KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 6. szám Budapest, 2022. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Frenkel Péter: Beszámoló a 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról 322
A 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai 323
Olimpiai előkészítő szakkörök 324
Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa: EGMO 2022/2023 felhívás 325
Tóthmérész Lilla: Négyszín-sejtés I: A sejtés születése és egy bizonyítási kísérlet 326
Erdős Gábor: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire 332
Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről 334
Versenykiírás a KöMaL pontversenyeire 334
Matematika feladatok megoldása (5220., 5231.) ... 345
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (729–733.) 351
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (732–733., 1728–1732.) 352
A 2021–2022-es pontversenyek végeredménye I
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5254–5261.) 353
Kürschák-verseny 354
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (830–832.) 354
Informatikából kitűzött feladatok (568–570., 64., 163.) 355
Sarkadi Tamás, Tasnádi Tamás: Szép szereplés az 52. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián 361
A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiáról és válogatóversenyéről, az Athletica Galacticáról 365
Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny 1. elméleti forduló 368
Fizika gyakorlat megoldása (773.) 369
Fizika feladatok megoldása (5392., 5393., 5397., 5398., 5402.) 370
Fizikából kitűzött feladatok (415., 785–788., 5418–5426.) 378
Eötvös-verseny 381
Problems in Mathematics 382
Problems in Physics 383

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Beszámoló a 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 6. és 16. között Norvégia rendezte meg Oslóban, két járványsújtotta év után végre személyes jelenléttel. A versenyen 104 ország 589 diákja vett részt.

A versenyen, szokás szerint, mindkét napon négy és fél óra alatt három-három feladatot kellett megoldani. A feladatok szövegét alább közöljük. Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A versenyzők pontszáma a koordinátorok és a csapatvezetők közötti egyeztetés révén alakult ki. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 34–42 pontot elérő, ezüstérmet a 29–33 pontos, míg bronzérmet a 23–28 ponttal rendelkező tanulók szereztek. A szokatlanul magas ponthatárok főként annak tudhatók be, hogy az 1. és 4. feladaton kívül idén a 2. feladat is igen könnyűnek bizonyult.

A magyar csapatot a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium hat tanulója alkotta.

Kovács Tamás (12. oszt.) 30 ponttal *ezüstérmet* nyert.
Seres-Szabó Márton (11. oszt.) 28 ponttal,
Nádor Benedek (11. oszt.) 27 ponttal,
Molnár-Szabó Vilmos (11. oszt.) 25 ponttal,
Terjék András József (12. oszt.) 25 ponttal és
Németh Márton (11. oszt.) 23 ponttal *bronzérmet* kapott.

Frenkel Péter (ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék; Rényi Intézet) a magyar csapat vezetőjeként, *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) a magyar csapat helyettes vezetőjeként, *Kunszenti-Kovács Dávid* (ELTE TTK Alkalmazott Analízis Tanszék; Rényi Intézet) a Diákolimpiát irányító öttagú Tábla, az Etikai Bizottság és a Feladatkiválasztó Bizottság tagjaként, valamint főkoordinátorként, *Borbényi Márton* (ELTE TTK) és *Kós Géza* (ELTE TTK Analízis Tanszék; SZTAKI) a Feladatkiválasztó Bizottság tagjaként és koordinátorként, *Beke Csongor, Csahók Tímea, Csapó Hajnalka, Fraknói Ádám, Gerencsér Balázs, Gyarmati Máté, Győrffy Ágoston, Hansel Soma, Imolay András, Jankó Zsuzsanna, Kerekes Anna, Kiss Melinda Flóra, Klász Viktória, Kocsis Anett, Kovács Benedek, Lenger Dániel, Nagy Kartal, Váli Benedek, Várkonyi Zsombor* és *Záhorský Ákos* pedig koordinátorként működött közre az olimpián.

Az országok nem-hivatalos pontversenyében Magyarország a résztvevő 104 ország között a 32.-33. helyen végzett.

A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Kína 252, 2. Dél-Korea 208, 3. USA 207, 4. Vietnám 196, 5. Románia 194, 6. Thaiföld 193, 7. Németország 192, 8-9. Irán és Japán 191, 10-11. Izrael és Olasz-

ország 188, 12. Lengyelország 183, 13. Egyesült Királyság 179, 14-15. Kanada és Tajvan 178, 16. Bulgária 177, 17-18. Kazahsztán és Ukrajna 174, 19-21. Brazília, Hongkong és Peru 173, 22. Szaúd-Arábia 168, 23. Mexikó 167, 24-25. India és Szingapúr 165, 26-28. Örményország, Görögország és Törökország 163, 29-30. Ausztrália és Mongólia 162, 31. Belarusz 160, **32-33.** Franciaország és **Magyarország** 158.

Az összes résztvevő ország és versenyző neve és eredménye megtalálható az `https://www.imo-official.org/` honlapon.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. A központi olimpiai felkészítő szakkör vezetője a helyettes csapatvezető, *Dobos Sándor* volt. A felkészítés részét képezte egy egyhetes táborozás június végén, *Dobos Sándor* és *Kiss Géza* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), valamint *Imolay András* és *Kovács Benedek* (ELTE TTK) vezetésével. A felkészítésben és a válogatóversenyek dolgozatainak javításában a tanév során sokan mások is részt vettek. A 11. osztályos versenyzők tanárai *Dobos Sándor, Ádám Réka* és *Fazakas Tünde,* a 12. osztályosoké *Gyenes Zoltán, Hujter Bálint* és *Juhász Péter* voltak. Németh Márton tanára volt még *Erdős Gábor,* Nádor Benedeké pedig *Kovács Benedek* és *Szűcs Gábor.*

Az olimpián voltak matematikai és kulturális-turisztikai jellegű kísérő programok is. A résztvevők a zsonglőrködés matematikájáról hallgathattak előadást, múzeumokba és kalandparkba látogathattak el. A teljes program megtalálható a `https://www.imo2022.org/imo/Programme` honlapon.

Több új tisztségviselőt is megválasztottak az olimpián, köztük egy magyart is: *Kós Géza* a Tábla tagja lett.

A következő matematikai diákolimpiát Japán rendezi Csiba városában, 2023. július 2–13. között.

Frenkel Péter

A 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai

Első nap

1. feladat. Oslo bankja kétféle típusú érmét bocsát ki: alumíniumot (jele A) és bronzot (jele B). Mariann előtt n alumíniumérme és n bronzérme van egy sorban elrendezve valamilyen tetszőleges kezdeti sorrendben. *Láncnak* nevezzük egymást közvetlenül követő, azonos típusú érmék tetszőleges sorozatát. Rögzített $k \leqslant 2n$ pozitív egész szám mellett Mariann ismételten végrehajtja a következő műveletet: meghatározza a leghosszabb olyan láncot, amely tartalmazza a balról számított k-adik érmét, és az ezen lánchoz tartozó összes érmét átteszi a sor bal szélére. Például, ha $n=4$ és $k=4$, akkor az $AABBBABA$ elrendezésből kiinduló folyamat:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to$$
$$\to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Határozzuk meg mindazon, $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tulajdonságú (n,k) párokat, amelyekre minden kiindulási elrendezés esetén lesz olyan pillanat a folyamat során, hogy a balról számított első n érme mind azonos típusú.

2. feladat. Jelölje $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát. Határozzuk meg mindazon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényeket, amelyekre minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén pontosan egy olyan $y \in \mathbb{R}^+$ létezik, hogy

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

3. feladat. Legyen k pozitív egész, és legyen S páratlan prímszámoknak egy véges halmaza. Bizonyítandó, hogy (elforgatástól és tükrözéstől eltekintve) legfeljebb egyféleképpen lehet az S elemeit egy kör mentén elrendezni úgy, hogy bármely két szomszédosnak a szorzata $x^2 + x + k$ alakú legyen valamilyen pozitív egész x-szel.

Második nap

4. feladat. Legyen $ABCDE$ olyan konvex ötszög, hogy $BC = DE$. Tegyük fel, hogy az $ABCDE$ ötszög belsejében lévő T pontra $TB = TD$, $TC = TE$ és $ABT\sphericalangle = TEA\sphericalangle$. Messe az AB egyenes a CD és CT egyeneseket a P, illetve Q pontban. Tegyük fel, hogy a P, B, A, Q pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Messe az AE egyenes a CD és DT egyeneseket az R, illetve S pontban. Tegyük fel, hogy az R, E, A, S pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Bizonyítandó, hogy a P, S, Q, R pontok egy körön vannak.

5. feladat. Határozzuk meg mindazon, pozitív egészekből álló (a, b, p) számhármasokat, amelyekre p prím és

$$a^p = b! + p.$$

6. feladat. Legyen n pozitív egész. *Skandináv négyzet* egy $n \times n$ méretű tábla, amely 1-től n^2-ig az összes egész számot tartalmazza úgy, hogy minden mezőben pontosan egy szám áll. Két különböző mezőt szomszédosnak tekintünk, ha van közös oldaluk. Ha egy mezőnek minden szomszédjában nagyobb szám áll, mint őbenne, akkor *völgynek* nevezzük. *Kaptató* egy sorozat, amely egy vagy több mezőből áll úgy, hogy

(i) a sorozat első mezője egy völgy,

(ii) a sorozat minden további mezője szomszédos az őt közvetlenül megelőző mezővel, és

(iii) a sorozat mezőiben álló számok növekvő sorrendben vannak.

Adott n esetén határozzuk meg egy skandináv négyzetben lévő kaptatók számának legkisebb lehetséges értékét.

Olimpiai előkészítő szakkörök a 2022/2023. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Központi olimpiai szakköri felkészülés az alábbiak szerint történik:

Budapest: az első alkalom szeptember 23-án (pénteken) lesz a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest VIII. kerület, Horváth M. tér 8.) 14:30 és 17:00 között, szakkörvezető: *Dobos Sándor.*

Csongrád-Csanád megye: az első alkalom szeptember 15-én (csütörtökön) lesz, utána kéthetente a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében (Szeged, Aradi vértanúk tere 1., I. emelet, Riesz terem), 15:00 és 17:00 között, szakkörvezető: *Kosztolányi József.*

Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola veszprémi foglalkozásai 9–12. évfolyamosok számára. Az egyes foglalkozásokra a jelentkezést a diákok egyénileg végezhetik el 2022. szeptember 17-ig az Erdős Iskola honlapján[*]. Az idei első foglalkozás Veszprémben szeptember 30. és október 2. között lesz.

EGMO 2022/2023 felhívás

2023. április 13. és 19. között Portorožban kerül megrendezésre a tizenkettedik Európai Lány Matematikai Diákolimpia, az EGMO (`https://egmo2023.dmfa.si/`, `https://www.egmo.org/`). Országunk a versenyen egy négyfős csapattal képviseltetheti magát, melynek összetétele 2023 elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2022 őszén és 2023 elején) – kis mértékben az elmúlt évi is –, országos kifejtős egyéni versenyek (matematika OKTV, Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikaverseny), a KöMaL (A és) B pontversenyei, valamint az évközi munka.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a kiutazó csapatba kerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés, ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben körülbelül havi rendszerességgel küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; az ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit-magyar közös IMO felkészítő táborban. A két válogató összesített eredménye alapján a legeredményesebb diákok részt vehetnek az intenzív EGMO felkészítő hétvégén is.

A felkészülésbe érdemes minél előbb, akár már kilencedikesként bekapcsolódni. Minden lány jelentkezését szeretettel várjuk, akit érdekel a versenyrészvétel lehetősége és nem riad vissza attól, hogy ezért komolyabb munkát fektessen bele.

Aki szeretne részt venni a válogatásban és felkészülésben, vagy bármilyen kérdése van, írjon minél előbb az `egmo.hungary@gmail.com` címre.

Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa

[*] `https://erdosiskola.mik.uni-pannon.hu/`

Négyszín-sejtés I: A sejtés születése és egy bizonyítási kísérlet*

Francis Guthrie, egy londoni diák, 1852-ben Anglia megyéinek térképét nézegetve rájött, hogy ki tudja színezni a megyéket 4 színnel úgy, hogy szomszédos megyék sehol se kapjanak azonos színt. Meglepte, hogy egy ilyen sok megyéből álló, látszólag teljesen szabálytalan térképet ilyen kevés színnel ki lehet színezni. Ezért azt kezdte sejteni, hogy ez egy általános tulajdonság lehet, és talán minden térképet ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy szomszédos tartományok ne kapjanak azonos színt. Miután nem sikerült bebizonyítania, hogy így lenne, de olyan térképet sem sikerült rajzolnia, ahol több, mint 4 színre lenne szükség, írt öccsének, *Frederiknek,* aki ekkoriban a University College Londonban tanult matematikát. Frederik is érdekesnek találta a sejtést, viszont neki sem sikerült sem bizonyítást, sem ellenpéldát találnia. Ezért elmondta a kérdést tanárának, a neves matematikus *Augustus De Morgannek.* De Morgan hasonlóan járt, a kérdést nagyon izgalmasnak találta, megoldani azonban nem tudta, ezért feltette a kérdést további matematikus ismerőseinek. Így indult útjára a híres négyszín-sejtés, melyet végül 1976-ban sikerült bebizonyítania *Appelnek* és *Hakennek,* de a bizonyításuk annyiban szokatlan volt, hogy rengeteg esetet számítógéppel kellett leellenőrizni, tehát nem egy emberi ésszel könnyen átlátható bizonyításról volt szó. Később *Robertson, Sanders, Seymour* és *Thomas* adott egy bizonyítást, amiben kevesebb esetet kell számítógéppel ellenőrizni, de még az ő bizonyításukhoz is szükség van a számítógépre. „Rövid" bizonyítás azóta sem ismert a tételre. A sejtés felvetése és bizonyítása között eltelt több, mint 120 év alatt a négyszín-sejtés végig nagyon sok embert foglalkoztatott, és a megoldására tett erőfeszítések rengeteg hasznos tudást eredményeztek. A következő cikksorozat ebből szeretne egy kis ízelítőt adni.

