Négyszín-sejtés I: A sejtés születése és egy bizonyítási kísérlet*

Francis Guthrie, egy londoni diák, 1852-ben Anglia megyéinek térképét nézegetve rájött, hogy ki tudja színezni a megyéket 4 színnel úgy, hogy szomszédos megyék sehol se kapjanak azonos színt. Meglepte, hogy egy ilyen sok megyéből álló, látszólag teljesen szabálytalan térképet ilyen kevés színnel ki lehet színezni. Ezért azt kezdte sejteni, hogy ez egy általános tulajdonság lehet, és talán minden térképet ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy szomszédos tartományok ne kapjanak azonos színt. Miután nem sikerült bebizonyítania, hogy így lenne, de olyan térképet sem sikerült rajzolnia, ahol több, mint 4 színre lenne szükség, írt öccsének, *Frederiknek,* aki ekkoriban a University College Londonban tanult matematikát. Frederik is érdekesnek találta a sejtést, viszont neki sem sikerült sem bizonyítást, sem ellenpéldát találnia. Ezért elmondta a kérdést tanárának, a neves matematikus *Augustus De Morgannek.* De Morgan hasonlóan járt, a kérdést nagyon izgalmasnak találta, megoldani azonban nem tudta, ezért feltette a kérdést további matematikus ismerőseinek. Így indult útjára a híres négyszín-sejtés, melyet végül 1976-ban sikerült bebizonyítania *Appelnek* és *Hakennek,* de a bizonyításuk annyiban szokatlan volt, hogy rengeteg esetet számítógéppel kellett leellenőrizni, tehát nem egy emberi ésszel könnyen átlátható bizonyításról volt szó. Később *Robertson, Sanders, Seymour* és *Thomas* adott egy bizonyítást, amiben kevesebb esetet kell számítógéppel ellenőrizni, de még az ő bizonyításukhoz is szükség van a számítógépre. „Rövid" bizonyítás azóta sem ismert a tételre. A sejtés felvetése és bizonyítása között eltelt több, mint 120 év alatt a négyszín-sejtés végig nagyon sok embert foglalkoztatott, és a megoldására tett erőfeszítések rengeteg hasznos tudást eredményeztek. A következő cikksorozat ebből szeretne egy kis ízelítőt adni.

Az első részben bemutatjuk az első bizonyítási kísérletet a négyszín-sejtésre. Ezt *Kempe* publikálta 1879-ben. Ezután 11 évig megoldottnak hitték a négyszín-sejtést, azonban 11 év után Heawood észrevett egy hibát a bizonyításban. Sajnos az derült ki, hogy ez nem egy könnyen kijavítható hiba. Ennek ellenére a Kempe-féle bizonyítás sok hasznos ötletet szolgáltatott. Heawoodnak a Kempe-féle bizonyítást módosítva sikerült belátnia az ötszín-tételt, azaz hogy bármely térkép jól színezhető 5 színnel. Valamint a négyszín-tétel majdnem 100 évvel későbbi Appel–Haken-féle bizonyítása is épít Kempe gondolatmenetére.

Izgalmas és tanulságos feladat megkeresni a hibát Kempe érvelésében. Nézzük meg, hogyan is szól ez az érvelés.

A sejtés jelentősége. Mielőtt bemutatnánk Kempe érvelését, hadd mondjunk még pár szót arról, hogy miért érdekes a négyszín-sejtés. Hiszen nincs igazán

* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

praktikus jelentősége. Talán kicsit esztétikusabb egy térképet 4 színnel színezni, mint ha 6 színnel lenne színezve, de ha csak az a célunk, hogy a megyéket jól el tudjuk különíteni egymástól, valójában 6 szín is ugyanolyan jó, mint 4. Hogy mégis 120 év matematikusai lelkesedtek a kérdés iránt, az azért van, mert ez egy meglepő jelenség, aminek nem értjük az okát. Ha pedig valami meglepő dolog igaz, akkor az ember azt feltételezi, hogy az annak a hátterében álló törvényszerűséget megértve sokkal jobban fogjuk érteni a világot, és ez sok más jelenség megértésében is segíteni fog.

Megjegyezzük, hogy bár a térképek színezése nem egy gyakorlatban érdekes kérdés, sok praktikusan érdekes problémát le lehet fordítani általánosabb színezési kérdésekre.

