közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott feladatjavaslatai közül a legszebbeket különdíjban részesítjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 5220. *Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy megadható 1-től 2^{n+2}-ig n négyzetszám úgy, hogy közülük akárhány különbözőt összeadva (beleértve az egytagú összegeket és az összes szám összegét is) csupa különböző számot kapjunk.*[*]

(*6 pont*) Javasolta: *Freud Róbert* (Budapest)

Megoldás. Legyen $a_1=1$ és tetszőleges $2\leqslant i\leqslant n$-re legyen $a_i=\lceil\sqrt{2}a_{i-1}\rceil$, ahol $\lceil a\rceil$ az a valós szám felső egészrészét jelöli, azaz azt a legkisebb egész számot, amely nem kisebb, mint a. Ekkor a rekurzívan definiált $a_1,\dots,a_n$ számok pozitív egészek és különbözőek, mert $\sqrt{2}>1$, így $a_i=\lceil\sqrt{2}a_{i-1}\rceil\geqslant\sqrt{2}a_{i-1}>a_{i-1}$. Mivel különböző számok négyzete különböző, ezért $a_1^2,\dots,a_n^2$ pontosan n darab különböző négyzetszám.

Lemma. *Az előzőekben definiált a_i számok négyzeteire igaz, hogy*

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^2<a_{k+1}^2.$$

A lemma bizonyítása. Az állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás igaz $k=1$-re, mert ekkor az összeg $a_1^2=1$, amely kisebb $a_2^2=4$-nél. Az indukciós lépésben az mondható el, hogy ha k-ra igaz az állítás, akkor $k+1$-re is, hiszen

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2=\sum_{i=1}^{k}a_i^2+a_{k+1}^2<a_{k+1}^2+a_{k+1}^2=2a_{k+1}^2=\left(\sqrt{2}a_{k+1}\right)^2\leqslant\left\lceil\sqrt{2}a_{k+1}\right\rceil^2=a_{k+2}^2.$$

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

[*] Lásd Freud Róbert cikkét a KöMaL 2022. januári számának 2. oldalán.

Rátérünk annak a bizonyítására, hogy a szóban forgó négyzetszámokból képzett összes részösszeg különböző, azaz az $a_1^2, \ldots, a_k^2$ $(1 \leqslant k \leqslant n$ egész) számok közül akárhogyan választunk ki néhányat, azok összege csakis akkor egyenlő, ha pontosan ugyanazokat a számokat választjuk ki. Most is k-ra vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás triviális $k=1$-re, hiszen az üres összegen kívül maga a_1^2 az egyetlen részösszeg. Az indukciós lépésben feltesszük, hogy az $a_1^2, \ldots, a_k^2$ számokból képzett összes részösszeg különböző; majd tekintjük az $a_1^2, \ldots, a_{k+1}^2$ számokból képzett részösszegeket. Ezek közül az a_{k+1}^2-t nem tartalmazó részösszegek nem lehetnek egyenlők, hiszen ezek az előző lépésben is részösszegek voltak, így hivatkozhatunk az indukciós feltételre. Ha két résszösszeg közül mindkettő tartalmazza a_{k+1}^2-t, akkor szintén nem lehetnek egyenlők, hiszen mindkét oldalról elhagyva a_{k+1}^2-t az előző esetet kapjuk. Tételezzük fel végül, hogy egy a_{k+1}^2-t tartalmazó és egy ezt nem tartalmazó részösszeg egyenlő, például $S_1 = S_2 + a_{k+1}^2$, amelyből S_2 nemnegativitása miatt

$$S_1 \geqslant a_{k+1}^2 \tag{1}$$

adódik. Indirekt feltevésünk szerint S_1 egy, az $a_1^2, \ldots, a_k^2$ számokból képezhető részösszegként is előáll, aminek minden tagja pozitív, így $S_1 \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i^2$, amelyre a lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$S_1 \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i^2 < a_{k+1}^2,$$

ami ellentmond (1)-nek, ezért az $a_1^2, \ldots, a_{k+1}^2$ számokból kapható részösszegek közül semelyik kettő sem lehet egyenlő. Ezzel a teljes indukció végére értünk, és $k=n$-re épp azt kaptuk, hogy a kiválasztott n négyzetszámból képzett minden részösszeg különböző.

