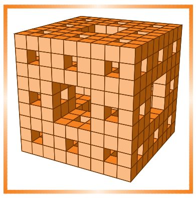


A B pontversenyben kitűzött feladatok (5254–5261.)

B. 5254. Bizonyítsuk be, hogy bármely két, 3-mal nem osztható páratlan szám négyzetének különbsége osztható 24-gyel.

(*3 pont*) (*Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok,* 1943)

B. 5255. Tükrözzük középpontosan az ABC háromszög A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, és C csúcsát A-ra, így kapjuk rendre a C_1, A_1 és B_1 pontokat. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető.

(*3 pont*)

B. 5256. András egy év mind az 52 hetében egy-egy ugyanúgy kitöltött szelvénnyel játszik az ötöslottón. Bea ellenben az év utolsó sorsolása előtt vesz 52 szelvényt, és azokat (páronként különbözőféleképpen kitöltve) egyszerre játssza meg. Igaz-e, hogy ugyanannyi esélye van Andrásnak és Beának arra, hogy legyen telitalálatos szelvényük?

(*4 pont*)

B. 5257. Az ABC hegyesszögű háromszögben a magasságok AA_1, BB_1, illetve CC_1, az AB oldal felezőpontja F. A k kör átmegy az F és a C_1 pontokon, valamint az A_1C_1 és B_1C_1 szakaszok C_1-en túli meghosszabbítását a P, illetve a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy $A_1P = B_1Q$.

(*4 pont*)

B. 5258. Igaz-e, hogy minden pozitív egésznek van olyan pozitív többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege legfeljebb 2022?

(*5 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5259. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x^2 - 3y + 4 = z,$$
$$y^2 - 3z + 4 = w,$$
$$z^2 - 3w + 4 = x,$$
$$w^2 - 3x + 4 = y.$$

(*4 pont*) *Bencze Mihály* (Brassó) javaslata alapján

B. 5260. A k kör AB húrjának G és H pontjaira $AG = GH = HB = 1$. A kör egyik AB ívének felezőpontja legyen F. Az FH és FG szelők a kört másodszor a C, illetve D pontban metszik. Mutassuk meg, hogy $CD = BC^2$.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5261. Kezdő és Második a 100 csúcsú teljes gráf élein játszanak. Felváltva lépnek, Kezdő minden lépésnél egy még ki nem színezett élt pirosra, Második pedig minden lépésnél egy (még ki nem színezett) élt kékre színez. A játék akkor ér véget, ha vagy van 4 olyan csúcs, melyek között mind a 6 él piros, ekkor Kezdő nyer; vagy van 4 olyan csúcs, melyek között mind a 6 él kék, ekkor Második nyer; vagy pedig egyik sem teljesül, és nincs több beszínezhető él, ekkor az eredmény döntetlen. Kinek van nyerő stratégiája?

(*6 pont*)

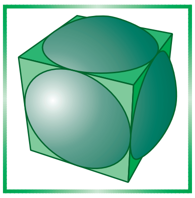
❄

Beküldési határidő: 2022. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2022. október 7-én, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A verseny helyszíneiről és lebonyolításáról szóló információkat később tesszük közzé a `https://www.bolyai.hu/versenyek-kurschak-jozsef-matematikai-tanuloverseny/` oldalon.

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (830–832.)

A. 830. Ha $H\subset\mathbb{Z}$ és $n\in\mathbb{Z}$, legyen h_n a H azon véges részhalmazainak a száma, melyekben a számok összege n. Van-e olyan $H\subset\mathbb{Z}$, melyre $0\notin H$, és minden $n\in\mathbb{Z}$-re h_n egy (véges) páros szám? (Az üres halmaz elemeinek összege 0.)

Javasolta: *Beke Csongor* (Cambridge)

A. 831. Az ABC háromszög BC oldalának F a felezőpontja. Az A-n áthaladó, BC-t F-ben érintő kör messe az AB és AC oldalakat rendre az M és N pontokban. A CM és BN szakaszok metszéspontja legyen X. A BMX és CNX háromszögek köréírt köreinek második metszéspontja legyen P. Igazoljuk, hogy A, F és P egy egyenesre illeszkednek.

A. 832. Tegyük fel, hogy minden embernek egymástól függetlenül $0,1,\dots$ vagy n gyermeke születhet, és annak a valószínűsége, hogy éppen i gyermeke születik, p_i, ahol $p_0+p_1+\ldots+p_n=1$ és $p_n\neq 0$. (Ez az ún. Galton–Watson folyamat.)