Ezek szerint fennáll:

$$\frac{27{,}32+n}{365{,}26}=\frac{n}{27{,}32},$$

és ennek az egyenletnek a megoldása:

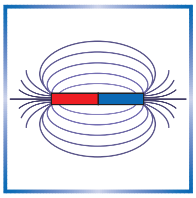
$$n=2{,}21\approx 2.$$

Tehát valóban kb. két nappal több idő telik el két holdtölte között, mint amennyi a Hold keringési ideje.

Fehérvári Donát (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Egyszerűsített – akár fejben is elvégezhető – számítás a következő. A Föld keringési ideje 12 hónap, a Holdé ennek kb. $\frac{1}{12}$-ed része, közelítőleg 1 hónap („holdnap"). A Hold tehát az állócsillagokhoz viszonyított keringési idejéhez képest annak még kb. $\frac{1}{12}$-ed része, vagyis hozzávetőlegesen 2 nappal később kerül ismét a Nap–Föld egyenesre.

12 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1 pont) 1, hibás 2, nem versenyszerű 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5392. *Egy szökőkút középső nyílásán függőlegesen kiáramló vékony vízsugár H magasságig jut el. A vízsugár „vízhozama", azaz az időegységenként kiáramló víz térfogata: $\Phi=\frac{\Delta V}{\Delta t}$. Milyen h magasságban lebeg egy m tömegű labda, ha a vízsugárba helyezzük? (Feltételezhetjük, hogy a vízsugár teljes keresztmetszete eléri a labdát, és arról vízszintes irányban spriccel szét.)*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. A vízsugár bármelyik keresztmetszetén Δt idő alatt $\Delta V=\Phi\Delta t$ térfogatú, tehát $\rho\Phi\Delta t$ tömegű víz áramlik át (ρ a víz sűrűsége). Ennyi víznek $\Delta p=\rho\Phi\Delta t\cdot v$ nagyságú, függőlegesnek tekinthető impulzusa van, ahol v az áramló víz sebessége az adott magasságban. A labdának csapódó vízsugár függőleges irányú impulzusa Δt idő alatt nullára csökken, tehát – Newton 2. törvénye szerint – a víz

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\rho\Phi v$$

erőt fejt ki a labdára.

Tudjuk, hogy a nyíláson kiáramló, valamekkora M tömegű víz kezdeti v_0 sebessége és a maximális H emelkedési magassága közötti összefüggés az energiamegmaradás törvénye szerint

$$M\frac{v_0^2}{2}=MgH,\quad \text{azaz}\quad v_0=\sqrt{2gH}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy h magasságban a víz sebessége:

$$v(h) = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Ahhoz, hogy az m tömegű labda lebegjen, a rá ható erők eredőjének nullának kell lennie:

$$\rho\Phi\sqrt{2g(H-h)} = mg,$$

ahonnan a lebegés magassága:

$$h = H - \frac{m^2 g}{2\rho^2\Phi^2}.$$

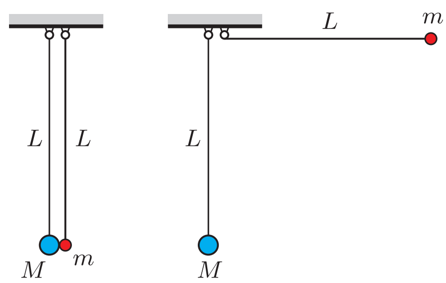
A fenti egyenlet azt is megmondja, hogy legfeljebb mekkora tömegű labdát lehet lebegtetni. Nyilván $h > 0$, vagyis

$$m < m_{\max} = \rho\Phi\sqrt{2H/g}.$$

Csillingek csapat:
Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) és
Csilling Katalin (Budapest, Szilágyi E. Gimn., 12. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5393. *Egy m tömegű és egy $M = 3m$ tömegű, kicsiny golyóhoz fonalakat erősítünk, melyek másik végét a* bal oldali ábra *szerint azonos magasságban rögzítjük. A golyók középpontja ekkor a felfüggesztés alatt L mélységben van. A kisebb tömegű golyót felemeljük úgy, hogy a hozzá kapcsolódó fonál vízszintes legyen* (jobb oldali ábra), *majd a golyót elengedjük. A két golyó tökéletesen rugalmasan és egyenesen ütközik.*



a) Az ütközés előtti pillanatban mekkora együttes erővel terheli a két fonál a felfüggesztést?