Az első részben bemutatjuk az első bizonyítási kísérletet a négyszín-sejtésre. Ezt *Kempe* publikálta 1879-ben. Ezután 11 évig megoldottnak hitték a négyszín-sejtést, azonban 11 év után Heawood észrevett egy hibát a bizonyításban. Sajnos az derült ki, hogy ez nem egy könnyen kijavítható hiba. Ennek ellenére a Kempe-féle bizonyítás sok hasznos ötletet szolgáltatott. Heawoodnak a Kempe-féle bizonyítást módosítva sikerült belátnia az ötszín-tételt, azaz hogy bármely térkép jól színezhető 5 színnel. Valamint a négyszín-tétel majdnem 100 évvel későbbi Appel–Haken-féle bizonyítása is épít Kempe gondolatmenetére.

Izgalmas és tanulságos feladat megkeresni a hibát Kempe érvelésében. Nézzük meg, hogyan is szól ez az érvelés.

A sejtés jelentősége. Mielőtt bemutatnánk Kempe érvelését, hadd mondjunk még pár szót arról, hogy miért érdekes a négyszín-sejtés. Hiszen nincs igazán

* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

praktikus jelentősége. Talán kicsit esztétikusabb egy térképet 4 színnel színezni, mint ha 6 színnel lenne színezve, de ha csak az a célunk, hogy a megyéket jól el tudjuk különíteni egymástól, valójában 6 szín is ugyanolyan jó, mint 4. Hogy mégis 120 év matematikusai lelkesedtek a kérdés iránt, az azért van, mert ez egy meglepő jelenség, aminek nem értjük az okát. Ha pedig valami meglepő dolog igaz, akkor az ember azt feltételezi, hogy az annak a hátterében álló törvényszerűséget megértve sokkal jobban fogjuk érteni a világot, és ez sok más jelenség megértésében is segíteni fog.

Megjegyezzük, hogy bár a térképek színezése nem egy gyakorlatban érdekes kérdés, sok praktikusan érdekes problémát le lehet fordítani általánosabb színezési kérdésekre.

Fogalmazzuk át a kérdést, hogy megszabaduljunk a fölösleges adatoktól. Először is, fogalmazzuk át egy kicsit a négyszín-sejtést. A színezés szempontjából nyilván mindegy, hogy egy megyének pontosan milyen az alakja, csak az a fontos, hogy mely más megyékkel szomszédos. Így elég, ha csak a szomszédsági viszonyokat jegyezzük meg. Azaz rajzoljunk minden megyére egy pontot (például a megyeszékhelyre), és kössük össze a szomszédos megyék székhelyeit az őket elválasztó határon keresztül. Így egy gráfot kapunk. Mégpedig egy elég speciális gráfot: a csúcsai egy síkra vannak rajzolva, az élei pedig nem metszik egymást. Az ilyen gráfokat síkgráfoknak nevezzük. Mindig fel fogjuk azt is tenni, hogy nincs hurokél, azaz egy él két végpontja mindig különböző. (A térképekből kapott gráfokra ez nyilván igaz.) A térkép színezését úgy lehet lefordítani a gráf nyelvére, hogy a síkgráf csúcsait szeretnénk színezni úgy, hogy éllel összekötött csúcsok különböző színt kapnak. Az ilyen színezéseket innentől jó színezéseknek nevezzük. Azt is meg lehet gondolni, hogy a síkgráfok színezése nem általánosabb feladat a térképek színezésénél, mert minden hurokélmentes síkgráfhoz lehet rajzolni egy térképet, ahol pontosan azok a megyék lesznek szomszédosak, amelyeknek megfelelő csúcsok össze voltak kötve. (Vigyázat, egy ponton érintkező megyéket nem tekintünk szomszédosnak.)

Tehát a négyszín-sejtés azt mondja ki, hogy egy (hurokélmentes) síkgráf pontjainak létezik 4 színnel jó színezése.

Megjegyezzük, hogy a síkgráfok elég speciális gráfok. Egy általános gráf csúcsainak jó színezéséhez tetszőlegesen sok színre lehet szükségünk. Ha például veszünk n csúcsot, és mindegyik csúcsot összekötjük az összes többivel, akkor kénytelenek vagyunk n színt használni egy jó színezéshez. De egy ilyen gráf $n > 4$ esetén persze nem rajzolható le a síkra úgy, hogy az élek ne messék egymást.

A síkgráfok néhány fontos tulajdonsága. Először lássunk be néhány dolgot a síkgráfokról. Ezek közül az első *Leonhardt Euler* híres formulája. (Ebben az alfejezetben még nem fogunk „csalni”.)

Vegyünk egy összefüggő síkgráfot. Az összefüggő itt azt jelenti, hogy minden csúcsból minden másik csúcsba el tudunk jutni a gráf élein keresztül. A csúcsok és az élek tartományokra osztják a síkot. Ezek közül lesz egy végtelen tartomány, a többi pedig korlátos. Nevezzük ezeket a tartományokat a síkgráf lapjainak (a végtelen tartományt is beleértve). A számukat jelöljük ℓ-el. Emellett jelöljük cs-vel a gráf csúcsainak számát, e-vel pedig az éleinek számát. Euler formulája azt mondja ki, hogy tetszőleges összefüggő síkgráfra $cs + \ell = e + 2$, azaz a csúcsok és lapok összszáma 2-vel nagyobb, mint az élek száma. Ezt a szép formulát sokféleképpen be lehet bizonyítani, érdemes az olvasónak önállóan megpróbálni. Azért mi is adunk itt egy bizonyítást.

Élszámra vonatkozó indukciót használunk. Az alapeset az, ha a gráfunknak nincs éle. Mivel minden csúcsból mindenhova el kell tudnunk jutni éleken keresztül, ekkor csúcsa is csak 1 lehet a gráfnak. Lap pedig szintén 1 lesz (a végtelen lap). Tehát ekkor valóban $cs + \ell = 2 = e + 2$.

Tegyük fel most, hogy $e = k > 0$, és hogy k-nál kevesebb élű összefüggő síkgráfokra már tudjuk, hogy teljesül a tétel. Vegyünk egy tetszőleges élt, mely az u és v csúcsokat köti össze. Két lehetőség van. Az él két oldalán vagy két különböző lap van, vagy pedig ugyanaz a lap (mindkettőre mutatunk egy-egy példát az *1. ábrán*). Ha az él két oldalán két különböző, L_1 és L_2 lap van, akkor az élet elhagyva is összefüggő marad a gráf. Ugyanis az uv élen való áthaladást tudjuk helyettesíteni az L_1 lap maradék ívén való áthaladással. (Ha az él két oldalán ugyanaz a lap szerepel, akkor ezt nem tudjuk megtenni, mert ilyenkor a lap határán kétszer is szerepel az uv él, így nem tudunk a maradék határon keresztül eljutni u-ból v-be.) Tehát ha az uv él két oldalán két különböző lap van, akkor hagyjuk el az élt. Ekkor az előbbiek miatt összefüggő marad a gráf, és az élszám $e - 1 = k - 1$ lesz. Az L_1 és L_2 lapok összeolvadnak egy lappá, ezért a lapok száma $\ell - 1$ lesz. A csúcsok száma nem változik. Mivel az új gráf $k - 1$ élű, erre az indukciós feltevés miatt már teljesül, hogy $cs + (\ell - 1) = (e - 1) + 2$. Vagyis valóban, $cs + \ell = e + 2$.

1. ábra. Bal oldalon: Az uv él két oldalán két különböző, L_1 és L_2 lap van.
Jobb oldalon: Az uv él két oldalán azonos lap van

Azt az esetet kell még kezelnünk, ha az él két oldalán azonos lap szerepel.

Olvasszuk össze az u és v csúcsokat egy csúccsá, és töröljük ki a kiválasztott élünket. A többi u-ból vagy v-ből induló élt hagyjuk meg, csak most már az összeolvasztott csúcsból fognak indulni. Így továbbra sem fogják élek metszeni egymást. A csúcsok és az élek száma 1-gyel csökken, a lapok száma pedig változatlan. Most is $k - 1$ élű síkgráfot kaptunk, tehát az indukciós feltétel miatt $(cs - 1) + \ell = (e - 1) + 2$, azaz $cs + \ell = e + 2$. Ezzel beláttuk az Euler-formulát.

Nevezzünk egy gráfot egyszerűnek, ha bármely két csúcs között legfeljebb 1 él halad, és nincsenek hurokélek, azaz bármely él két végpontja különböző. Az Euler-formulából levezethetjük, hogy egy egyszerű síkgráfnak nincsen túl sok éle a csúcsszámához képest:

1. állítás. *Egyszerű síkgráfban* $e \leqslant 3cs - 6$.

Bizonyítás. Mivel a síkgráfunkban nincsenek hurkok és többszörös élek, ezért minden lapot legalább 3 él határol. Ha van olyan lap, amit több, mint 3 él határol, akkor húzzunk be egy átlót. Ezzel továbbra is síkgráfunk van. A csúcsok száma változatlan maradt, az élek számát pedig csak növeltük. Ezzel a módszerrel elérhetjük, hogy a síkgráf minden lapját pontosan 3 él határolja. Jelöljük ennek a kibővített gráfnak az élszámát e'-vel, a lapszámát pedig ℓ'-vel. Azt állítjuk, hogy $3\ell' = 2e'$. Valóban, ha minden lapra megszámoljuk az őt határoló éleket, akkor $3\ell'$ élt fogunk számolni. Viszont így minden élt kétszer számoltunk, a két oldala mentén. Felírva az Euler formulát, $cs + \ell' = e' + 2$. Behelyettesítve az $\ell' = \frac{2}{3}e'$ egyenlőséget, $cs = \frac{1}{3}e' + 2$, azaz $e' = 3cs - 6$. Mivel az eredeti gráfra $e \leqslant e'$, megkapjuk, hogy $e \leqslant 3cs - 6$. □

1. következmény. *Tetszőleges egyszerű síkgráfban létezik legfeljebb* 5 *fokú csúcs.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy minden fokszám legalább 6. Ekkor a fokszámok összege legalább $6cs$. Bármely gráfban a fokszámok összege az élek számának duplája, hiszen minden élt mindkét végpontjánál megszámolunk. Tehát az élek száma legalább $3cs$. Ez ellentmond az előbbi állításnak, tehát hamis volt az indirekt feltevésünk. □

Kempe érvelése

Ennyi előkészület után most már el tudjuk mondani, hogy szólt Kempe hibás bizonyítása a négyszín-sejtésre. Arra biztatjuk az olvasót, hogy próbálja meg megtalálni a hibát.

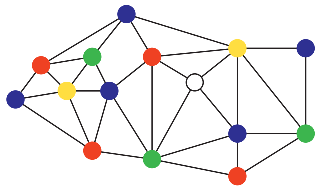
Vegyük észre, hogy elég, ha egyszerű síkgráfokat tudunk 4 színnel jól színezni. Ugyanis ha egy u és v pont között több él is fut, az ugyanúgy csak annyit jelent, hogy az u-t és a v-t nem lehet azonos színre színezni, mint ha egy él futna köztük. Tehát ha van többszörös él, akkor hagyjunk el annyi élt, hogy csak egyszeres legyen. (Ezzel nyilvánvalóan a síkbarajzoltságot sem rontjuk el.) Ha az így kapott egyszerű gráfot tudjuk 4 színnel jól színezni, akkor az eredetit is.

