that the prices did not change during the week)? **K. 735.** Logic blocks were developed by Zoltán Dienes. Peter takes all the red and green disks and squares out of a set of blocks, altogether 16 pieces. No two pieces are identical, and they can be classified into two groups having the same number of elements according to each of the following properties: – either small or large, – either red or green, – either a disk or a square, – either hollow or not. Can Peter place the 16 blocks along the perimeter of a circle such that any two neighbors have exactly one of the above properties in common? **K. 736.** A company has 120 employees: plumbers, tilers, bricklayers and painters. All plumbers and bricklayers have a driving license, the others do not. The bricklayers and painters work in Pipacs street, the others in Kankalin street. The number of employees without a driving license is 64, and 84 employees work in Kankalin street. There are twice as many plumbers as painters. How many employees of each kind are there at the company? **K/C. 737.** Given two threads of known length, we can measure and mark off the sum or difference of their lengths, and also the half length of a thread by folding it into two. We are given two threads of length 2240 cm and 1760 cm. Describe a procedure to mark off a length of 10 cm by using a *single measurement* (that is, measuring the sum or difference of lengths is allowed only once, but halving a length by folding can be performed many times). **K/C. 738.** In a certain calendar, the days of a month are arranged in 7 columns. Read from left to right and then from top to bottom, each column contains the same day of the week. For a certain integer n, we select an $n \times n$ square array of days and find that their sum is 198. What is the smallest number in this square?

New exercises for practice – competition C (see page 416): **Exercises up to grade 10: K/C. 737.** See the text at Exercises **K. K/C. 738.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1733.** At most how many different positive prime divisors can a 3-digit number have, if its digits are consecutive positive integers in a certain order? (Based on the idea of *Erzsébet Berkó,* Szolnok) **C. 1734.** A circle k with diameter AB has center O. We draw the circle k_1 with diameter OB, and the line parallel with AB that touches the circle k_1 at point C. This line intersects the circle k at points D_1 and D_2. Determine the angles $\angle COD_1$ and $\angle COD_2$ exactly. (Proposed by *Bálint Bíró,* Eger) **C. 1735.** Find the real solutions of the system $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{16}$. (*The Mathematical Association of America*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1736.** Let P be an interior point of side CD of a parallelogram $ABCD$, and let Q be an interior point of side AB (being parallel with CD). The line segments PA and QD intersect each other at M, while the line segments PB and QC intersect each other at N. Find a condition to have $MN \parallel AB$. (*Based on a U.S. mathematics competition problem*) **C. 1737.** Dick got two dice for his 32^{th} birthday. He labelled the faces of one die with the numbers $1, 2, \ldots, 6$, and the faces of the other one with $0, 1, 2, 7, 8, 9$. By using these dice, he can form all integers from 10 up to his age, 32, but the next number, 33, cannot be formed. Octavia uses two regular octahedra instead. Similarly, she wrote a digit on each face of both octahedra, so she can also form all integers from 10 up to her current age (in years), but not the next one. How old is Octavia now? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma,* Győr)