b) Mekkora a terhelés az ütközés utáni pillanatban?

c) Az első és a második ütközés között mekkora a két fonál által bezárt legnagyobb szög?

d) A c) esetben mekkora nagyságú, és milyen irányú az együttes terhelés?

e) Mekkora szöget zárnak be a fonalak a függőlegessel, amikor bekövetkezik a második ütközés?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. *a*) Az M tömegű testre ható fonálerő legyen K_1, az m tömegűre ható erő pedig K_2. Tudjuk, hogy az ütközés előtti pillanatban az M tömegű golyó sebessége $v_1 = 0$, a másik golyó sebessége pedig (az energiamegmaradás törvénye szerint) $v_2 = \sqrt{2gL}$.

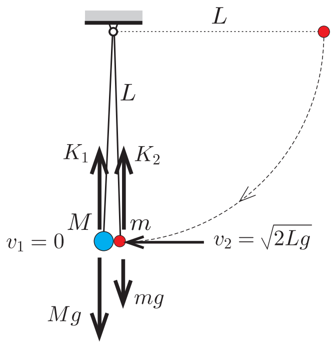
Az ütközés előtti pillanatban a nagyobb tömegű test gyorsulása nulla, a kisebb tömegű test (centripetális) gyorsulása pedig v_2^2/L (*1. ábra*). Newton II. törvénye szerint a golyók mozgásegyenlete:

$$K_1 - Mg = 0, \quad \text{illetve} \quad K_2 - mg = m\frac{v_2^2}{L},$$

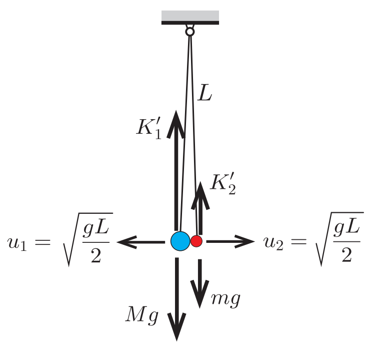
ahonnan a fonálerők:

$$K_1 = K_2 = 3mg.$$

A felfüggesztési pontot ebben a pillanatban $K_1 + K_2 = 6mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló erő terheli.



1. ábra



2. ábra

b) Írjuk fel a tökéletesen rugalmas ütközésre az energia- és a lendületmegmaradás törvényét! Ha az ütközés utáni sebességeket u_1-gyel és u_2-vel jelöljük (és a *2. ábrának* megfelelően az ütközési ponttól távolodó irányban tekintjük ezeket pozitívnak), a megmaradási törvények szerint

$$mv_2 = Mu_1 - mu_2, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mu_2^2 + \frac{1}{2}Mu_1^2.$$

Behelyettesítve az ismert adatokat, majd m-mel egyszerűsítve ezt kapjuk:

$$\sqrt{2gL} = 3u_1 - u_2, \qquad 2gL = u_2^2 + 3u_1^2.$$

Innen u_2-t kiküszöbölve a

$$12u_1^2 - 6u_1\sqrt{2gL} = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Mivel nyilván $u_1 \neq 0$, az egyenlet megoldása:

$$u_1 = u_2 = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

A két golyó tehát az ütközés után azonos nagyságú, de ellentétes irányú sebességgel fog elindulni.

Az ütközés utáni pillanatban fellépő (K_1'-vel és K_2'-vel jelölt) fonálerőket ismét Newton II. törvényéből kaphatjuk meg:

$$K_2' - mg = m\frac{u_2^2}{L} = m\frac{gL}{2}\frac{1}{L},$$

$$K_2' = \frac{3}{2}mg,$$

és hasonlóképp:

$$K_1' - Mg = M\frac{u_1^2}{L} = M\frac{gL}{2}\frac{1}{L},$$

tehát

$$K_1' = \frac{3}{2}Mg = \frac{9}{2}mg.$$

Mivel mindkét fonálerő függőleges, ezért a felfüggesztési pontnál ható (függőlegesen lefelé irányuló) terhelés:

$$K_1' + K_2' = 6mg.$$

Megjegyzés. Az ütközés során mindkét fonálerő nagysága hirtelen véges értékkel megváltozik, az összegük azonban ugyanakkora marad, mint amennyi az ütközés előtt volt.