Egyszerű síkgráfokra csúcsszámra vonatkozó indukcióval látjuk be a tételt. Tegyük fel, hogy minden k-nál kisebb csúcsszámú egyszerű síkgráfot tudunk 4 színnel jól színezni. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor minden k csúcsú egyszerű síkgráfot is jól lehet színezni 4 színnel. Legyen G egy k csúcsú egyszerű síkgráf. az 1. következmény szerint a G gráfban van legfeljebb 5 fokú csúcs. Vegyünk egy ilyen csúcsot, és jelöljük v-vel. Töröljük a gráfból v-t és a rá illeszkedő éleket, és nevezzük a kapott gráfot $(G - v)$-nek. Ekkor továbbra is egy síkbarajzolt egyszerű gráfunk lesz, de már $k - 1$ ponttal. Tehát ezt a gráfot az indukciós feltevés szerint jól lehet színezni 4 színnel. Színezzük ki (jól) 4 színnel. Most rajzoljuk vissza a v pontot és a rá illeszkedő éleket. Kellene a v-nek is találni egy színt, ami különbözik a szomszédai színétől.

Ha v szomszédai legfeljebb 3 színt használnak a 4 szín közül, akkor v megkaphatja a negyedik színt, és készen vagyunk. Gond akkor van, ha v szomszédai mind a 4 színt használják. Ez csak akkor lehet, ha v-nek 4 vagy 5 szomszédja van. Nézzük meg alaposabban ezeket az eseteket.

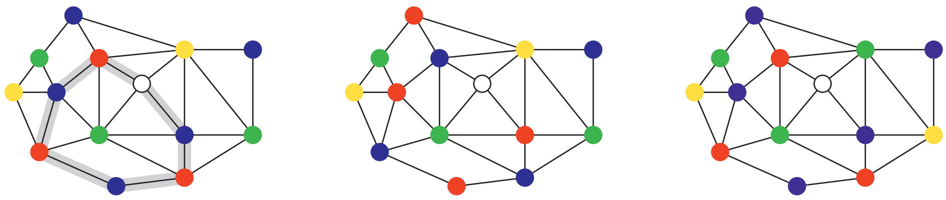
v-nek 4 szomszédja van és ezek 4 színt használnak. Tegyük fel, hogy a v szomszédai az óramutató járása szerint rendre piros, sárga, kék és zöld színűek.

Színezzük át a v csúcs piros szomszédját kékre. Ha ez $(G-v)$-nek egy jó színezése, akkor készen vagyunk, mert most már lehet a G-ben a v csúcs színe piros. Ha az új színezés nem jó, akkor a kékre átszínezett csúcsnak eredetileg volt (1 vagy több) kék szomszédja. Ezeket a csúcsokat most színezzük át pirosra. Ha ezeknek voltak további piros színű szomszédai, azokat színezzük át kékre stb. Egy példát látunk erre a *2. ábrán.* Könnyű meggondolni, hogy ezt a szabályt követve egy csúcsot legfeljebb egyszer színezünk át. Tehát egy idő után el fognak fogyni az átszínezendő csúcsaink, és kapunk egy jó színezést a $G-v$ gráfra.



2. ábra. A bal oldalon egy v csúcs kivételével jól színezett síkgráf látható. A színezetlen (fehér) v csúcs piros szomszédját kékre átszínezve, majd a szükséges további szomszédokat átszínezve a jobb oldali színezést kapjuk

Két lehetőségünk van. Ha a v szomszédai közül a kéket nem színeztük át pirosra, akkor most a v lehet piros, és készen vagyunk. A 2. ábrán például egy ilyen esetet látunk. Ha viszont v eredetileg kék szomszédját átszíneztük pirosra, akkor látszólag nem nyertünk semmit, továbbra is mind a 4 szín ott van v szomszédai között. (Egy ilyen példát látunk a *3. ábrán.*) Mit tudunk most mondani? Azért valamit így is tanultunk a gráfról: mégpedig hogy (az eredeti színezést nézve) a v csúcs piros és kék szomszédai között van egy út, amin felváltva piros és kék csúcsok vannak. Vegyük észre hogy ez az út a v-vel együtt már egy kört ad, és a v sárga szomszédja és zöld szomszédja közül az egyik a kör belsejében van, a másik pedig a külsejében. Miért hasznos nekünk ez az információ? Próbáljuk meg most ugyanezt eljátszani a sárga és zöld színekkel. Azaz a v sárga szomszédját átszínezzük zöldre. Ha az eredetileg sárga csúcsnak voltak zöld szomszédai, akkor átszínezzük őket sárgára stb. Ez az átszínezés már nem érhet véget úgy, hogy a v zöld szomszédját átszínezzük sárgára. Akkor ugyanis lenne a v sárga és zöld



3. ábra. A bal oldali színezésben a v piros szomszédját kékre átszínezve a középső színezést kapjuk. A v kék szomszédja pirosra színeződött. A piros-kék kört szürke vonallal jelöltük. A jobb oldali ábra mutatja a v sárga szomszédjának zöldre színezésével kapott színezést szomszédai között egy út, ami csak sárga és zöld csúcsokat tartalmaz. Ennek az útnak a piros-kék kör belsejéből el kellene jutnia a külsejébe, azt viszont csak úgy tudná megtenni, ha a gráf két éle metszené egymást. Mivel síkgráfról van szó, ez nem lehet. Tehát találunk egy átszínezést, ahol a v-nek nincs sárga szomszédja, azaz a v-t színezhetjük sárgára. Ezzel befejeztük az indukciós lépés bizonyítását abban az esetben ha a v-nek 4 szomszédja van.

v-nek 5 szomszédja van és ezek 4 színt használnak. Hátra van még az az eset, ha v-nek 5 szomszédja van, és ezek használják mind a 4 színt. Ekkor biztos, hogy valamelyik szín két szomszédnál van használva, a másik 3 szín pedig 1-1 szomszédnál. Tegyük fel, hogy mondjuk a kék szín szerepel kétszer (ez nyilván feltehető, hiszen ha mondjuk a sárga szín szerepel kétszer, akkor mindenütt kicserélhetjük a sárga és a kék színeket). Két lehetőség van: Vagy egymás után következik a két kék szomszéd v körül, vagy pedig nem. Ha a két kék csúcs egymás után következik, akkor ugyanazt a gondolatmenetet el lehet mondani, mint amikor v-nek 4 szomszédja volt. (Ennek ellenőrzését az olvasóra bízzuk, de megígérjük hogy a hiba nem ebben a részben van.)

Ha a két kék csúcs nem egymást követi, akkor feltehető, hogy az óramutató járása szerint így néznek ki v szomszédain a színek: kék, piros, kék, sárga, zöld. (Megint csak, ha pl. a sárga szín lenne a két kék között, akkor cseréljük ki mindenhol a sárga és a piros színeket stb.). Nevezzük is el ezeket a csúcsokat $K1$, P, $K2$, S, Z-nek. Csináljuk a következőt: Próbáljuk P-t átszínezni sárgára (majd ennek sárga szomszédait pirosra stb.). Ha S nem színeződik át pirosra, akkor v lehet piros, és készen vagyunk. Ha S átszíneződik pirosra, akkor van egy piros-sárga út P-ből S-be, ami v-vel együtt már egy kör, és ez a kör elválasztja a $K1$ és Z csúcsokat a $K2$-től. Ekkor próbáljuk meg P-t zöldre átszínezni (és szomszédait pirosra stb). Ha Z nem színeződik át pirosra akkor v megint csak lehet piros és készen vagyunk. Ha Z átszíneződik pirosra, akkor van egy felváltva piros-zöld színű út P-ből Z-be, ami v-vel együtt már egy kör, és ami elválasztja $K1$-et a $K2$ és S csúcsoktól.

Ha ez a helyzet, tehát a P csúcsot sem sárgára, sem zöldre nem sikerült átszínezni, akkor inkább hagyjuk a P csúcsot, és próbáljuk meg a kék színt szabaddá tenni. Mégpedig a $K1$ csúcsot színezzük át sárgára. Mivel a piros-zöld kör elválasztja $K1$-et S-től, ezért ha $K1$-et sárgára színezzük, akkor S nem fog átszíneződni kékre. A $K2$ csúcsot pedig színezzük át zöldre. Mivel a piros-sárga kör elválasztja a $K2$-t Z-től, ezért ekkor a Z nem fog átszíneződni kékre. Tehát a v szomszédai közül el tudtuk tüntetni a kék színt. Így most a v csúcsot kiszínezhetjük kékre. Ezzel minden esetben találtunk megfelelő színt a v csúcsnak, azaz a bizonyítással készen vagyunk.

Hol lehet a hiba? Arra biztatjuk az olvasót, hogy keresse meg a hibát a fenti érvelésben. Annyit elárulunk, hogy az utolsó esettel van a gond, tehát amikor v-nek 5 szomszédja van, és a két azonos színt kapó szomszéd nem egymás után következik v körül.

A következő részben mi is leírjuk majd, hogy hol a hiba, és hogy ha a négyszíntétel nem is jön ki, hogyan lehet mégis Kempe érvelése segítségével belátni az ötszíntételt.

Hivatkozások

[1] https://web.stonehill.edu/compsci/LC/Four-Color/Four-color.htm

[2] Jeremy L. Martin, *The Notorious Four-Color Problem,* KU Mini College előadás, https://jlmartin.ku.edu/MiniCollege2013/slides.pdf

[3] Alfred Bray, *Kempe's "proof" of the four-color theorem,* MATH horizons, 2002. https://mathweb.ucsd.edu/~ssam/old/19W-154/kempe.pdf

Tóthmérész Lilla
ELTE

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

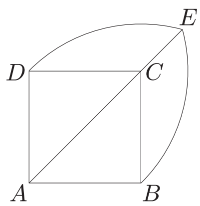
I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $x \cdot (1 - \lg 5) = 2 \cdot \lg(2^x - 2)$, (*7 pont*)

b) $1 + 2 \cdot \cos^2 x = \sin(2x)$. (*6 pont*)

2. Az e egyenes egyenlete $4x - 3y = 15$. Mennyi a sugara annak a körnek, amely érinti az e egyenest, továbbá az origóban érinti az y tengelyt? (*12 pont*)



3. A Fából Vaskarika Kft. logóján látható $ABCD$ négyzet oldalai 4 cm hosszúak, a BE körív középpontja a D pont, az ED körív középpontja pedig a B pont. A logó mind a négy részét pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre festik úgy, hogy ha két rész kerületének van közös szakasza, akkor azok különböző színűek lesznek.

a) Hány négyzetcentiméter a lefestendő terület? (*6 pont*)

b) Hány különböző kifestés lehetséges? (*8 pont*)

4. Az iskolai focicsapat edzésén az edző megkérdezett minden jelenlévő diákot, hogy hány osztálytársuk tagja a csapatnak. Ketten 1-et, hatan 2-t, egyvalaki 3-at, öten 4-et és hárman 5-öt válaszoltak a kérdésre.

a) Mennyi az elhangzott válaszok módusza, mediánja, átlaga és terjedelme? (*7 pont*)

b) Miután a matematika–testnevelés szakos edző nagyon elcsodálkozott a válaszokat hallva, a csapat tagjai elárulták neki, hogy néhány csapattag matematikaversenyre ment, ezért nem tudott eljönni a mai edzésre. Legalább hányan hiányoztak? (*5 pont*)

II. rész

5. A tavasszal három nagy sportversenyt rendeztek a nekeresdfalvi általános iskolában. Az asztalitenisz bajnokságban 120 gyerek indult. A fociligába 8 csapat nevezett, mindegyik csapatban 9 játékos lépett pályára. Az úszóversenyen 81-en teljesítették a távot. 23 gyerek mind a három sportágban versenyzett. Összesen 45-en voltak azok, akik egynél több számban is indultak.

a) Hányan vettek részt legalább az egyik sportág versenyén? (*6 pont*)

A fociligában mindegyik csapat mindegyik másik csapattal egyszer játszott. Az első héten összesen 13 mérkőzésre került sor.

b) Bizonyítsuk be, hogy volt olyan csapat, amely az első héten legalább négyszer lépett pályára. (*4 pont*)

Az asztalitenisz bajnokságban négy olyan gyerek jutott be a legjobb nyolc közé, aki a Futrinka utcában lakik. A versenyzőkből sorsolással négy párt alkottak, akik megküzdhettek egymással a legjobb négy közé jutásért.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy nem volt olyan pár, ahol mindkét gyerek a Futrinka utcában lakik? (*6 pont*)

6. *a*) Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapélei 6 cm, oldalélei 5 cm hosszúak. Milyen hosszú testátlói vannak a hasábnak, és melyik fajtából hány darab? (*8 pont*)

b) Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy egy szabályos n oldalú hasáb csúcsai közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, azok egy lapátló végpontjai lesznek. Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} p_n. \qquad (8\ pont)$$

7. Vizsgáljuk az $a_n = n^2 + 4n + 9$ sorozatot.

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat szigorúan monoton növő. (*3 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak egyik tagja sem négyzetszám. (*5 pont*)

c) Hányféleképpen lehet a sorozat első 100 tagja közül kiválasztani két különbözőt úgy, hogy azok összege osztható legyen 5-tel? (*8 pont*)

8. Egy kis teherszállító hajó 100 kilométeren $0{,}1 \cdot v^2$ liter gázolajat fogyaszt, ha a sebessége v km/h. Egy liter gázolaj ára 500 forint, a legénység fizetése pedig óránként összesen 27 000 forint.

a) Milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a lehető legolcsóbban tudja teljesíteni az 500 km hosszú távot? (*10 pont*)

b) A hajó többek között 15 birkát szállít. Sajnos, az egyik birkát betegen vitték fel a fedélzetre. Tudjuk, hogy ez a beteg birka bármelyik egészséges birkát 10% valószínűséggel fertőzi meg. Az így megfertőzött birkák már nem fertőznek tovább. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 további birka kapja el a fertőzést? (*6 pont*)

9. A hagyományos, úgynevezett ötös lottón a szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, és ezek közül kell kiválasztani azt az 5 számot, amit a sorsoláson kihúznak.

a) Hány olyan számötös van, amelyben a számok számtani sorozatot alkotnak?
(*6 pont*)

b) Hány olyan számötös van, amelyben a számok mértani sorozatot alkotnak?
(*10 pont*)

Erdős Gábor
Nagykanizsa

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2022–2023-as tanévre (2022 szeptemberétől 2023 májusáig) 9200 Ft. Azonos címre küldendő, 9-nél nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj részletes árai a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at: `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonkénti ára 1100 Ft.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2022–2023-as tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás* a KöMaL 2022–2023. évi pontversenyeire

Kedves Versenyzőnk!