Fogalmazzuk át a kérdést, hogy megszabaduljunk a fölösleges adatoktól. Először is, fogalmazzuk át egy kicsit a négyszín-sejtést. A színezés szempontjából nyilván mindegy, hogy egy megyének pontosan milyen az alakja, csak az a fontos, hogy mely más megyékkel szomszédos. Így elég, ha csak a szomszédsági viszonyokat jegyezzük meg. Azaz rajzoljunk minden megyére egy pontot (például a megyeszékhelyre), és kössük össze a szomszédos megyék székhelyeit az őket elválasztó határon keresztül. Így egy gráfot kapunk. Mégpedig egy elég speciális gráfot: a csúcsai egy síkra vannak rajzolva, az élei pedig nem metszik egymást. Az ilyen gráfokat síkgráfoknak nevezzük. Mindig fel fogjuk azt is tenni, hogy nincs hurokél, azaz egy él két végpontja mindig különböző. (A térképekből kapott gráfokra ez nyilván igaz.) A térkép színezését úgy lehet lefordítani a gráf nyelvére, hogy a síkgráf csúcsait szeretnénk színezni úgy, hogy éllel összekötött csúcsok különböző színt kapnak. Az ilyen színezéseket innentől jó színezéseknek nevezzük. Azt is meg lehet gondolni, hogy a síkgráfok színezése nem általánosabb feladat a térképek színezésénél, mert minden hurokélmentes síkgráfhoz lehet rajzolni egy térképet, ahol pontosan azok a megyék lesznek szomszédosak, amelyeknek megfelelő csúcsok össze voltak kötve. (Vigyázat, egy ponton érintkező megyéket nem tekintünk szomszédosnak.)

Tehát a négyszín-sejtés azt mondja ki, hogy egy (hurokélmentes) síkgráf pontjainak létezik 4 színnel jó színezése.

Megjegyezzük, hogy a síkgráfok elég speciális gráfok. Egy általános gráf csúcsainak jó színezéséhez tetszőlegesen sok színre lehet szükségünk. Ha például veszünk n csúcsot, és mindegyik csúcsot összekötjük az összes többivel, akkor kénytelenek vagyunk n színt használni egy jó színezéshez. De egy ilyen gráf $n>4$ esetén persze nem rajzolható le a síkra úgy, hogy az élek ne messék egymást.

A síkgráfok néhány fontos tulajdonsága. Először lássunk be néhány dolgot a síkgráfokról. Ezek közül az első *Leonhardt Euler* híres formulája. (Ebben az alfejezetben még nem fogunk „csalni”.)

Vegyünk egy összefüggő síkgráfot. Az összefüggő itt azt jelenti, hogy minden csúcsból minden másik csúcsba el tudunk jutni a gráf élein keresztül. A csúcsok és az élek tartományokra osztják a síkot. Ezek közül lesz egy végtelen tartomány, a többi pedig korlátos. Nevezzük ezeket a tartományokat a síkgráf lapjainak (a végtelen tartományt is beleértve). A számukat jelöljük ℓ-el. Emellett jelöljük cs-vel a gráf csúcsainak számát, e-vel pedig az éleinek számát. Euler formulája azt mondja ki, hogy tetszőleges összefüggő síkgráfra $cs + \ell = e + 2$, azaz a csúcsok és lapok összszáma 2-vel nagyobb, mint az élek száma. Ezt a szép formulát sokféleképpen be lehet bizonyítani, érdemes az olvasónak önállóan megpróbálni. Azért mi is adunk itt egy bizonyítást.

Élszámra vonatkozó indukciót használunk. Az alapeset az, ha a gráfunknak nincs éle. Mivel minden csúcsból mindenhova el kell tudnunk jutni éleken keresztül, ekkor csúcsa is csak 1 lehet a gráfnak. Lap pedig szintén 1 lesz (a végtelen lap). Tehát ekkor valóban $cs + \ell = 2 = e + 2$.