New exercises – competition B (see page 418): **B. 5262.** Louisa wrote down a natural number, not containing 0 but containing at least two different digits. Then she also listed all the numbers which can be formed by permuting the digits of the original number. What is the maximum of the greatest common divisor of all the numbers (including the original one)? (*3 points*) (Proposed by *Katalin Abigél Kozma,* Győr) **B. 5263.** Prove that the sum of the squares of the medians of a triangle is not less than the square of the semiperimeter of the triangle. (*3 points*) (Proposed by *László Németh,* Fonyód) **B. 5264.** First Player and Second Player play the following game. First Player starts and prescribes arbitrarily many (even infinitely many) terms of a binary sequence (i.e., any term is 0 or 1) in a way that infinitely many terms can still be determined. Then Second Player sets the value of the first digit which has not been prescribed yet. They then repeat this procedure forever by taking turns. First Player wins if the binary sequence is periodic from a certain term, otherwise, Second Player wins. Is there a winning strategy, and if yes, who has it? (*4 points*) (Proposed by *Péter Pál Pach,* Budapest) **B. 5265.** Enlarge the incircle of a right-angled triangle by a scale factor of 2, where the center of enlargement is the vertex at the right angle. Show that this circle touches the circumcircle of the triangle. (*4 points*) (Proposed by *Viktor Vígh,* Szeged) **B. 5266.** Some football players are on holiday together. Altogether they are from k clubs and from n nations where $k < n$. Show that there are at least $n - k + 1$ players having more club fellows than compatriots. (*5 points*) **B. 5267.** We are given two line segments of length p and q, and a triangle ABC determined by the lines a, b and c (where the usual convention is used: points B and C lie on line a, and so on). Construct the point P on the circumcircle of the triangle for which the point P_a divides the line segment P_bP_c in a ratio $p:q$, where P_x is the orthogonal projection of the point P onto the line x. (*5 points*) **B. 5268.** Let I denote the incenter of the triangle ABC. Let P denote an arbitrary interior point of the triangle on the circle ABI. The reflection of the line AP about the line AI intersects the circle ABI at a point Q different from the point A. Prove that $CP=CQ$. (*6 points*) (Proposed by *Szilveszter Kocsis,* Budapest) **B. 5269.** Let $p\geqslant 19$ be an odd integer, and color the numbers $0,1,\dots,p-1$ with two colors. For $1\leqslant i\leqslant p$, let x_i denote a random element of the set $\{0,1,\dots,p-1\}$ (the choices are independent, and have uniform distribution). Prove that the probability of the event that $x_1,\dots,x_p$ have the same color and p divides $x_1+\dots+x_p$ is at least $3/(2^pp)$. (*6 points*) (Proposed by *Péter Pál Pach,* Budapest)

New problems – competition A (see page 419): **A. 833.** Some lattice points in the Cartesian coordinate system are colored red, the rest of the lattice points are colored blue. Such a coloring is called *finitely universal,* if for any finite, non-empty $A\subset\mathbb{Z}$ there exists $k\in\mathbb{Z}$ such that the point (x,k) is colored red if and only if $x\in A$. *a*) Does there exist a finitely universal coloring such that each row has finitely many lattice points colored red, each row is colored differently, and the set of lattice points colored red is connected? *b*) Does there exist a finitely universal coloring such that each row has a finite number of lattice points colored red, and both the set of lattice points colored red and the set of lattice points colored blue are connected? A set H of lattice points is called connected if, for any $x,y\in H$, there exists a path along the grid lines that passes only through lattice points in H and connects x to y. (Submitted by *Anett Kocsis,* Budapest) **A. 834.** Let $A_1A_2\dots A_8$ be a convex cyclic octagon, and for $i=1,2\dots,8$ let $B_i=A_iA_{i+3}\cap A_{i+1}A_{i+4}$ (indices are meant modulo 8). Prove that points $B_1,\dots,B_8$ lie on the same conic section. **A. 835.** Let $f^{(n)}(x)$ denote the n^{th} iterate of function f, i.e $f^{(1)}(x)=f(x)$, $f^{(n+1)}(x)=f\Big(f^{(n)}(x)\Big)$. Let $p(n)$ be a given polynomial with integer coefficients, which maps the positive integers into the positive integers. Is it possible that the functional equation $f^{(n)}(n)=p(n)$ has exactly one solution f that maps the positive integers into the positive integers? (Submitted by *Dávid Matolcsi* and*Kristóf Szabó,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 442)

M. 416. Hang a small object on the end of a door handle and gradually increase the load, with placing additional bodies on the load. Measure the angular position of the handle in equilibrium as a function of the mass hung on it. After reaching the maximum possible angle, gradually reduce the load and measure the angular position of the handle as a function of mass. Plot your data on the same graph.