Matematikából, fizikából és informatikából különféle nehézségű pontversenyeket indítunk. A 2021–2022-es tanévtől kezdve csapatban is lehet versenyezni, mely-

* Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.

nek részletei a továbbiakban olvashatók. A versenyek 9 hónapon keresztül, 2022 szeptemberétől 2023. június elejéig tartanak. Minden hónapban új feladatokat tűzünk ki, és a megoldásokat a következő hónap elejéig küldheted be. A verseny végeredményét 2023. szeptemberi számunkban hirdetjük ki. A díjakat jövő ősszel, a KöMaL Ifjúsági Ankéton adjuk át.

Pontversenyeinkben a részvétel a 2022/2023-as tanévben is térítésmentes. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy előfizetésükkel és adományaikkal segítsék Lapunk fennmaradását.

Nevezés a versenyre

Versenyeinkben minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló részt vehet.

Az Európai Unió Általános Adatvédelmi Rendelete (GDPR) értelmében szülői engedély szükséges a 16 évesnél fiatalabb versenyzőink adatainak nyilvántartásához. Az ő esetükben egy szülői nyilatkozatra is szükség van, melyet a regisztráció során lehet megadni. Amennyiben a szülői nyilatkozat nem érkezik meg, a versenyző nem szerepelhet az eredménylistában. Adatkezelési szabályzatunk a `https://www.komal.hu/info/adatkezeles.h.shtml` címen olvasható.

Regisztráció

Ha még soha nem vettél részt a KöMaL versenyeiben, az első lépés a *regisztráció a honlapunkon* (`https://www.komal.hu/u?a=reg`). A regisztráció során alapvető adatokat (név, születési dátum, iskola, osztály, e-mail cím) kérünk. A későbbi bejelentkezéshez szükséges jelszavadat e-mailben küldjük el.

A nagyon gyakori családnevű versenyzőknek (Horváth, Kiss, Varga stb.) javasoljuk, hogy válasszanak egy háromjegyű jelzőszámot, amit második vezetéknévként használnak (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük, hogy mind a regisztrációkor, mind pedig a tanév során beküldött dolgozataidon is minden esetben az így kibővített nevet használd.

A sikeres regisztráció után adhatod meg további adataidat (pl. felkészítőtanárok neve; levelezési cím: ide szoktuk küldeni az érettségizettek oklevelét), és nyilatkozhatsz a részletes pontszámok nyilvánosságáról vagy egyes konkrét versenyekben való részvételről.

Ha korábban már regisztráltál, akkor nincs szükség újabb regisztrációra; a tavalyi jelszavadat továbbra is használhatod; ugyanakkor szükséges lesz a személyes beállításaid áttekintése, felülvizsgálata.

Az egyes pontversenyekre az első dolgozat beküldésével nevezhetsz be.

A versenyekbe a tanév során később is be lehet kapcsolódni.

FONTOS! A versenyben csak a regisztráció után, a Munkafüzetbe beírt vagy feltöltött megoldásokat értékeljük! A regisztráció nélkül, postán vagy e-mailben beküldött megoldásokat utólag sem vesszük figyelembe!

Az osztályok számozása

A KöMaL versenyeiben az osztályokat 5-től 12-ig számozzuk. Lehet, hogy a számozás nem azonos az iskolában használt számmal. Azok számítanak 12. osztályosnak, akik most kezdik az érettségi vizsga előtti utolsó évet. 11. és 10. osztályosnak számítanak azok, akik várhatóan 2023-ban, illetve 2024-ben fejezik be a középiskolát.

Azok, akik $8+5$ éves képzésben vesznek részt, például a nyelvi előkészítő osztályok tanulói, két egymás utáni évben is 9. osztályosnak számítanak. Kérjük, ha az osztályod sorszáma nem 1-gyel nőtt tavalyhoz képest, ezt jelezd a szerkesztőségnek e-mailben.

A regisztráció módosítása

A regisztráció után az azonosításhoz szükséges adataidat (név, iskola, osztály, e-mail cím) önállóan nem módosíthatod. Ha ezek megváltoztak, kérjük, hogy fordulj e-mailben a szerkesztőséghez.

Mindenkit óvunk a regisztráció önkényes megismétlésétől, a többszörös regisztrációtól. Nincs olyan helyzet, amikor a többszörös regisztráció segítene; csak még nagyobb zavart okoz. (Ugye nem szeretnél kétszer szerepelni a pontversenyben, feleakkora pontszámmal?)

Arcképek

Ha szeretnéd, hogy fényképed megjelenjen honlapunkon a pontverseny eredményében, küldd el a szerkesztőségnek e-mailben. Ha lehet, válassz világos, egyszínű hátteret. A képeket többnyire átméretezzük és megfelelő méretűre vágjuk, ezért érdemes nagyobb felbontást használni.

Csapatversenyek

A 2021/22-es tanévtől kezdve csapatok számára is meghirdetünk több pontversenyt a hagyományos egyéni pontversenyek mellett. Várjuk

2-3 fős csapatok jelentkezését a **C** és **B** matematika,

az **I** informatika, a **G** és **P** fizika,

továbbá 2 fős csapatok nevezését az **M** fizika mérési pontversenyekre.

A csapatversenyek általános szabályai megegyeznek az egyéni nevezésű hagyományos versenyek szabályaival (a versenyek leírását lásd lentebb), feladatai megegyeznek az egyéni verseny feladataival.

A csapattagoknak egyénileg is kell regisztrálniuk, ha korábban nem regisztráltak. Ezután lehet csapatot regisztrálni. A tagok lehetnek különböző iskolából és különböző évfolyamokról is. Egy csapat abban a kategóriában fog versenyezni, ami az évfolyam szerinti legidősebb tagjának a kategóriája.

Egy személy több csapatnak is tagja lehet, illetve indulhat egyéni versenyben is, de egy pontversenyben pontosan egyszer vehet részt. Nem lehet versenyezni egyszerre a **C** csapatversenyben és a **K**, **B** vagy **A** egyéni pontversenyben, illetve a **G** csapatversenyben és a **P** egyéni versenyben.

A **C** és **B** csapatversenyeket két kategóriában: a 9–10. évfolyamosok, illetve 11–12. évfolyamosok; az **I**, **M** és **P** csapatversenyeket egy-egy kategóriában: a 9–12. évfolyamosok; továbbá a **G** csapatversenyt egy kategóriában: a 9–10. évfolyamosok számára hirdetjük meg.

Matematika versenyek

Négyféle versenyt indítunk, növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de az egyéni **K** és **B** pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. Ha kilencedik osztályos vagy, akkor a személyes beállításaid között nyilatkozhatsz, hogy melyik versenyben szeretnél részt venni.

Mindegyik versenyünkre érvényes, hogy **egy feladatra csak egy megoldást értékelünk.**

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

K-*jelű matematika feladatok* – az ABACUS és a KöMaL Közös pontversenye Kilencedikes Kezdőknek

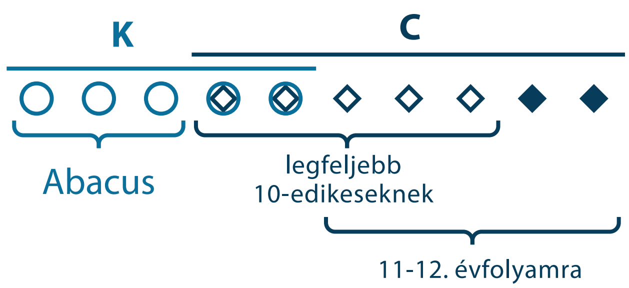
A **K**-pontversenyben csak kilencedik osztályosok indulhatnak. Azoknak ajánljuk, akik még csak most ismerkednek a KöMaL-lal. Szeptembertől májusig kilenc fordulóban, havonta öt feladat jelenik meg; ezek közül szeptembertől márciusig három feladat az ABACUS pontversenyével közös, mely feladatokat az *ABACUS matematikai lapok* bocsátja a KöMaL rendelkezésére. **Mindegyik feladat teljes megoldása 5 pontot ér.**

Az ABACUS pontversenyében továbbra is az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói vehetnek részt.

Azok a 9-edikesek, akik **K**-ban indulnak, nem lehetnek tagjai **C** pontversenybe nevezett csapatnak.

C-*jelű matematika gyakorlatok*

A **C**-pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a **B** és az **A** kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából. **A C pontverseny első két feladata megegyezik a K pontverseny utolsó két feladatával, jelölésük K/C.** A megoldásra kapott pontszámok mindkét pontversenybe beszámítanak – hasonlóan az **I/S** informatika feladatok pontszámításához. A **K** pontversenyben továbbra is csak 9. évfolyamos, illetve nyelvi előkészítő évfolyamra járó tanulók vehetnek részt, ugyanakkor versenyezhetnek egyszerre mind a **K**, mind a **C** pontversenyekben – az utóbbiban a 10-edikesekkel egy kategóriában.



A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható.

A **C**-pontversenyt egyéniben három korcsoportban: 5–8., 9–10., illetve 11–12. osztályosok, csapatban pedig két korcsoportban értékeljük: 5–10., illetve 11–12. osztályosok. Aki a **C** csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg sem a **K**, sem a **C**, sem a **B** versenyben (de indulhat a **B** csapatversenyben).

B-*jelű matematika feladatok*

A **B**-pontversenyben havonta összesen nyolc feladatot tűzünk ki, de havonta mindenkinek **legfeljebb hat** megoldását számítjuk be a pontversenybe (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be, lásd lentebb). Az eredményes versenyzéshez tehát nincs szükség valamennyi feladat megoldására; ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot.

A **B**-feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak. A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (többnyire 3–6).

Az egyéni **B**-pontverseny eredményét öt korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11., illetve 12. évfolyamokban; a csapatversenyét pedig két korcsoportban értékeljük: 5–10., illetve 11–12. osztályosok. Aki a **B** csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg a **B** versenyben.

A-*jelű nehezebb matematika feladatok*

Az **A**-pontverseny a legfelkészültebb diákok számára jelent kihívást. Azoknak ajánljuk, akik tudományos kutató pályára vagy nemzetközi versenyekre készülnek.

Havonta két vagy három **A**-feladatot tűzünk ki, mindegyik feladatra legfeljebb 7 pont kapható. Az A-verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek.

Fizika versenyek

Háromféle fizika versenyt indítunk: **M**, **G** és **P** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de az egyéni **G** és **P** pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. A legfeljebb 10. osztályosoknak honlapunkon, a személyes beállításaik között kell nyilatkozniuk, hogy a **P**- és **G**-versenyek közül melyikben kívánnak részt venni.

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

M-*pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta egy mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6-6 pontot lehet szerezni.

A mérés elvégzéséhez egyéni versenyzőként is szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy adatait a mérési jegyzőkönyv elején a versenyző adatai mellett tüntessétek fel. Lehet kétfős csapatban is indulni a versenyen, azaz az egyéni versenyzők és a csapatok egy közös versenyen indulnak. Aki egy csapat tagjaként indul az **M** versenyben, nem versenyezhet egyénileg is, csak másik versenyben.

G-*jelű fizika gyakorlatok*

A **G**-pontversenyben legfeljebb 10. osztályosok vehetnek részt. Azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a **P**-feladatokat. Többnyire az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat találnak a versenyzők, így azok is eséllyel indulhatnak, akik még nem rendelkeznek feladatmegoldó rutinnal, de a gyakorlatok megoldásával és beküldésével felkészülhetnek arra, hogy a következő években eredményesen szerepelhessenek a **P**-pontversenyben.

Minden hónapban négy **G**-gyakorlatot tűzünk ki, az elérhető pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött gyakorlatok közül, de **havonta legfeljebb három** feladat megoldását (először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe.