Tegyük fel most, hogy $e = k > 0$, és hogy k-nál kevesebb élű összefüggő síkgráfokra már tudjuk, hogy teljesül a tétel. Vegyünk egy tetszőleges élt, mely az u és v csúcsokat köti össze. Két lehetőség van. Az él két oldalán vagy két különböző lap van, vagy pedig ugyanaz a lap (mindkettőre mutatunk egy-egy példát az *1. ábrán*). Ha az él két oldalán két különböző, L_1 és L_2 lap van, akkor az élet elhagyva is összefüggő marad a gráf. Ugyanis az uv élen való áthaladást tudjuk helyettesíteni az L_1 lap maradék ívén való áthaladással. (Ha az él két oldalán ugyanaz a lap szerepel, akkor ezt nem tudjuk megtenni, mert ilyenkor a lap határán kétszer is szerepel az uv él, így nem tudunk a maradék határon keresztül eljutni u-ból v-be.) Tehát ha az uv él két oldalán két különböző lap van, akkor hagyjuk el az élt. Ekkor az előbbiek miatt összefüggő marad a gráf, és az élszám $e - 1 = k - 1$ lesz. Az L_1 és L_2 lapok összeolvadnak egy lappá, ezért a lapok száma $\ell - 1$ lesz. A csúcsok száma nem változik. Mivel az új gráf $k - 1$ élű, erre az indukciós feltevés miatt már teljesül, hogy $cs + (\ell - 1) = (e - 1) + 2$. Vagyis valóban, $cs + \ell = e + 2$.

1. ábra. Bal oldalon: Az uv él két oldalán két különböző, L_1 és L_2 lap van. Jobb oldalon: Az uv él két oldalán azonos lap van

Azt az esetet kell még kezelnünk, ha az él két oldalán azonos lap szerepel.

Olvasszuk össze az u és v csúcsokat egy csúccsá, és töröljük ki a kiválasztott élünket. A többi u-ból vagy v-ből induló élt hagyjuk meg, csak most már az összeolvasztott csúcsból fognak indulni. Így továbbra sem fogják élek metszeni egymást. A csúcsok és az élek száma 1-gyel csökken, a lapok száma pedig változatlan. Most is $k - 1$ élű síkgráfot kaptunk, tehát az indukciós feltétel miatt $(cs - 1) + \ell = (e - 1) + 2$, azaz $cs + \ell = e + 2$. Ezzel beláttuk az Euler-formulát.

Nevezzünk egy gráfot egyszerűnek, ha bármely két csúcs között legfeljebb 1 él halad, és nincsenek hurokélek, azaz bármely él két végpontja különböző. Az Euler-formulából levezethetjük, hogy egy egyszerű síkgráfnak nincsen túl sok éle a csúcsszámához képest:

1. állítás. *Egyszerű síkgráfban $e \leqslant 3cs - 6$.*

Bizonyítás. Mivel a síkgráfunkban nincsenek hurkok és többszörös élek, ezért minden lapot legalább 3 él határol. Ha van olyan lap, amit több, mint 3 él határol, akkor húzzunk be egy átlót. Ezzel továbbra is síkgráfunk van. A csúcsok száma változatlan maradt, az élek számát pedig csak növeltük. Ezzel a módszerrel elérhetjük, hogy a síkgráf minden lapját pontosan 3 él határolja. Jelöljük ennek a kibővített gráfnak az élszámát e'-vel, a lapszámát pedig ℓ'-vel. Azt állítjuk, hogy $3\ell' = 2e'$. Valóban, ha minden lapra megszámoljuk az őt határoló éleket, akkor $3\ell'$ élt fogunk számolni. Viszont így minden élt kétszer számoltunk, a két oldala mentén. Felírva az Euler formulát, $cs + \ell' = e' + 2$. Behelyettesítve az $\ell' = \frac{2}{3}e'$ egyenlőséget, $cs = \frac{1}{3}e' + 2$, azaz $e' = 3cs - 6$. Mivel az eredeti gráfra $e \leqslant e'$, megkapjuk, hogy $e \leqslant 3cs - 6$. □

1. következmény. *Tetszőleges egyszerű síkgráfban létezik legfeljebb* 5 *fokú csúcs.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy minden fokszám legalább 6. Ekkor a fokszámok összege legalább $6cs$. Bármely gráfban a fokszámok összege az élek számának duplája, hiszen minden élt mindkét végpontjánál megszámolunk. Tehát az élek száma legalább $3cs$. Ez ellentmond az előbbi állításnak, tehát hamis volt az indirekt feltevésünk. □

Kempe érvelése

Ennyi előkészület után most már el tudjuk mondani, hogy szólt Kempe hibás bizonyítása a négyszín-sejtésre. Arra biztatjuk az olvasót, hogy próbálja meg megtalálni a hibát.