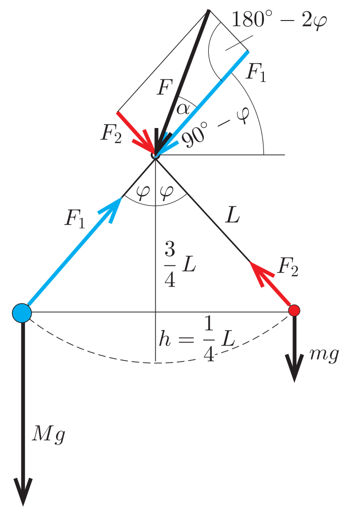
c) Mivel a két test ütközés utáni kezdősebességének nagysága megegyezik, valamint minden helyzetben a gyorsulásuk is egyforma nagyságú, ezért azonos idő alatt mindkét golyó ugyanolyan magasra fog eljutni. Az emelkedés h magasságát az energiamegmaradásból könnyen megkaphatjuk:

$$mgh = \frac{m}{2}\frac{u_2^2}{L} = \frac{1}{4}mgL,$$

vagyis $h = L/4$.

Jelöljük a fonalaknak a függőlegessel bezárt legnagyobb szögét φ-vel. A *3. ábráról* leolvashatjuk, hogy

$$\cos\varphi = \frac{L - \frac{1}{4}L}{L} = \frac{3}{4},$$



3. ábra

azaz $\varphi = 41{,}4°$, és így a két fonál által bezárt legnagyobb szög: $2\varphi = 82{,}8°$.

d) Legyen a fonalakat feszítő erő a fonalak szélső helyzetében F_1 és F_2. Ebben a helyzetben mindkét golyó pillanatnyi sebessége nulla, tehát a fonálirányú (centripetális) gyorsulásuk is nulla kell hogy legyen. Ezek szerint mindkét testre igaz, hogy az eredő erő fonálirányú komponense nulla, vagyis a fonálerő a nehézségi erő fonálirányú komponensével egyenlő:

$$F_1 = Mg\cos\varphi = \frac{3}{4}Mg = \frac{9}{4}mg,$$

$$F_2 = mg\cos\varphi = \frac{3}{4}mg.$$

A felfüggesztési pontban ható eredő erő a koszinusztétel szerint

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - 2\varphi) =$$

$$= \frac{45}{8}m^2g^2 + \frac{27}{8}m^2g^2\cos(2\varphi) = \frac{45}{8}m^2g^2 + \frac{27}{8}m^2g^2(2\cos^2\varphi - 1) = \frac{387}{64}m^2g^2,$$

vagyis

$$F = \frac{3\sqrt{43}}{8}mg \approx 2{,}46\,mg.$$

Az együttes terhelőerő irányát a szinusztétel segítségével számíthatjuk ki. A 3. ábráról leolvasható, hogy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{F_2}{F} = \frac{2}{\sqrt{43}},$$

ahonnan

$$\sin\alpha = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{43}} \approx 0{,}303, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha \approx 17{,}6^\circ.$$

A felfüggesztési pontnál ható terhelőerő tehát a vízszintessel $90^\circ - \varphi + \alpha = 66{,}2^\circ$-os szöget zár be.

e) A fonalak mozgása nem függ a rajtuk lévő tömegek nagyságától, ezért a második ütközés akkor fog bekövetkezni, amikor mindkét fonál épp függőleges.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

42 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 8, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5397. *Egy* $Q = 10^{-9}$ C *töltésű kicsiny testet egy nagy méretű, földelt fémlemeztől* $d = 10$ cm *távolságban szigetelő állványon rögzítettünk.*

a) *Mekkora a fémlemez felületi töltéssűrűsége a kicsiny testhez legközelebb eső* P *pontjában?*

b) *Milyen messze van* P*-től az a pont, ahol a fémlemez felületi töltéssűrűsége a maximális értéknek egyharmada?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

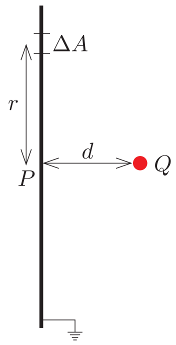
Megoldás. A Q pozitív töltés negatív töltéseket vonz a földelt fémlemezre. A töltés és a fémlemez elektromos mezője, a fémlemez azon oldalán, ahol a Q töltés is van, ugyanolyan, mintha a lemez másik oldalán, attól d távolságban lenne egy $-Q$ „tükörtöltés", és nem lenne ott a fémlemez.