Már csak azt kell belátnunk, hogy az $a_1^2, \ldots, a_n^2$ számok 2^{n+2}-nél kisebbek. Korábban láttuk, hogy $0 < a_1 < \cdots < a_n$, így elég azt megmutatnunk, hogy $a_n^2 < 2^{n+2}$. Először írjuk fel a_1, a_2, a_3 pontos értékét. Mivel $a_1 = 1$, ebből $a_2 = \lceil \sqrt{2} \rceil = 2$ (hiszen $1 < \sqrt{2} < 2$), ebből pedig $2\sqrt{2} > 2 \cdot 1 = 2$ miatt $a_3 = \lceil 2\sqrt{2} \rceil = 3$ (hiszen $(2\sqrt{2})^2 = 8 < 3^2$), tehát $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. A további értékeket felülről becsüljük. Mivel $a_{i+1} = \lceil \sqrt{2} a_i \rceil < \sqrt{2} a_i + 1$, ezért a $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $i \geqslant 4$-re $b_i = \sqrt{2} b_{i-1} + 1$ sorozat felülről becsüli az a_i sorozatot. Ez teljes indukcióval bizonyítható, hiszen $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2$, $a_3 \leqslant b_3$, és ha $a_i \leqslant b_i$ $(i \geqslant 4)$, akkor

$$a_{i+1} < \sqrt{2} a_i + 1 \leqslant \sqrt{2} b_i + 1 = b_{i+1}.$$

Most újabb teljes indukcióval belátjuk, hogy $i \geqslant 3$-ra

$$b_i = 3 \cdot 2^{\frac{i-3}{2}} + \sum_{j=0}^{i-4} \sqrt{2}^j.$$

Ez igaz $i=3$-ra, mert

$$b_3=3=3\cdot 2^0+0=3\cdot 2^{\frac{3-3}{2}}+\sum_{j=0}^{3-4}\sqrt{2}^j,$$

hiszen az összegzés itt egy üres összeg. Az indukciós lépésben tegyük fel, hogy egy $i\geqslant 3$-ra működik a képlet. Ekkor

$$b_{i+1}=\sqrt{2}b_i+1=\sqrt{2}\left(3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\sum_{j=0}^{i-4}\sqrt{2}^j\right)+1=$$

$$=3\cdot 2^{\frac{i-2}{2}}+\sum_{j=0}^{i-4}\sqrt{2}^{j+1}+1=3\cdot 2^{\frac{(i+1)-3}{2}}+\sum_{j=0}^{(i+1)-4}\sqrt{2}^j,$$

ahol az utolsó lépésben 1-gyel megnöveltük az összegzés j indexét, az 1 pedig az összeg első tagja lett (ekkor $j=0$). Ezzel igazoltuk, hogy a képlet működik.

A képletben szereplő szumma tagjai egy olyan mértani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 1, hányadosa $\sqrt{2}$, így alkalmazhatjuk az összegképletet $i\geqslant 3$-ra:

$$b_i=3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{\sqrt{2}^{i-3}-1}{\sqrt{2}-1}=3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{2^{\frac{i-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}.$$

Tudjuk, hogy b_i felülről becsüli a_i-t, ezért

$$a_i\leqslant 3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{2^{\frac{i-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1},$$

és mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelve az ezzel ekvivalens

$$a_i^2\leqslant\left(3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{2^{\frac{i-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk, minden $i\geqslant 3$-ra. Nyilván $n=1$-re és $n=2$-re az állítás igaz, hiszen $a_1=1<2^3=8$ és $a_2=2<2^4=16$, $n\geqslant 3$-ra pedig használhatjuk a fenti felső becslést $i=n$-t behelyettesítve. Ebből

$$a_n^2\leqslant\left(3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}}+\frac{2^{\frac{n-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2. \tag{2}$$

Már csak be kell látnunk, hogy a jobb oldal nem nagyobb 2^{n+2}-nél, amelyhez tekintjük a hányadosukat és átalakítjuk a következőképpen:

$$\frac{\left(3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}}+\frac{2^{\frac{n-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2}{2^{n+2}}=\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}}+\frac{2^{\frac{n-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}}{2^{\frac{n+2}{2}}}\right)^2=$$

$$= \left(3\cdot 2^{-\frac{5}{2}} + \frac{2^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 < \left(3\cdot 2^{-\frac{5}{2}} + \frac{2^{-\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 \approx 0{,}9571^2 < 1.$$

Láthatjuk, hogy a tört értéke 1-nél kisebb, és mivel a számlálója és a nevezője is pozitív, a számláló biztosan kisebb a nevezőnél; tehát

$$\left(3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}} + \frac{2^{\frac{n-3}{2}} - 1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 < 2^{n+2},$$

amit (2)-vel összevetve

$$a_n^2 < 2^{n+2}$$

adódik. Ezzel a bizonyítás utolsó lépését is befejeztük.