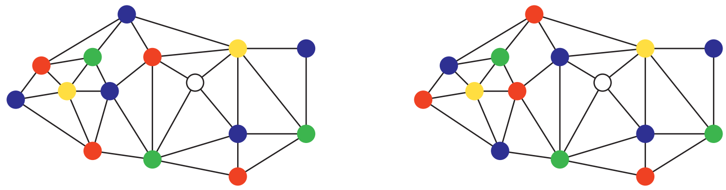
Vegyük észre, hogy elég, ha egyszerű síkgráfokat tudunk 4 színnel jól színezni. Ugyanis ha egy u és v pont között több él is fut, az ugyanúgy csak annyit jelent, hogy az u-t és a v-t nem lehet azonos színre színezni, mint ha egy él futna köztük. Tehát ha van többszörös él, akkor hagyjunk el annyi élt, hogy csak egyszeres legyen. (Ezzel nyilvánvalóan a síkbarajzoltságot sem rontjuk el.) Ha az így kapott egyszerű gráfot tudjuk 4 színnel jól színezni, akkor az eredetit is.

Egyszerű síkgráfokra csúcsszámra vonatkozó indukcióval látjuk be a tételt. Tegyük fel, hogy minden k-nál kisebb csúcsszámú egyszerű síkgráfot tudunk 4 színnel jól színezni. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor minden k csúcsú egyszerű síkgráfot is jól lehet színezni 4 színnel. Legyen G egy k csúcsú egyszerű síkgráf. az 1. következmény szerint a G gráfban van legfeljebb 5 fokú csúcs. Vegyünk egy ilyen csúcsot, és jelöljük v-vel. Töröljük a gráfból v-t és a rá illeszkedő éleket, és nevezzük a kapott gráfot $(G - v)$-nek. Ekkor továbbra is egy síkbarajzolt egyszerű gráfunk lesz, de már $k - 1$ ponttal. Tehát ezt a gráfot az indukciós feltevés szerint jól lehet színezni 4 színnel. Színezzük ki (jól) 4 színnel. Most rajzoljuk vissza a v pontot és a rá illeszkedő éleket. Kellene a v-nek is találni egy színt, ami különbözik a szomszédai színétől.

Ha v szomszédai legfeljebb 3 színt használnak a 4 szín közül, akkor v megkaphatja a negyedik színt, és készen vagyunk. Gond akkor van, ha v szomszédai mind a 4 színt használják. Ez csak akkor lehet, ha v-nek 4 vagy 5 szomszédja van. Nézzük meg alaposabban ezeket az eseteket.

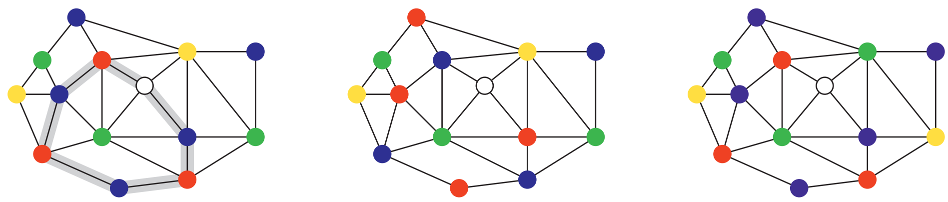
v-nek 4 szomszédja van és ezek 4 színt használnak. Tegyük fel, hogy a v szomszédai az óramutató járása szerint rendre piros, sárga, kék és zöld színűek.

Színezzük át a v csúcs piros szomszédját kékre. Ha ez $(G-v)$-nek egy jó színezése, akkor készen vagyunk, mert most már lehet a G-ben a v csúcs színe piros. Ha az új színezés nem jó, akkor a kékre átszínezett csúcsnak eredetileg volt (1 vagy több) kék szomszédja. Ezeket a csúcsokat most színezzük át pirosra. Ha ezeknek voltak további piros színű szomszédai, azokat színezzük át kékre stb. Egy példát látunk erre a *2. ábrán.* Könnyű meggondolni, hogy ezt a szabályt követve egy csúcsot legfeljebb egyszer színezünk át. Tehát egy idő után el fognak fogyni az átszínezendő csúcsaink, és kapunk egy jó színezést a $G-v$ gráfra.