Az egyéni **G**-pontverseny eredményét három korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9. és 10. évfolyamokban; a csapatversenyét pedig egyetlen korcsoportban: 5–10. osztályosok. Aki a **G** csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg sem a **G**, sem a **P** versenyben (de indulhat a **P** csapatversenyben).

P-*jelű fizika feladatok*

Havonta nyolc (esetenként kilenc) elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. **Az 5–8. évfolyamosoknak havonta legfeljebb három, a 9–12. évfolyamosoknak legfeljebb négy megoldását** számítjuk be a pontversenybe (azonban először a nem versenyszerűeket).

Az elméleti versenyt egyénileg korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük, a csapatversenyét pedig egyetlen korcsoportban: 5–12. osztályosok. Aki a **P** csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg a **P** versenyben.

Informatika versenyek

I-*pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki valamennyi korosztály számára közösen. Mindegyik feladat 10 pontot ér. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az **I**-pontversenybe.

Az **I** jelű feladatok programozási és informatika alkalmazói feladatok. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést is gyakorolhatják.

Az **I/S** jelű feladatok az I jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az S jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok megtalálhatók a `http://tehetseg.inf.elte.hu/nemes` és a `https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2022_2023_vk/116_informatika_2223.pdf` oldalakon.

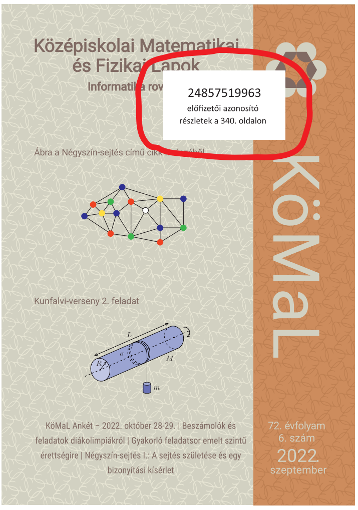
Aki az **I** csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg sem az **I**, sem az **S** versenyben.

S-*pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S**-pontverseny egy **S** jelű nehezebb programozási feladatból és az **I**-pontversenyben is résztvevő **I/S** feladatból áll. A feladatokra legfeljebb 10 pont kapható. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészülést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és ajánlott algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott angol nyelvű leírás (IOI Syllabus) tartalmazza, lásd `https://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/`. Az **S** és **I/S** feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e a megadott időkorláton belül. Az S pontversenyt egy kategóriában (5–12. évfolyam) értékeljük.

A feladatok megjelenése

Új feladatokat havonta, szeptembertől májusig tűzünk ki. A feladatokat megtalálod nyomtatott számunkban és honlapunkon.



Honlapunkon a feladatokat, szeptember kivételével, az adott hónap 28. napján hozzuk nyilvánosságra. Előfizetőink azonban az adott típusú feladat beküldési határidejét követő naptól elérhetik a következő havi feladatok szövegét, és elkezdhetik a munkát. Amennyiben előfizettél a KöMaL-ra, a személyes beállításaid között add meg előfizetői kódodat. Az előfizetői azonosítót megtalálod a szeptemberi szám címlapjára ráragasztott címkén.

Azok az előfizetőink, akik (például életkoruknál fogva) nem versenyzőink, regisztráció és az előfizetői kód megadása után, a versenyzőkkel együtt szintén elérhetik a feladatok szövegét.

Egy előfizetői kódot csak egy személy használhat.

A dolgozatok tartalma

Kérjük, tanulmányozd a korábbi számainkban és honlapunkon megjelent megoldásokat, ezek sokat segíthetnek annak megértésében, hogy milyen formát és részletességet várunk el a beküldött megoldásoktól.

Matematika és fizika elméleti megoldások

A megoldás leírása azt jelenti, hogy az olvasót végigvezeted a megoldásod lépésein. Törekedj a rövid, olvasható leírásra. Próbáld alaposan átgondolni a lépések sorrendjét, és lerövidíteni a megoldást. A gondos leírás sok időt igényel; ne hagyd az utolsó pillanatra.

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár; puszta eredményközlésért nem adunk pontot. A kimondott állításokat igazolni kell. Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben ki kell mondani a felhasznált tételt, és fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben, vagy éppen a KöMaL egy korábbi feladatában a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének fejlesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk pontot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik, vagy azt mutatják meg, hogy a feladat egy nehezebb tétel speciális esete vagy triviális következménye; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.**

Ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használsz fel, és ezekből idézel, tüntesd fel a felhasznált forrásokat.

A **fizika feladatoknál** előfordulhat, hogy a feladat szövege nem tartalmaz a numerikus megoldáshoz szükséges minden konkrét információt, például bizonyos anyagi állandókat, földrajzi vagy csillagászati mennyiségek számszerű értékeit. Ilyenkor vagy a Négyjegyű függvénytáblázatokban, vagy az **interneten** kereshetjük meg a szükséges adatokat.

A hosszabb, összetettebb gondolatmeneteket érdemes tagolni, részekre bontani; használj, bekezdéseket, címeket és alcímeket. A különböző segédállításokra, képletekre és ábrákra könnyebb hivatkozni, ha megszámozod.

A geometria feladatok megoldásának fontos részei az ábrák, amelyeken követni és ellenőrizni lehet a megoldás lépéseit. Mindig rajzolj ábrát, **az ábra nélküli, vagy nem megfelelő ábrát tartalmazó megoldásokat nem tekintjük teljesnek. A gondolatmeneted azon lépéseire, amelyekhez nincs mellékelve a szükséges ábra, nem kapsz pontot.** Bonyolultabb ábrák esetén az egyes geometriai objektumokat szövegesen is definiáld (pl. „legyen P' a P pont tükörképe az e egyenesre"). Elektronikus beküldés esetén ügyelj a megfelelő felbontásra. A felbontás akkor megfelelő, ha a számítógép képernyőjén elfér, és a fontos részletek is jók kivehetőek. A jó ábra mérete többnyire 500–1000 pixel között lehet.

A matematika példák megoldásaként számítógépes programokkal – beleértve az olyan online szolgáltatásokat is, mint például a Wolfram Alpha – kiszámított eredményeket nem fogadunk el. Ha harmincnál több esetet vizsgálsz, pedig lényegesen le lehetett volna szűkíteni az esetek számát, azt is úgy tekintjük, mintha programot írtál volna.

Mérési feladatok

A mérés leírása (mérési jegyzőkönyv) feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg indokolatlanul sok tizedesjeggyel, hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív" részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást.

Informatika megoldások

Az **I**-jelű programozási feladatok megoldását Basic, C++, C#, Java, Pascal vagy Python nyelvek egyikén kell elkészítened. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezetet használhatsz, javasoljuk az Oktatási Hivatal honlapján elérhető emelt szintű érettségi szoftverlista fejlesztőeszközeit.

Az **I**-pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához szintén az előbbi szoftverlista eszközeit javasoljuk. Az alkalmazói feladatokat a listán szereplő alkalmazásokkal fogjuk értékelni. Az egyéb használható alkalmazásokat egy-egy feladat leírása tartalmazza, ezek jórészt szabadon fölhasználható programok.

Az **I/S** és **S**-jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészítened. A megoldáshoz dokumentációt kell írnod és a forráskódot kommentekkel kell kiegészítened. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk. A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében.

Az **I/S** és **S**-jelű programozási feladatok megoldását ellenőrizd a `http://ideone.com` vagy a `http://onlinegdb.com` tesztkörnyezetben a feladathoz elérhető bemenetekkel. Ezeknek a feladatoknak az értékelése részben automatikusan történik, ezért fontos, hogy a program az előírás szerinti formában adjon kimenetet.

A megoldások elkészítése és beküldése

Megoldásodat a Munkafüzetben küldd be.

A matematika és fizika dolgozatokat honlapunkon megszerkesztheted vagy kész fájl formájában feltöltheted. Az informatika feladatok megoldását csak feltölteni tudod.

Azokat a dolgozatokat, amelyek több feladat megoldását tartalmazzák egy fájlban, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük. Nem versenyszerű továbbá az olyan megoldás, ahol rendes képletek helyett nehezen értelmezhető karaktersorozatok vannak, pl. `x2+((1+5+2sqrt(5)x2)/4` vagy `(1+gyök5)/2*x`.

A megoldások online szerkesztése az Elektronikus Munkafüzetben

Az Elektronikus Munkafüzet a honlapunk része. Webes felület, amely lehetőséget ad a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére. A megoldásaidat módosíthatod, átszerkesztheted a beküldési határidőig.

Képletek szerkesztéséhez a TEX rendszert használjuk. Javasoljuk, hogy honlapunkon járd végig a *TEX tanfolyamot* (`https://www.komal.hu/mf?a=tk`).

Kész fájlok feltöltése

Megoldásaidat az otthoni vagy iskolai számítógépeken is elkészítheted, és a kész fájlt honlapunkon feltöltheted. Matematika és fizika feladatok megoldása esetén a többféle operációs rendszerben olvasható **PDF formátumot** használd. A dokumentum elején legyen ott az ún. fejléc: a feladat száma pirossal, név, osztály, város, iskola.

Kézírással készült megoldásodat vonalazás és négyzetháló nélküli, fehér papírra írd, majd megfelelő minőségben, egy darab pdf fájlként töltsd fel a Munkafüzetbe.

Ügyelj arra, hogy a kép jól olvasható legyen, és a felbontás ne legyen se túl nagy, se túl alacsony. Ha fényképezel, érdemes több képet készíteni szórt (természetes) fénynél, és a legjobban sikerült képet használni. A képet fordítsd álló helyzetbe, a szélét vágd körbe, hogy csak a megoldás maradjon a képen, végül méretezd át.

Fényképek feldolgozására sokféle képmanipuláló programot és telefonos applikációt használhatsz. Mi a CamScannert ajánljuk leginkább, mert ezzel könnyen készíthetsz egy darab megfelelő pdf fájlt.

Az informatika megoldások beküldése

Az informatika feladatok megoldásait kizárólag kész fájlként tudod feltölteni a Munkafüzetbe. Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldened. Ügyelj arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

A beküldési határidő

A beküldési határidő matematikából a lap megjelenését követő hónap 10., fizikából és informatikából a 15. napja; szombat, illetve munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. Vedd figyelembe az internet esetleges hibáit és a beküldési határidő idő előtti órákban a szerver gépünk esetleges túlterheltségét; ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit a honlapunkon folyamatosan közöljük. Versenyzőinket e-mailben is értesítjük a pontszámok változásairól. Javítóink a pontszámon kívül szöveges értékelést is küldhetnek, például felhívhatják a figyelmedet a dolgozatod hiányosságaira. Ez azonban nem kötelező, ugyanis a javítóknak nem ritkán százas nagyságrendű dolgozatot kell kijavítani, amit ráadásul az egyetemi tanulmányaik mellett tesznek.

Reklamációk

A dolgozatok értékelése után az Elektronikus Munkafüzetben rövid kérdést vagy üzenetet küldhetsz a javítónak, ő pedig ugyanott válaszolhat. A különböző feladatokat különböző javítók javítják, ezért mindig csak az adott feladatról kérdezz.

Ügyelj az udvarias hangvételre. Olyan módon kérdezz, amit szemtől-szemben, akár a tanáraiddal vagy a szüleiddel szemben is helyesnek tartanál.

Eldöntetlen vita, reklamáció esetén a szerkesztőséghez fordulhatsz. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el a `szerk@komal.hu` címen.

Szabálytalan versenyzés

FONTOS! Akik egyénileg versenyeznek egy adott pontversenyben, azoknak önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait. Tilos a kitűzött feladatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, másoktól segítséget kérni vagy elfogadni a feladatok megoldásához. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük.* Egy csapat tagjai egymással megbeszélhetik, megvitathatják az adott verseny feladatait, majd minden feladatra egy közös megoldást adnak be. A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszélyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket és csapatokat kizárjuk a versenyből.

A végeredmény közzététele

A versenyek végeredménye az összes dolgozat kijavítása után, várhatóan augusztus elején a honlapunkon, majd a 2023. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2023. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2023. évi *KöMaL Ifjúsági Ankét* rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez.

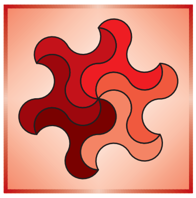
Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket postán vagy e-mailben juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott feladatjavaslatai közül a legszebbeket különdíjban részesítjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása



B. 5220. *Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy megadható 1-től 2^{n+2}-ig n négyzetszám úgy, hogy közülük akárhány különbözőt összeadva (beleértve az egytagú összegeket és az összes szám összegét is) csupa különböző számot kapjunk.*[*]

(*6 pont*) Javasolta: *Freud Róbert* (Budapest)

Megoldás. Legyen $a_1 = 1$ és tetszőleges $2 \leqslant i \leqslant n$-re legyen $a_i = \lceil \sqrt{2} a_{i-1} \rceil$, ahol $\lceil a \rceil$ az a valós szám felső egészrészét jelöli, azaz azt a legkisebb egész számot, amely nem kisebb, mint a. Ekkor a rekurzívan definiált $a_1, \ldots, a_n$ számok pozitív egészek és különbözőek, mert $\sqrt{2} > 1$, így $a_i = \lceil \sqrt{2} a_{i-1} \rceil \geqslant \sqrt{2} a_{i-1} > a_{i-1}$. Mivel különböző számok négyzete különböző, ezért $a_1^2, \ldots, a_n^2$ pontosan n darab különböző négyzetszám.