Duchon Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bényei Borisz, Chrobák Gergő, Duchon Márton, Kalocsai Zoltán, Sági Mihály és Varga Boldizsár. 5 pontos 3, 4 pontos 4 dolgozat. 3 pontot 2, 2 pontot 1, 0 pontot 2 versenyző kapott.

B. 5231. *Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre teljesül, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\cdot(2^k-1).$$

(*4 pont*)

I. megoldás. A feladat állításában szereplő egyenlőség mindkét oldalát átalakítjuk. Nézzük először a bal oldalt, ahol többször is felhasználjuk a mértani sorozat összegképletéből adódó $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$ egyenlőséget ($n\in\mathbb{Z}^+$):

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = 1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + \ldots + n\cdot 2^{n-1} =$$
$$= (2^0+2^1+\ldots+2^{n-1}) + (2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}) + \ldots + (2^{n-1}) =$$
$$= (2^n-1) + (2^n-1-2^0) + (2^n-1-2^0-2^1) + \ldots +$$
$$+ \big(2^n-1-(2^0+\ldots+2^{n-2})\big) =$$
$$= n\cdot 2^n - \big(1+(1+2^0)+(1+2^0+2^1)+\ldots+(1+2^0+2^1+\ldots+2^{n-2})\big) =$$
$$= n\cdot 2^n - (2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}) = n\cdot 2^n - (2^n-1) = n\cdot 2^n - 2^n + 1.$$

Most a jobb oldalon szereplő összegben bontjuk fel a zárójelet:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\cdot(2^k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2^n-2^{n-k});$$

látjuk, hogy a 2^n tagban nem szerepel k, vagyis az a tag csak n-től függ, és pontosan n-szer szerepel az összegben, ezért

$$\sum_{k=1}^{n}(2^n-2^{n-k})=\sum_{k=1}^{n}2^n-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}=n\cdot 2^n-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}.$$

Az utolsó tagként szereplő összeget kibontjuk, így azt kapjuk, hogy

$$n\cdot 2^n-(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^0)=n\cdot 2^n-(2^n-1)=n\cdot 2^n-2^n+1.$$

Megmutattuk, hogy a feladatban szereplő egyenlőség mindkét oldalának értéke

$$n\cdot 2^n-2^n+1,$$

tehát egyenlők. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n=1$-re helyes, hiszen $1\cdot 2^0=1=2^0(2^1-1)$. Tegyük fel, hogy valamely $n=i$ pozitív számra igaz az állítás, majd bontsuk ki az összegzéseket:

$$\sum_{k=1}^{i}k\cdot 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{i}2^{i-k}\cdot(2^k-1),$$

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+i\cdot 2^{i-1}=2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1).$$

Felírjuk az állítást $(i+1)$-re, majd a jobb oldalon az utolsó kivételével minden tagból kiemelünk 2-t:

$$\begin{aligned}1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+i\cdot 2^{i-1}+(i+1)2^i&=\\ =2^i(2^1-1)+2^{i-1}(2^2-1)+\ldots+2^1(2^i-1)&+2^0(2^{i+1}-1),\\ 1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+i\cdot 2^{i-1}+(i+1)2^i&=\\ =2\big(2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1)\big)&+2^0(2^{i+1}-1).\end{aligned}$$

Most a bal oldalon alkalmazzuk az indukciós feltevést, majd vonjunk ki mindkét oldalból $\big(2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1)\big)$-t, így azt kapjuk, hogy

$$(i+1)\cdot 2^i=2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1)+2^0(2^{i+1}-1).$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$i\cdot 2^i+2^i=i\cdot 2^i-(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+2+1)+2^{i+1}-1,$$

rendezzük, majd a zárójelben lévő mértani sorozat első i tagjának összegét számítsuk ki az összegképlet segítségével:

$$2^i=-\left(\frac{2^i-1}{2-1}\right)+2^{i+1}-1.$$

Ebből rendezés után a $2^i + 2^i = 2^{i+1}$ egyenlethez jutunk, abból pedig a $2 \cdot 2^i = 2^{i+1}$ azonossághoz; tehát a bizonyítandó állítás minden pozitív egész n-re teljesül.