G. 789. Estimate how much your body mass decreases while you sleep for eight hours peacefully! Use the following data: • During one breath 0.5 l of air is exchanged. • We breathe 15 times in a minute. • The carbon dioxide content of the exhaled air is 5 V/V%. • The exhaled air contains 6 V/V% water vapour. **G. 790.** The average consumption of a car is 6 litres/100 km. On a completely empty, winding two-lane road the car can travel 300 km. The total length of the curves on this road segment is 50 km, the radius of the curves is on average 1 km and the width of the lanes is 4 m. Estimate the reduction in fuel consumption if a careless driver makes every turn on the inside curve. **G. 791.** A juggling theoretical physicist invents the following stunt. He puts n perfectly elastic balls on top of each other with very small gaps between them. He drops the ball tower onto a hard surface, where the balls arrive at a speed of v. After a series of momentary collisions, all the balls except the top ball stop, and the top ball bounces up at a speed of nv. Prove (for example using the method of mathematical induction) that this stunt can be performed if the mass of the balls satisfies the following formula: $m_k = \frac{2m_0}{k(1+k)}$, where m_0 is the mass of the lowermost ball and $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$. **G. 792.** In the circuit shown in the *figure* below there are identical incandescent lamps. After the switch is closed, will lamp A or B be brighter or dimmer? (Do not consider the temperature dependence of the resistances of the filament lamps.)

P. 5427. The voltage rating of each of the identical tungsten filament incandescent lamp of the circuit shown in the *figure* above is 230 V. Their current-voltage characteristics are shown in the *graph* below. The voltage supply in the circuit is 230 V. *a*) What is the resistance of an incandescent lamp at its rated voltage? *b*) What is the resistance of the filaments of lamps A and B in the open position of the switch? *c*) What is the resistance of the filaments after the switch is closed? *d*) How much power is dissipated by each incandescent lamp in the above cases? **P. 5428.** Imagine that on a day of an equinox you are lying in the sand on the beach of an equatorial country and observe the sunset. The sea is very smooth, the sky is clear blue, and at the moment when the last ray of the Sun disappears over the horizon, you suddenly stand up, so you can see the Sun's upper rim again. Estimate how long it takes for the Sun after you stand up to disappear again. **P. 5429.** An electric car accelerates uniformly from rest and reaches a speed of 108 km/h in 10 s. The radius of its wheels is 0.4 m, on the wheel there is a decorating ring of radius 0.2 m. How much time elapses from the start of the car until this narrow decorating ring will have a point which does not accelerate? What is the speed of the car at this moment? **P. 5430.** "Intensive meat production" is often cited as one of the causes of climate change. A single cow emits 160-320 litres of methane per day. There are one billion cattle in global livestock production. Estimate the thickness of the methane layer that would be formed on the surface of the Earth. (Consider the Earth as a sphere of radius 6370 km.) **P. 5431.** The rotational inertia of a spherical, uniform-density solid body of radius 10 cm with respect to a certain axis t is 10% greater than the minimum possible rotational of inertia of the sphere. How far is the axis t from the centre of the sphere? **P. 5432.** Three isolating beads having the same mass and given the same charge are stringed to a thin insulating stick fixed in a vertical position. The bottom bead is fixed and the above two beads are free to slide on the stick. At equilibrium, how many times further is the top bead from the middle bead than the middle bead from the bottom bead? **P. 5433.** The three vertical sides of a cuboid-shaped aquarium filled with water, with negligible wall thickness, reflect the light from the water. The aquarium has a width of $d = 50$ cm and a length of $L = 120$ cm. A horizontal laser beam is incident on the shorter side of the aquarium at a certain angle of incidence. The *figure* shows the top view. (The refraction index of water is $n = 4/3$.) The light beam – after being reflected several times – emerges from the aquarium parallel to the original incident light beam. At most how many reflections could occur? **P. 5434.** The electromotive force of the voltage supply shown in the *figure* increases linearly in time after switching on, from an initial value of 0 volts; $U(t) = U_0 \frac{t}{t_0}$. The switch K can be closed at any moment to connect the voltage source to the circuit. After the voltage source is turned on, how much time should elapse till the switch is closed so that the current flowing through the resistor also increases linearly in time? At what rate does the current increase then? **P. 5435.** A tube has an internal radius of R, and its axis makes an angle of α with the horizontal. The tube is rotated at a constant angular speed of ω about its axis. A small point-like body is inserted into the tube. The coefficient of kinetic friction between the wall of the tube and the small body is μ ($\mu > \operatorname{tg}\alpha$). We find that after a sufficiently long time the small body undergoes uniform straight line motion. What is the speed of the motion?