Lemma. *Az előzőekben definiált a_i számok négyzeteire igaz, hogy*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 < a_{k+1}^2.$$

A lemma bizonyítása. Az állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás igaz $k = 1$-re, mert ekkor az összeg $a_1^2 = 1$, amely kisebb $a_2^2 = 4$-nél. Az indukciós lépésben az mondható el, hogy ha k-ra igaz az állítás, akkor $k+1$-re is, hiszen

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 < a_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 = 2a_{k+1}^2 = \left(\sqrt{2} a_{k+1}\right)^2 \leqslant \left\lceil \sqrt{2} a_{k+1} \right\rceil^2 = a_{k+2}^2.$$

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

[*] Lásd Freud Róbert cikkét a KöMaL 2022. januári számának 2. oldalán.

Rátérünk annak a bizonyítására, hogy a szóban forgó négyzetszámokból képzett összes részösszeg különböző, azaz az $a_1^2,\dots,a_k^2$ ($1\leqslant k\leqslant n$ egész) számok közül akárhogyan választunk ki néhányat, azok összege csakis akkor egyenlő, ha pontosan ugyanazokat a számokat választjuk ki. Most is k-ra vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás triviális $k=1$-re, hiszen az üres összegen kívül maga a_1^2 az egyetlen részösszeg. Az indukciós lépésben feltesszük, hogy az $a_1^2,\dots,a_k^2$ számokból képzett összes részösszeg különböző; majd tekintjük az $a_1^2,\dots,a_{k+1}^2$ számokból képzett részösszegeket. Ezek közül az a_{k+1}^2-t nem tartalmazó részösszegek nem lehetnek egyenlők, hiszen ezek az előző lépésben is részösszegek voltak, így hivatkozhatunk az indukciós feltételre. Ha két résszösszeg közül mindkettő tartalmazza a_{k+1}^2-t, akkor szintén nem lehetnek egyenlők, hiszen mindkét oldalról elhagyva a_{k+1}^2-t az előző esetet kapjuk. Tételezzük fel végül, hogy egy a_{k+1}^2-t tartalmazó és egy ezt nem tartalmazó részösszeg egyenlő, például $S_1=S_2+a_{k+1}^2$, amelyből S_2 nemnegativitása miatt

$$S_1\geqslant a_{k+1}^2 \tag{1}$$

adódik. Indirekt feltevésünk szerint S_1 egy, az $a_1^2,\dots,a_k^2$ számokból képezhető részösszegként is előáll, aminek minden tagja pozitív, így $S_1\leqslant\sum\limits_{i=1}^k a_i^2$, amelyre a lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$S_1\leqslant\sum_{i=1}^k a_i^2<a_{k+1}^2,$$

ami ellentmond (1)-nek, ezért az $a_1^2,\dots,a_{k+1}^2$ számokból kapható részösszegek közül semelyik kettő sem lehet egyenlő. Ezzel a teljes indukció végére értünk, és $k=n$-re épp azt kaptuk, hogy a kiválasztott n négyzetszámból képzett minden részösszeg különböző.

Már csak azt kell belátnunk, hogy az $a_1^2,\dots,a_n^2$ számok 2^{n+2}-nél kisebbek. Korábban láttuk, hogy $0<a_1<\dots<a_n$, így elég azt megmutatnunk, hogy $a_n^2<2^{n+2}$. Először írjuk fel a_1,a_2,a_3 pontos értékét. Mivel $a_1=1$, ebből $a_2=\lceil\sqrt2\,\rceil=2$ (hiszen $1<\sqrt2<2$), ebből pedig $2\sqrt2>2\cdot1=2$ miatt $a_3=\lceil2\sqrt2\,\rceil=3$ (hiszen $(2\sqrt2\,)^2=8<3^2$), tehát $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$. A további értékeket felülről becsüljük. Mivel $a_{i+1}=\lceil\sqrt2a_i\rceil<\sqrt2a_i+1$, ezért a $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=3$, $i\geqslant4$-re $b_i=\sqrt2b_{i-1}+1$ sorozat felülről becsüli az a_i sorozatot. Ez teljes indukcióval bizonyítható, hiszen $a_1\leqslant b_1$, $a_2\leqslant b_2$, $a_3\leqslant b_3$, és ha $a_i\leqslant b_i$ $(i\geqslant4)$, akkor

$$a_{i+1}<\sqrt2a_i+1\leqslant\sqrt2b_i+1=b_{i+1}.$$

Most újabb teljes indukcióval belátjuk, hogy $i\geqslant3$-ra

$$b_i=3\cdot2^{\frac{i-3}{2}}+\sum_{j=0}^{i-4}\sqrt2^j.$$

Ez igaz $i=3$-ra, mert

$$b_3=3=3\cdot 2^0+0=3\cdot 2^{\frac{3-3}{2}}+\sum_{j=0}^{3-4}\sqrt{2}^j,$$

hiszen az összegzés itt egy üres összeg. Az indukciós lépésben tegyük fel, hogy egy $i\geqslant 3$-ra működik a képlet. Ekkor

$$b_{i+1}=\sqrt{2}b_i+1=\sqrt{2}\left(3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\sum_{j=0}^{i-4}\sqrt{2}^j\right)+1=$$

$$=3\cdot 2^{\frac{i-2}{2}}+\sum_{j=0}^{i-4}\sqrt{2}^{j+1}+1=3\cdot 2^{\frac{(i+1)-3}{2}}+\sum_{j=0}^{(i+1)-4}\sqrt{2}^j,$$

ahol az utolsó lépésben 1-gyel megnöveltük az összegzés j indexét, az 1 pedig az összeg első tagja lett (ekkor $j=0$). Ezzel igazoltuk, hogy a képlet működik.

A képletben szereplő szumma tagjai egy olyan mértani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja 1, hányadosa $\sqrt{2}$, így alkalmazhatjuk az összegképletet $i\geqslant 3$-ra:

$$b_i=3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{\sqrt{2}^{i-3}-1}{\sqrt{2}-1}=3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{2^{\frac{i-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}.$$

Tudjuk, hogy b_i felülről becsüli a_i-t, ezért

$$a_i\leqslant 3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{2^{\frac{i-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1},$$

és mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelve az ezzel ekvivalens

$$a_i^2\leqslant\left(3\cdot 2^{\frac{i-3}{2}}+\frac{2^{\frac{i-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk, minden $i\geqslant 3$-ra. Nyilván $n=1$-re és $n=2$-re az állítás igaz, hiszen $a_1=1<2^3=8$ és $a_2=2<2^4=16$, $n\geqslant 3$-ra pedig használhatjuk a fenti felső becslést $i=n$-t behelyettesítve. Ebből

$$a_n^2\leqslant\left(3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}}+\frac{2^{\frac{n-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2. \tag{2}$$

Már csak be kell látnunk, hogy a jobb oldal nem nagyobb 2^{n+2}-nél, amelyhez tekintjük a hányadosukat és átalakítjuk a következőképpen:

$$\frac{\left(3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}}+\frac{2^{\frac{n-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^2}{2^{n+2}}=\left(\frac{3\cdot 2^{\frac{n-3}{2}}+\frac{2^{\frac{n-3}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}}{2^{\frac{n+2}{2}}}\right)^2=$$

$$= \left(3 \cdot 2^{-\frac{5}{2}} + \frac{2^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 < \left(3 \cdot 2^{-\frac{5}{2}} + \frac{2^{-\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 \approx 0{,}9571^2 < 1.$$

Láthatjuk, hogy a tört értéke 1-nél kisebb, és mivel a számlálója és a nevezője is pozitív, a számláló biztosan kisebb a nevezőnél; tehát

$$\left(3 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} + \frac{2^{\frac{n-3}{2}} - 1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 < 2^{n+2},$$

amit (2)-vel összevetve

$$a_n^2 < 2^{n+2}$$

adódik. Ezzel a bizonyítás utolsó lépését is befejeztük.

Duchon Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Bényei Borisz, Chrobák Gergő, Duchon Márton, Kalocsai Zoltán, Sági Mihály és Varga Boldizsár. 5 pontos 3, 4 pontos 4 dolgozat. 3 pontot 2, 2 pontot 1, 0 pontot 2 versenyző kapott.

B. 5231. *Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre teljesül, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1).$$

(*4 pont*)

I. megoldás. A feladat állításában szereplő egyenlőség mindkét oldalát átalakítjuk. Nézzük először a bal oldalt, ahol többször is felhasználjuk a mértani sorozat összegképletéből adódó $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ egyenlőséget ($n \in \mathbb{Z}^+$):

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} =$$

$$= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}) + (2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) + \ldots + (2^{n-1}) =$$
$$= (2^n - 1) + (2^n - 1 - 2^0) + (2^n - 1 - 2^0 - 2^1) + \ldots +$$
$$+ \big(2^n - 1 - (2^0 + \ldots + 2^{n-2})\big) =$$
$$= n \cdot 2^n - \big(1 + (1 + 2^0) + (1 + 2^0 + 2^1) + \ldots + (1 + 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-2})\big) =$$
$$= n \cdot 2^n - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = n \cdot 2^n - (2^n - 1) = n \cdot 2^n - 2^n + 1.$$

Most a jobb oldalon szereplő összegben bontjuk fel a zárójelet:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2^n - 2^{n-k});$$

látjuk, hogy a 2^n tagban nem szerepel k, vagyis az a tag csak n-től függ, és pontosan n-szer szerepel az összegben, ezért

$$\sum_{k=1}^{n}(2^n-2^{n-k})=\sum_{k=1}^{n}2^n-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}=n\cdot 2^n-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}.$$

Az utolsó tagként szereplő összeget kibontjuk, így azt kapjuk, hogy

$$n\cdot 2^n-(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^0)=n\cdot 2^n-(2^n-1)=n\cdot 2^n-2^n+1.$$

Megmutattuk, hogy a feladatban szereplő egyenlőség mindkét oldalának értéke

$$n\cdot 2^n-2^n+1,$$

tehát egyenlők. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n=1$-re helyes, hiszen $1\cdot 2^0=1=2^0(2^1-1)$. Tegyük fel, hogy valamely $n=i$ pozitív számra igaz az állítás, majd bontsuk ki az összegzéseket:

$$\sum_{k=1}^{i}k\cdot 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{i}2^{i-k}\cdot(2^k-1),$$

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+i\cdot 2^{i-1}=2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1).$$

Felírjuk az állítást $(i+1)$-re, majd a jobb oldalon az utolsó kivételével minden tagból kiemelünk 2-t:

$$\begin{aligned}&1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+i\cdot 2^{i-1}+(i+1)2^i=\\&\qquad=2^i(2^1-1)+2^{i-1}(2^2-1)+\ldots+2^1(2^i-1)+2^0(2^{i+1}-1),\\&1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\ldots+i\cdot 2^{i-1}+(i+1)2^i=\\&\qquad=2\big(2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1)\big)+2^0(2^{i+1}-1).\end{aligned}$$

Most a bal oldalon alkalmazzuk az indukciós feltevést, majd vonjunk ki mindkét oldalból $\big(2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1)\big)$-t, így azt kapjuk, hogy

$$(i+1)\cdot 2^i=2^{i-1}(2^1-1)+2^{i-2}(2^2-1)+\ldots+2^0(2^i-1)+2^0(2^{i+1}-1).$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$i\cdot 2^i+2^i=i\cdot 2^i-(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+2+1)+2^{i+1}-1,$$

rendezzük, majd a zárójelben lévő mértani sorozat első i tagjának összegét számítsuk ki az összegképlet segítségével:

$$2^i=-\left(\frac{2^i-1}{2-1}\right)+2^{i+1}-1.$$

Ebből rendezés után a $2^i + 2^i = 2^{i+1}$ egyenlethez jutunk, abból pedig a $2 \cdot 2^i = 2^{i+1}$ azonossághoz; tehát a bizonyítandó állítás minden pozitív egész n-re teljesül.

Szittyai Anna (Szeged, Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás (Ez olvasható a honlapon*). Tekintsük az alábbi, $n \times n$-es táblázatot (a táblázat i. sorának j. eleme 2^{j-1}, ha $i \leqslant j$, egyébként 0).