Szittyai Anna (Szeged, Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás (Ez olvasható a honlapon*). Tekintsük az alábbi, $n \times n$-es táblázatot (a táblázat i. sorának j. eleme 2^{j-1}, ha $i \leqslant j$, egyébként 0).

$$\begin{matrix}
1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
0 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
0 & 0 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2^{n-1}
\end{matrix}$$

A bizonyítandó egyenlet mindkét oldalán a táblázatban szereplő számok összege áll:

- A $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ összegben oszloponként adjuk össze a számokat, a k-adik oszlopban éppen $k \cdot 2^{k-1}$ a számok összege.
- A $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1)$ összegben soronként adjuk össze a számokat, hiszen az $(n-k+1)$-edik, azaz alulról k-adik sorban a számok összege éppen
$$2^{n-k} + \dots + 2^{n-1} = 2^{n-k} \cdot (1 + \dots + 2^{k-1}) = 2^{n-k} \cdot (2^k - 1).$$

Megjegyzés. Érdemes elmesélni, hogy miként született ez a feladat.

Képzeljük el, hogy 2^n különböző magasságú embert szeretnénk tornasorba állítani kevés összehasonlítással (egy összehasonlítással két embert tudunk összehasonlítani).

Egy lehetőség, hogy egyenként „illesztjük be” az embereket a tornasorba. Ha $t-1$ embert már sorba rendeztünk, akkor a t. ember helyét bináris kereséssel meg tudjuk találni a tornasorban $\lceil \log_2(t) \rceil$ összehasonlítással, a legszerencsétlenebb esetben is. Ezzel a módszerrel a legszerencsétlenebb esetben éppen $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ összehasonlításra lesz szükségünk a 2^n ember tornasorának felállításához (hiszen éppen 2^{k-1} különböző olyan t érték van, amelyre $\lceil \log_2(t) \rceil = k$).

Egy másik lehetőség, hogy először 2^{n-1} diszjunkt párt összehasonlítunk, aztán kétkét párt összefésülünk egy-egy négyes tornasorrá, majd két-két négyest egy-egy nyolcas

* A „Pontverseny” menüpont „Feladatok” részében mindig az aktuális tanév, míg a „Korábbi évek” részben értelemszerűen az elmúlt tanévek feladatai és megoldásai találhatóak meg.

tornasorrá, és így tovább. Így 2^{n-k} alkalommal fogunk két 2^{k-1} méretű tornasort összefésülni. Könnyen meggondolható, hogy két s tagú tornasor összefésüléséhez – a legrosszabb esetben – $2s-1$ összehasonlítás szükséges. Tehát ezzel a módszerrel a legszerencsétlenebb esetben $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\cdot(2^k-1)$ összehasonlításra lesz szükségünk.

A feladat kitűzője rendezési algoritmusokat tanított matekórán, amikor kíváncsiságból összehasonlította $n=7$ esetén a két módszer lépésszámát. Meglepve tapasztalta, hogy mindkét esetben éppen 769-et kapott eredményül – jobban belegondolva kiderült, hogy ez nem egy véletlen egybeesés.

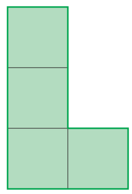
Összesen 91 dolgozat érkezett. 4 pontot 90, 3 pontot 1 versenyző kapott.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (729–733.)

K. 729. 2022 perc múlva éjfélt fog ütni a győri városháza toronyórája. Mekkora szöget zár be most a toronyóra kis- és nagymutatója?

K. 730. Behúztuk egy kör nyolc húrját úgy, hogy a húrok metszéspontjainak száma a lehető legtöbb legyen. Hány részre bontja ekkor ez a nyolc húr a körlapot?

K. 731. Egy 4×6-os téglalapot szeretnénk egyrétűen lefedni az *ábrán* látható L-alakú lappal egybevágó lapokkal. Az L-alakú lapokat tetszés szerint elforgathatjuk, illetve megfordíthatjuk. Van-e legalább 36 különböző lefedés?



K/C. 732. Négy matematikatanár egyike sem idősebb 70 évesnél és mindegyikük életkora években számítva prímszám. Hány éves a legfiatalabb, ha átlagéletkoruk 60 év, és nincsenek közöttük egykorúak?

K/C. 733. Mekkora a területe annak a legkisebb téglalapnak, amelybe beleírható egy olyan paralelogramma, amelynek egyik szöge 60°, egy-egy oldala 4 cm és 6 cm hosszú és két oldala a téglalap két oldalára illeszkedik?

❄

Beküldési határidő: 2022. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