Tekintsünk egy, a P ponttól r távolságban lévő kicsiny, ΔA nagyságú felületdarabkát a fémlemez síkjában (*1. ábra*). Erre a kis felületre alkalmazva a Gauss-féle fluxustörvényt:

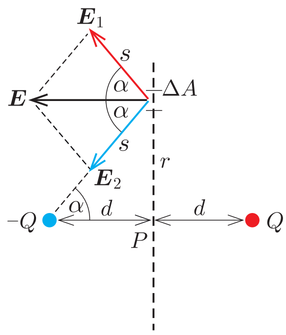
$$\frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0}\Delta A = -E(r)\Delta A,$$

ahol $E(r)$ az eredő (a fémfelületre merőleges irányú) elektromos térerősség nagysága a kérdéses pontban, $\sigma(r)$ pedig az egységnyi felületre jutó elektromos töltés, vagyis a fémlemez felületi töltéssűrűsége. Eszerint a keresett (negatív) töltéssűrűség:

$$\sigma(r) = -\varepsilon_0 E(r).$$



1. ábra



2. ábra

A két töltés elektromos térerősségének nagysága a kis felületdarabnál:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{s^2},$$

ahol s a vizsgált felületdarabkának a Q töltéstől, illetve a $-Q$ tükörtöltéstől mért távolsága (*2. ábra*).

Az eredő $\boldsymbol{E}$ térerősséget a töltés és a tükörtöltés elektromos terének szuperpozíciójából kaphatjuk meg. Ennek nagysága:

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{s^2}\cos\alpha,$$

ahol $\cos\alpha = d/s$ és $s = \sqrt{d^2 + r^2}$. Így tehát a fémlemez töltéssűrűsége: a P ponttól r távolságban

$$\sigma(r) = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(d^2 + r^2)^{3/2}}.$$

a) A P pontban

$$\sigma(r=0) = -\frac{Q}{2\pi d^2} = 1{,}59 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ez a töltéssűrűség maximális értéke.

b) Ha a P ponttól x távolságban a felületi töltéssűrűség a legnagyobb érték harmada, akkor

$$\sigma(x) = -\frac{Q}{2\pi}\,\frac{d}{\left(d^2+x^2\right)^{3/2}} = -\frac{Q}{6\pi d^2}$$

teljesül. Innen a kérdéses távolság

$$x = d\sqrt{3^{2/3}-1} = 0{,}104\ \mathrm{m}.$$

Dóra Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 12. évf.)

20 dolgozat érkezett. Helyes Dóra Márton, Gábriel Tamás, Schmercz Blanka és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 9 dolgozat.

P. 5398. *Digitális fényképezőgépen* 35 mm *gyújtótávolságú objektív található, melynek közelpontja* 25 cm. *A közelpont az a szenzortól mért legkisebb távolság, ahonnan az objektív még képes fókuszálni.*

a) Hogyan változik meg a közelpont távolsága, ha az objektív és a fényképezőgép közé egy közgyűrűt helyezünk, melynek hatására az objektív 12 mm-*rel messzebbre kerül a szenzortól?*

b) Készítsünk egy közelpontba helyezett tárgyról felvételt közgyűrűvel és anélkül. Hogyan aránylik egymáshoz ezen két kép nagysága?

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. Ismerjük, hogy az objektív fókusztávolsága: $f=3{,}5$ cm, a közelpont távolsága a szenzortól: $\ell=25$ cm és a közgyűrű vastagsága: $d=1{,}2$ cm.

a) A feladat szövege szerint a közelpontban lévő tárgyról az objektív még éppen képes éles képet alkotni, vagyis a szokásos jelölésekkel

$$\ell = t + k.$$

A leképzési törvényből:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ell - t}.$$

Ez t-re nézve másodfokú egyenlet:

$$t^2 - \ell t + \ell f = 0,$$

amelynek megoldása

$$t_1 = 20{,}8\ \mathrm{cm}, \qquad \text{illetve} \qquad t_2 = 4{,}2\ \mathrm{cm}.$$

Esetünkben fizikai értelme a nagyobb ($t=t_1$) gyöknek van, hiszen a leképezéskor $t>2f=7$ cm esetben kapunk – a fényképezőgépektől elvárható módon – kicsinyített képet. A képtávolság: $k=\ell-t_1=4{,}2$ cm.