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\
0 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\
0 & 0 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 2^3 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2^{n-1}
\end{array}$$

A bizonyítandó egyenlet mindkét oldalán a táblázatban szereplő számok összege áll:

- A $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ összegben oszloponként adjuk össze a számokat, a k-adik oszlopban éppen $k \cdot 2^{k-1}$ a számok összege.
- A $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1)$ összegben soronként adjuk össze a számokat, hiszen az $(n-k+1)$-edik, azaz alulról k-adik sorban a számok összege éppen

$$2^{n-k} + \ldots + 2^{n-1} = 2^{n-k} \cdot (1 + \ldots + 2^{k-1}) = 2^{n-k} \cdot (2^k - 1).$$

Megjegyzés. Érdemes elmesélni, hogy miként született ez a feladat.

Képzeljük el, hogy 2^n különböző magasságú embert szeretnénk tornasorba állítani kevés összehasonlítással (egy összehasonlítással két embert tudunk összehasonlítani).

Egy lehetőség, hogy egyenként „illesztjük be” az embereket a tornasorba. Ha $t-1$ embert már sorba rendeztünk, akkor a t. ember helyét bináris kereséssel meg tudjuk találni a tornasorban $\lceil \log_2(t) \rceil$ összehasonlítással, a legszerencsétlenebb esetben is. Ezzel a módszerrel a legszerencsétlenebb esetben éppen $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ összehasonlításra lesz szükségünk a 2^n ember tornasorának felállításához (hiszen éppen 2^{k-1} különböző olyan t érték van, amelyre $\lceil \log_2(t) \rceil = k$).

Egy másik lehetőség, hogy először 2^{n-1} diszjunkt párt összehasonlítunk, aztán kétkét párt összefésülünk egy-egy négyes tornasorrá, majd két-két négyest egy-egy nyolcas

* A „Pontverseny” menüpont „Feladatok” részében mindig az aktuális tanév, míg a „Korábbi évek” részben értelemszerűen az elmúlt tanévek feladatai és megoldásai találhatóak meg.

tornasorrá, és így tovább. Így 2^{n-k} alkalommal fogunk két 2^{k-1} méretű tornasort összefésülni. Könnyen meggondolható, hogy két s tagú tornasor összefésüléséhez – a legrosszabb esetben – $2s-1$ összehasonlítás szükséges. Tehát ezzel a módszerrel a legszerencsétlenebb esetben $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\cdot(2^k-1)$ összehasonlításra lesz szükségünk.

A feladat kitűzője rendezési algoritmusokat tanított matekórán, amikor kíváncsiságból összehasonlította $n=7$ esetén a két módszer lépésszámát. Meglepve tapasztalta, hogy mindkét esetben éppen 769-et kapott eredményül – jobban belegondolva kiderült, hogy ez nem egy véletlen egybeesés.

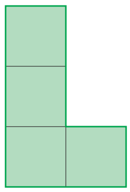
Összesen 91 dolgozat érkezett. 4 pontot 90, 3 pontot 1 versenyző kapott.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (729–733.)

K. 729. 2022 perc múlva éjfélt fog ütni a győri városháza toronyórája. Mekkora szöget zár be most a toronyóra kis- és nagymutatója?

K. 730. Behúztuk egy kör nyolc húrját úgy, hogy a húrok metszéspontjainak száma a lehető legtöbb legyen. Hány részre bontja ekkor ez a nyolc húr a körlapot?

K. 731. Egy 4×6-os téglalapot szeretnénk egyrétűen lefedni az *ábrán* látható L-alakú lappal egybevágó lapokkal. Az L-alakú lapokat tetszés szerint elforgathatjuk, illetve megfordíthatjuk. Van-e legalább 36 különböző lefedés?



K/C. 732. Négy matematikatanár egyike sem idősebb 70 évesnél és mindegyikük életkora években számítva prímszám. Hány éves a legfiatalabb, ha átlagéletkoruk 60 év, és nincsenek közöttük egykorúak?

K/C. 733. Mekkora a területe annak a legkisebb téglalapnak, amelybe beleírható egy olyan paralelogramma, amelynek egyik szöge 60°, egy-egy oldala 4 cm és 6 cm hosszú és két oldala a téglalap két oldalára illeszkedik?

❄

Beküldési határidő: 2022. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (732–733., 1728–1732.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 732. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 733. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1728. Határozzuk meg a

$$-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}=\{x\}$$

egyenlet megoldásainak pontos értékét.

($\{x\}$ az x törtrésze, vagyis az x-nek és x-nél nem nagyobb egészek legnagyobbikának különbsége.)

C. 1729. Az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalára mint átmérőre a k_1, illetve k_2 félköröket rajzoljuk a négyzeten kívülre. A két félkörív felezőpontja E, illetve F. A DE és AF szakasz felezőpontja P, illetve Q. Mutassuk meg, hogy P a négyzet AC átlójára, Q pedig a négyzet BD átlójára illeszkedik.

C. 1730. Határozzuk meg az összes $\overline{0{,}abc}$ alakú tizedestörtet, amelyben a, b, c számjegyek, $a\neq 0$ és teljesül, hogy $\overline{0{,}abc}=\frac{a}{a+b+c}$.

(*Horvát feladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1731. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai $AB>CD$, a trapéz középvonala az AC átlót az E, a BD átlót az F pontban metszi. A CD szakasz hossza az AB és EF szakaszok hosszának

a) számtani,

b) mértani közepe.

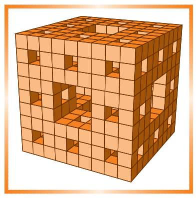
Határozzuk meg, hogy a két eset közül melyikben lesz nagyobb az $\frac{AB}{CD}$ arány értéke.

C. 1732. Legyen U a 337-nél nagyobb és 733-nál nem nagyobb prímszámok halmaza. Hány olyan 4-elemű részhalmaza van U-nak, amelynek a 467 vagy a 499 eleme?

❄

Beküldési határidő: 2022. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5254–5261.)



B. 5254. Bizonyítsuk be, hogy bármely két, 3-mal nem osztható páratlan szám négyzetének különbsége osztható 24-gyel.

(*3 pont*) (*Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok,* 1943)

B. 5255. Tükrözzük középpontosan az ABC háromszög A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, és C csúcsát A-ra, így kapjuk rendre a C_1, A_1 és B_1 pontokat. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető.

(*3 pont*)

B. 5256. András egy év mind az 52 hetében egy-egy ugyanúgy kitöltött szelvénnyel játszik az ötöslottón. Bea ellenben az év utolsó sorsolása előtt vesz 52 szelvényt, és azokat (páronként különbözőféleképpen kitöltve) egyszerre játssza meg. Igaz-e, hogy ugyanannyi esélye van Andrásnak és Beának arra, hogy legyen telitalálatos szelvényük?

(*4 pont*)

B. 5257. Az ABC hegyesszögű háromszögben a magasságok AA_1, BB_1, illetve CC_1, az AB oldal felezőpontja F. A k kör átmegy az F és a C_1 pontokon, valamint az A_1C_1 és B_1C_1 szakaszok C_1-en túli meghosszabbítását a P, illetve a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy $A_1P = B_1Q$.

(*4 pont*)

B. 5258. Igaz-e, hogy minden pozitív egésznek van olyan pozitív többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege legfeljebb 2022?

(*5 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5259. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + 4 &= z, \\ y^2 - 3z + 4 &= w, \\ z^2 - 3w + 4 &= x, \\ w^2 - 3x + 4 &= y. \end{aligned}$$

(*4 pont*) *Bencze Mihály* (Brassó) javaslata alapján

B. 5260. A k kör AB húrjának G és H pontjaira $AG = GH = HB = 1$. A kör egyik AB ívének felezőpontja legyen F. Az FH és FG szelők a kört másodszor a C, illetve D pontban metszik. Mutassuk meg, hogy $CD = BC^2$.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5261. Kezdő és Második a 100 csúcsú teljes gráf élein játszanak. Felváltva lépnek, Kezdő minden lépésnél egy még ki nem színezett élt pirosra, Második pedig minden lépésnél egy (még ki nem színezett) élt kékre színez. A játék akkor ér véget, ha vagy van 4 olyan csúcs, melyek között mind a 6 él piros, ekkor Kezdő nyer; vagy van 4 olyan csúcs, melyek között mind a 6 él kék, ekkor Második nyer; vagy pedig egyik sem teljesül, és nincs több beszínezhető él, ekkor az eredmény döntetlen. Kinek van nyerő stratégiája?

(*6 pont*)

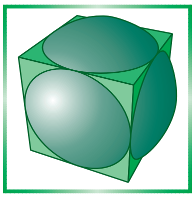
❄

Beküldési határidő: 2022. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2022. október 7-én, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A verseny helyszíneiről és lebonyolításáról szóló információkat később tesszük közzé a `https://www.bolyai.hu/versenyek-kurschak-jozsef-matematikai-tanuloverseny/` oldalon.

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (830–832.)

A. 830. Ha $H \subset \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z}$, legyen h_n a H azon véges részhalmazainak a száma, melyekben a számok összege n. Van-e olyan $H \subset \mathbb{Z}$, melyre $0 \notin H$, és minden $n \in \mathbb{Z}$-re h_n egy (véges) páros szám? (Az üres halmaz elemeinek összege 0.)

Javasolta: *Beke Csongor* (Cambridge)

A. 831. Az ABC háromszög BC oldalának F a felezőpontja. Az A-n áthaladó, BC-t F-ben érintő kör messe az AB és AC oldalakat rendre az M és N pontokban. A CM és BN szakaszok metszéspontja legyen X. A BMX és CNX háromszögek köréírt köreinek második metszéspontja legyen P. Igazoljuk, hogy A, F és P egy egyenesre illeszkednek.

A. 832. Tegyük fel, hogy minden embernek egymástól függetlenül $0, 1, \ldots$ vagy n gyermeke születhet, és annak a valószínűsége, hogy éppen i gyermeke születik, p_i, ahol $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1$ és $p_n \neq 0$. (Ez az ún. Galton–Watson folyamat.)

Mely n pozitív egész és $p_0, p_1, \ldots, p_n$ valószínűségek esetén lesz maximális annak a valószínűsége, hogy egy adott ember utódai éppen a tizedik generációban halnak ki?

Beküldési határidő: 2022. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 568. Az öreg király összehívta tanácskozásra férfi leszármazottjait. Így eljöttek a fiai, unokái, dédunokái stb. A király memóriája már nem a legjobb, és a tanácskozás elején szeretné tudni mindenkiről, hogy hány generációs távolságban van tőle. Készítsünk programot, amely az N tagú család minden jelenlévőjéről megadja, hogy hány generációra van a királytól az írnok feljegyzései alapján.

A standard bemenet (az írnok adatai) első sorában a jelenlévők N $(2 \leqslant N \leqslant 50)$ száma van. Az ezt követő $N-1$ sor mindegyike egy számpárt tartalmaz: az A apa és F fia $(1 \leqslant A, F \leqslant N)$ sorszámát szóközzel elválasztva.

A standard kimenetre két sort írjunk ki: az elsőbe a király sorszámát, a másodikba pedig emelkedő sorszám szerint mindenkinek a generációs távolságát a királytól.

Példa bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`9` `3 1 / 3 2 / 7 3 / 5 6 / 4 5 / 7 4 / 8 9 /7 8`	`7` `2 2 1 1 2 3 0 1 2`

Beküldendő egy tömörített `i568.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 569. Az egyik nap Piroska néni, a matektanár egy dobozzal a kezében lépett be a 9.a osztálytermébe. A tanóra elején megszokott események után felnyitotta a korábban a tanári asztalra letett dobozt.

– *Nézzétek csak, micsoda csodás valamit hoztam!* – emelt ki a dobozból egy dodekaédert. – *Ez az öt szabályos test egyike, 12 darab szabályos ötszöglapja van, dodekaédernek hívják. Ha a lapokra felírjuk a számokat 1-től 12-ig, akkor a dobókocka kétszeresét készíthetjük el. Mivel harmincan vagytok, hoztam is 60 dobókockát és 30 dobódodekaédert. Andris, ha elmondtam a feladatot, segíts kiosztani, légy szíves. Mindhárom testtel maximum 100 alkalommal kell dobnotok. A füzetbe jegyezzétek fel minden dobásnál a kockákkal dobott számok összegét, mellé a dodekaéderrel dobott értéket! A két kockával és a dodekaéderrel dobást csak addig kell ismételgetni, amíg a két kockán kapott összeg, vagy a dodekaéderen kijött érték 12 nem lesz. Az-*

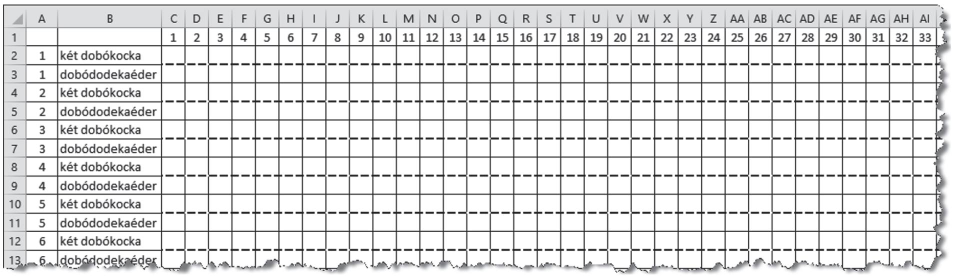
tán már csak a másik fajta dobást kell tovább ismételnetek, amíg az is 12 nem lesz, de ne felejtsétek, csak 100 kísérletet végezhettek. Végül csak két adatra lesz szükségünk, a dobódodekaéderrel és a dobókockapárral végzett kísérletek számára. Remélem, minden világos, Andris, gyere, segíts az eszközöket kiosztani. Közben lehet tippelni arra, hogy mekkora lesz a dobásszámok átlagának aránya.