2. ábra. A bal oldalon egy v csúcs kivételével jól színezett síkgráf látható. A színezetlen (fehér) v csúcs piros szomszédját kékre átszínezve, majd a szükséges további szomszédokat átszínezve a jobb oldali színezést kapjuk

Két lehetőségünk van. Ha a v szomszédai közül a kéket nem színeztük át pirosra, akkor most a v lehet piros, és készen vagyunk. A 2. ábrán például egy ilyen esetet látunk. Ha viszont v eredetileg kék szomszédját átszíneztük pirosra, akkor látszólag nem nyertünk semmit, továbbra is mind a 4 szín ott van v szomszédai között. (Egy ilyen példát látunk a *3. ábrán.*) Mit tudunk most mondani? Azért valamit így is tanultunk a gráfról: mégpedig hogy (az eredeti színezést nézve) a v csúcs piros és kék szomszédai között van egy út, amin felváltva piros és kék csúcsok vannak. Vegyük észre hogy ez az út a v-vel együtt már egy kört ad, és a v sárga szomszédja és zöld szomszédja közül az egyik a kör belsejében van, a másik pedig a külsejében. Miért hasznos nekünk ez az információ? Próbáljuk meg most ugyanezt eljátszani a sárga és zöld színekkel. Azaz a v sárga szomszédját átszínezzük zöldre. Ha az eredetileg sárga csúcsnak voltak zöld szomszédai, akkor átszínezzük őket sárgára stb. Ez az átszínezés már nem érhet véget úgy, hogy a v zöld szomszédját átszínezzük sárgára. Akkor ugyanis lenne a v sárga és zöld



3. ábra. A bal oldali színezésben a v piros szomszédját kékre átszínezve a középső színezést kapjuk. A v kék szomszédja pirosra színeződött. A piros-kék kört szürke vonallal jelöltük. A jobb oldali ábra mutatja a v sárga szomszédjának zöldre színezésével kapott színezést szomszédai között egy út, ami csak sárga és zöld csúcsokat tartalmaz. Ennek az útnak a piros-kék kör belsejéből el kellene jutnia a külsejébe, azt viszont csak úgy tudná megtenni, ha a gráf két éle metszené egymást. Mivel síkgráfról van szó, ez nem lehet. Tehát találunk egy átszínezést, ahol a v-nek nincs sárga szomszédja, azaz a v-t színezhetjük sárgára. Ezzel befejeztük az indukciós lépés bizonyítását abban az esetben ha a v-nek 4 szomszédja van.

v-nek 5 szomszédja van és ezek 4 színt használnak. Hátra van még az az eset, ha v-nek 5 szomszédja van, és ezek használják mind a 4 színt. Ekkor biztos, hogy valamelyik szín két szomszédnál van használva, a másik 3 szín pedig 1-1 szomszédnál. Tegyük fel, hogy mondjuk a kék szín szerepel kétszer (ez nyilván feltehető, hiszen ha mondjuk a sárga szín szerepel kétszer, akkor mindenütt kicserélhetjük a sárga és a kék színeket). Két lehetőség van: Vagy egymás után következik a két kék szomszéd v körül, vagy pedig nem. Ha a két kék csúcs egymás után következik, akkor ugyanazt a gondolatmenetet el lehet mondani, mint amikor v-nek 4 szomszédja volt. (Ennek ellenőrzését az olvasóra bízzuk, de megígérjük hogy a hiba nem ebben a részben van.)

Ha a két kék csúcs nem egymást követi, akkor feltehető, hogy az óramutató járása szerint így néznek ki v szomszédain a színek: kék, piros, kék, sárga, zöld. (Megint csak, ha pl. a sárga szín lenne a két kék között, akkor cseréljük ki mindenhol a sárga és a piros színeket stb.). Nevezzük is el ezeket a csúcsokat $K1$, P, $K2$, S, Z-nek. Csináljuk a következőt: Próbáljuk P-t átszínezni sárgára (majd ennek sárga szomszédait pirosra stb.). Ha S nem színeződik át pirosra, akkor v lehet piros, és készen vagyunk. Ha S átszíneződik pirosra, akkor van egy piros-sárga út P-ből S-be, ami v-vel együtt már egy kör, és ez a kör elválasztja a $K1$ és Z csúcsokat a $K2$-től. Ekkor próbáljuk meg P-t zöldre átszínezni (és szomszédait pirosra stb). Ha Z nem színeződik át pirosra akkor v megint csak lehet piros és készen vagyunk. Ha Z átszíneződik pirosra, akkor van egy felváltva piros-zöld színű út P-ből Z-be, ami v-vel együtt már egy kör, és ami elválasztja $K1$-et a $K2$ és S csúcsoktól.