A közgyűrű behelyezése után a képtávolság a korábbi esethez képest d-vel nő, vagyis $k'=k+d=5{,}4$ cm lesz, és az ehhez tartozó tárgytávolság: $t'=9{,}9$ cm.

A keresett közelponttávolság tehát a közgyűrű behelyezése után

$$\ell'=t'+k'=15{,}3 \text{ cm}.$$

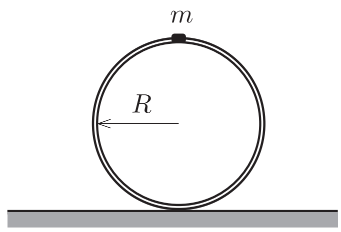
b) Közgyűrű nélkül egy T nagyságú tárgy képének mérete: $K_1=T\frac{k}{t}$, közgyűrűvel pedig $K_2=T\frac{k'}{t'}$. A keresett arány tehát

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{k't}{t'k}=\frac{5{,}4\cdot 20{,}8}{9{,}9\cdot 4{,}2}\approx 2{,}7.$$

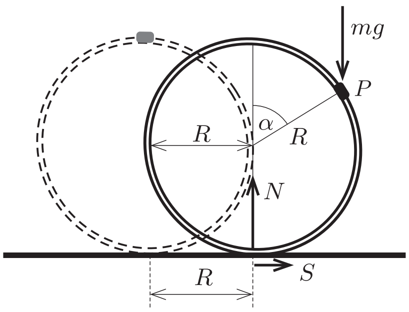
Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes Gábriel Tamás, Kertész Balázs, Kürti Gergely, Toronyi András és Téglás Panna megoldása. Hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

P. 5402. *Egy R sugarú, elhanyagolható tömegű, vékony hengeres abroncsra egy m tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. Az abroncs az* ábrán *látható labilis egyensúlyi helyzetéből kimozdul, és akkor csúszik meg a talajon, amikor középpontjának elmozdulása éppen R. Mekkora a tapadási súrlódási együttható az abroncs és a vízszintes talaj között?*



(*5 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő



Megoldás. Mivel az abroncs tisztán gördül, mialatt a talajon megtesz R távolságot, a geometriai középpontjának elmozdulása is ugyanennyi, így a szögelfordulása (lásd az *ábrát*)

$$\alpha=1 \text{ rad}\approx 57{,}3^\circ.$$

Jelöljük a talaj által az abroncsra kifejtett vízszintes súrlódási erőt S-sel, a függőleges nyomóerőt pedig N-nel. Tiszta gördülés esetén

$$S\leqslant \mu_0 N$$

(ahol μ_0 a kérdezett tapadási súrlódási együttható), és a megcsúszás pillanatában

$$S=\mu_0 N.$$

Mivel az abroncs tömege (és így a tehetetlenségi nyomatéka is) elhanyagolható, a rendszer tömegközéppontja mindig az m tömegű test pillanatnyi helyzeténél, a P pontnál lesz. A nehezék pontszerűnek tekinthető, így a tehetetlenségi nyomatéka nullának vehető.

A forgómozgás alapegyenlete szerint az abroncsra és a nehezékre ható külső erők eredő forgatónyomatéka a P pontra:

$$\sum M = \Theta_P \, \beta = 0,$$

$$\sum M = NR\sin\alpha - SR(1+\cos\alpha) = 0.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mu_0 = \frac{S}{N} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0{,}55.$$

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., 11. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes Beke Bálint, Bencz Benedek, Dóra Márton, Kertész Balázs, Nemeskéri Dániel és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 4, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 415. A nyár melegét még kihasználva mérjük meg, hogy milyen távolságra jut el egy talajszinten lévő tömlőből indított vízsugár a vízhozamtól és szögállástól függően!

(*6 pont*) Közli: *Horváth Norbert,* Budapest

G. 785. Felhős időben vagy esik az eső, vagy nem. Mitől függ, hogy a felhőben lévő esőcseppek (vagy jégkristályok) lepotyognak a gravitáció hatására, vagy benne maradnak a felhőben?

(*3 pont*)

G. 786. Egy decemberi és egy júniusi napon, Ecuadorban, délben, védőszemüvegben arccal a Nap felé fordulunk. Mit látunk, merre mozog a Nap az égen, jobbra vagy balra?

(*3 pont*)

G. 787. Internetes kutakodással állapítsuk meg, hogy mekkora a víz esetében a legnagyobb százalékos eltérés a 0 °C és 100 °C közötti hőmérséklet-tartományban