Ha ez a helyzet, tehát a P csúcsot sem sárgára, sem zöldre nem sikerült átszínezni, akkor inkább hagyjuk a P csúcsot, és próbáljuk meg a kék színt szabaddá tenni. Mégpedig a $K1$ csúcsot színezzük át sárgára. Mivel a piros-zöld kör elválasztja $K1$-et S-től, ezért ha $K1$-et sárgára színezzük, akkor S nem fog átszíneződni kékre. A $K2$ csúcsot pedig színezzük át zöldre. Mivel a piros-sárga kör elválasztja a $K2$-t Z-től, ezért ekkor a Z nem fog átszíneződni kékre. Tehát a v szomszédai közül el tudtuk tüntetni a kék színt. Így most a v csúcsot kiszínezhetjük kékre. Ezzel minden esetben találtunk megfelelő színt a v csúcsnak, azaz a bizonyítással készen vagyunk.

Hol lehet a hiba? Arra biztatjuk az olvasót, hogy keresse meg a hibát a fenti érvelésben. Annyit elárulunk, hogy az utolsó esettel van a gond, tehát amikor v-nek 5 szomszédja van, és a két azonos színt kapó szomszéd nem egymás után következik v körül.

A következő részben mi is leírjuk majd, hogy hol a hiba, és hogy ha a négyszíntétel nem is jön ki, hogyan lehet mégis Kempe érvelése segítségével belátni az ötszíntételt.

Hivatkozások

[1] `https://web.stonehill.edu/compsci/LC/Four-Color/Four-color.htm`

[2] Jeremy L. Martin, *The Notorious Four-Color Problem,* KU Mini College előadás, `https://jlmartin.ku.edu/MiniCollege2013/slides.pdf`

[3] Alfred Bray, *Kempe's "proof" of the four-color theorem,* MATH horizons, 2002. `https://mathweb.ucsd.edu/~ssam/old/19W-154/kempe.pdf`

Tóthmérész Lilla
ELTE

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

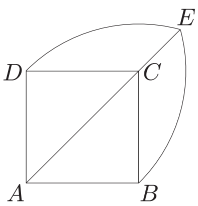
I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $x \cdot (1 - \lg 5) = 2 \cdot \lg(2^x - 2)$, (*7 pont*)

b) $1 + 2 \cdot \cos^2 x = \sin(2x)$. (*6 pont*)

2. Az e egyenes egyenlete $4x - 3y = 15$. Mennyi a sugara annak a körnek, amely érinti az e egyenest, továbbá az origóban érinti az y tengelyt? (*12 pont*)



3. A Fából Vaskarika Kft. logóján látható $ABCD$ négyzet oldalai 4 cm hosszúak, a BE körív középpontja a D pont, az ED körív középpontja pedig a B pont. A logó mind a négy részét pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre festik úgy, hogy ha két rész kerületének van közös szakasza, akkor azok különböző színűek lesznek.

a) Hány négyzetcentiméter a lefestendő terület? (*6 pont*)

b) Hány különböző kifestés lehetséges? (*8 pont*)

4. Az iskolai focicsapat edzésén az edző megkérdezett minden jelenlévő diákot, hogy hány osztálytársuk tagja a csapatnak. Ketten 1-et, hatan 2-t, egyvalaki 3-at, öten 4-et és hárman 5-öt válaszoltak a kérdésre.

a) Mennyi az elhangzott válaszok módusza, mediánja, átlaga és terjedelme? (*7 pont*)

b) Miután a matematika–testnevelés szakos edző nagyon elcsodálkozott a válaszokat hallva, a csapat tagjai elárulták neki, hogy néhány csapattag matematikaversenyre ment, ezért nem tudott eljönni a mai edzésre. Legalább hányan hiányoztak? (*5 pont*)

II. rész

5. A tavasszal három nagy sportversenyt rendeztek a nekeresdfalvi általános iskolában. Az asztalitenisz bajnokságban 120 gyerek indult. A fociligába 8 csapat