– *Nyilván azonos lesz nagyjából, hisz a dodekaéder pont olyan, mint a két dobókocka* – kiabált be Miki. Sokan helyeslően bólogattak.

– *No, majd kiderül* – válaszolta Piroska néni. – *Kezdjétek a kísérleteket!*

Segítsünk a 9.a osztálynak!

1. Hozzuk létre a **dodekaéder** munkafüzetet a táblázatkezelő alapértelmezett fájlformátumában.
2. Készítsük fel a munkalapot a 30 tanuló legfeljebb 100 kísérletének dokumentálására:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
2	1	két dobókocka																																	
3	1	dobódodekaéder																																	
4	2	két dobókocka																																	
5	2	dobódodekaéder																																	
6	3	két dobókocka																																	
7	3	dobódodekaéder																																	
8	4	két dobókocka																																	
9	4	dobódodekaéder																																	
10	5	két dobókocka																																	
11	5	dobódodekaéder																																	
12	6	két dobókocka																																	
13	6	dobódodekaéder																																	

3. A C1:CX1 tartományt töltsük fel az $1, 2, \dots, 99, 100$ értékekkel. Az A2:A61 tartományt pedig egyetlen, másolható függvény segítségével az $1, 1, 2, 2, \dots, 29, 29, 30, 30$ értékekkel. A B2:B61 tartományt felváltva a *„két dobókocka”* és a *„dobódodekaéder”* szövegekkel töltsük fel. Végül készítsük el az A1:CX1 tartomány szegélyezését a *minta* szerint.
4. Ezek után modellezzük a kísérletet.
   a. A C2 cellába kerüljön a véletlenszám-generátort használó olyan függvény, amely a két független kockadobás összegének értékét jeleníti meg a cellában.
   b. A C3 cellába kerüljön hasonló függvény, amely a dobódodekaéderrel végzett dobás értékét jeleníti meg a cellában.
   c. A C2:C3 tartomány képleteit másoljuk le a C4:C61 tartományra.
   d. A D2 cellába kerüljön a C2 celláéhoz hasonló függvény, de, ha a C2 cella értéke 12, akkor a D2 cella legyen üres. Járjunk el hasonlóan a D3, C3 cellapárral.
   e. A D2:D3 tartomány képleteit másoljuk le a D4:D61 tartományra.
   f. Az E2 cellába kerüljön a D2 celláéhoz hasonló függvény, de, ha a D2 cella értéke üres vagy 12, akkor az E2 cella legyen üres. Járjunk el hasonlóan az E3, D3 cellapárral.
   g. A D2:D3 tartomány képleteit másoljuk le a D2:CX61 tartományra.

5. A CY2:CY61 tartomány celláiba kerüljön olyan függvény, amely megadja az adott sor dobásainak számát a 12-es érték eléréséig.
6. A C62 és a C63 cellákba kerüljön a dobókockával, illetve dobódodekaéderrel tanulónként végzett dobások átlaga egészre kerekítve.
7. Vizsgáljuk meg a kapott értékpárt, és írjunk a tapasztaltakról magyarázatot a dokumentációba.

A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható!

Beküldendő egy tömörített `i569.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet (`dobódodekaéder.xlsx`, `dobódodekaéder.ods`, ...), illetve egy rövid dokumentáció (`dobódodekaéder.txt`, `dobódodekaéder.pdf`, ...), amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma és a válasz a 7. feladatra.

I. 570 (É). Tavaly ősszel Paolo Panzani megházasodott, elvette magyar barátnőjét, Budapesten folytatják életüket. Paolo pizzasütő mester, így 2022 áprilisában beindult a Pizza Panzani – online pizzaműhely. A finom pizzák híre gyorsan terjedt a neten, nyárra már közel ezer vásárló regisztrált oldalukon. Rendelést leadni 10 órától este 22 óráig lehet. A belvárosban álló műhelyükből kizárólag a belső kerületekbe szállítanak a műhely saját futárával. A rendelési rendszert úgy alkották meg, hogy amennyiben egy rendeléskor többféle (akár méret, akár fajta szerint) pizzát is rendelnek, azokat a rendszer külön rendelésként kezeli, a megrendelő azonosítója és a dátum árulkodik a többféle tétel rendelésről.

rid	nap	idő	mrid	pid	pm	pdb
1	1	10:44:02	355	1	3	1
2	1	11:11:39	918	15	2	1
3	1	11:22:13	598	13	2	1
4	1	11:22:13	598	15	2	1
5	1	12:20:03	784	12	1	1
6	1	12:33:08	758	18	2	1

Erika, Paolo felesége a júliusi rendelések alapján szeretné a vállalkozást továbbfejleszteni akciók bevezetésével (akciós ár; egyet fizet, kettőt kap; boldog óra; a hónap minden negyedik rendelése féláron). Az informatikában jártas bátyja, Alex egy adatbázist készített, a következő táblákkal:

Pizza (pid, név)
- pid a pizzafajta azonosítója (számláló) ez a kulcs;
- név a pizzafajta megnevezése.

Méret (mid, átm)
- mid a méret azonosítója (számláló) ez a kulcs;
- átm a pizza átmérője cm-ben (szám).

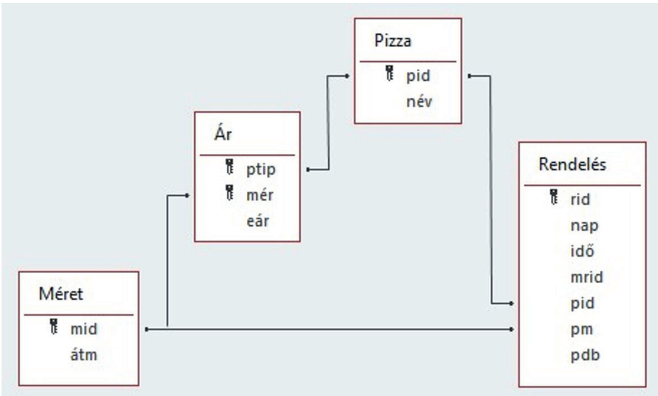
Ár (ptip, mér, ár)
- ptip a pizzafajta azonosítója (szám) ez az összetett kulcs része;
- mér a pizza méretének azonosítója (szám) ez az összetett kulcs része;
- eár a pizza egységára Ft-ban (szám).

Rendelés (rid, nap, idő, mrid, pit, pm, pdb)

rid a rendelés azonosítója (számláló) ez a kulcs;
nap a hónap napja (szám);
idő a rendelés napon belüli ideje [10:00–22:00] (idő);
mrid a rendelést leadó azonosítója (szám);
pit a pizzafajta azonosítója (szám);
pm a pizza méretének azonosítója (szám);
pdb a rendelt darabszám (szám).

Hozzuk létre adatbázist `panzani` néven! Importáljuk az adatbázisba a szövegfájlok nevével megegyező táblákba a `pizza.txt`, a `méret.txt`, az `ár.txt` és a `rendelés.txt` szövegfájlok tartalmát! A fájlok UTF-8 kódolásúak, tabulátorral tagoltak, első sorukban a mezőnevek szerepelnek.

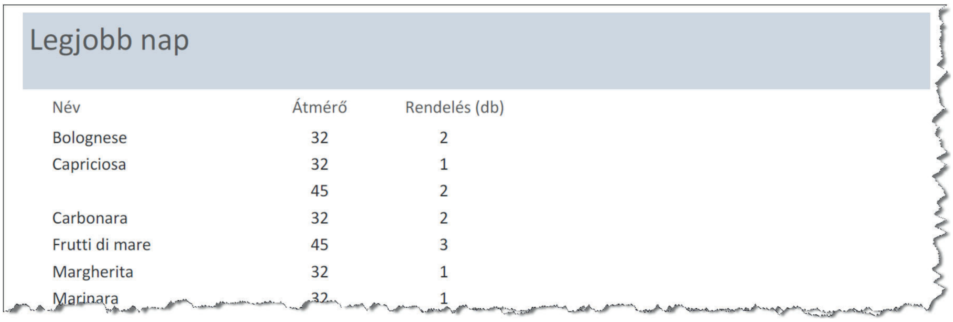
A táblák kapcsolatát a következő *ábra* mutatja:



A következő kérdések megválaszolásakor és feladatok megoldásánál a lekérdezéseket és a jelentést a zárójelben olvasható néven mentsük. Ügyeljünk arra, hogy a megoldásban pontosan a kívánt mezők szerepeljenek. Gondoskodjunk arról, hogy a lekérdezések értelmes mezőnevei a mező tartalmára utaljanak és hogy az adatok értékei mindenhol teljes szélességükben legyenek olvashatók.

1. Jelenítsük meg a 24 cm-es pizzák nevét és egységárát növekvő egységár, azon beül a pizza neve szerint alfabetikus rend szerint. (`1árak24`)
2. Melyik a hat legnépszerűbb pizza, azaz amelyekből a legtöbbet rendeltek? A pizza nevét és a rendelt darabszámot szeretnénk látni. (`2nyero`)
3. Kik azok a visszatérő vásárlók, akik több, mint három napon is rendeltek a hónapban? (`3tobb_szor`)
4. Melyik napon kapták a legtöbb darabra a megrendelést? Feltehetjük, hogy egy ilyen nap volt. (`4maxdb`)
5. Melyik pizzákból hányszor rendeltek egyszerre több darabot? (`5tobbdb`)
6. Átlagosan melyik órában érkezett a hónapban a legtöbb rendelés? (`6ora`)
7. Mekkora volt a bevétel az egyes pizzafajtákból? A lekérdezés sorai bevétel szerint csökkenő sorrendben legyenek rendezettek. (`7bevetel`)

8. Melyik méretű pizzából mennyi fogyott a hónap során? (`8meret`)
9. Készítsük jelentést, amely megadja, hogy aznap, amikor a legtöbb rendelést kapták, melyik pizzából mennyit rendeltek az egyes méretekből. A jelentés az alábbi minta elrendezését kövesse. (`9legjobbnap`)



Legjobb nap

Név	Átmérő	Rendelés (db)
Bolognese	32	2
Capriciosa	32	1
	45	2
Carbonara	32	2
Frutti di mare	45	3
Margherita	32	1
Marinara	32	1

Beküldendő egy tömörített `i570.zip` állományban a *panzani* adatbázis, vagy az adatbázis tábláit létrehozó, valamint a feladatok megoldását adó SQL-parancsok egy szöveges állományban, és egy rövid dokumentáció, amely tartalmazza az alkalmazott adatbázis-kezelő program nevét és verziószámát.

I/S. 64. Budapest belvárosában innovatív futárcéget alapítottak. A belvárost a cég egy N sorból és M oszlopból álló négyzetrácsként képzeli el. A négyzetrács n-edik sorában és m-edik oszlopában található egységnégyzetet $T[n][m]$-el jelöljük. A cég székhelye a $T[a][b]$ mezőn helyezkedik el. A sorokat és oszlopokat 1-től indexeljük.

Egy nap rendelést kapnak a $T[p][q]$ mezőről, ahova a futár szeretne a lehető leggyorsabban eljutni. Sajnos a futár még csak pályakezdő, ezért csak a sakkjáték futóra vonatkozó szabályai szerint tud mozogni Budapest belvárosában (csak átlósan mozoghat, de egy irányban tetszőlegesen sokat, ha a belvárosban marad).

Adjuk meg, hogy legkevesebb hány lépés alatt juthat el a futár a $T[a][b]$ mezőről a $T[p][q]$ mezőig, ha egy lépésben átlósan léphet tetszőlegesen sokat (a belvárosban maradva). Ha a futár sehogy sem tudja elérni a $T[a][b]$ mezőt, akkor írjunk ki -1-et.

A bemenet első sorában az N és M számok szerepelnek szóközzel elválasztva. A második sorban az a, b, p, q számok szerepelnek szóközzel elválasztva.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen, a minimális lépésszám (vagy -1, ha nem lehetséges elérni a célmezőt).

Példák:

Bemenetek (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenetek**
`5 4 / 2 2 4 4`	`1`
`12 4 / 1 1 11 3`	`4`

Korlátok: $2 \leqslant N, M \leqslant 10^9$, $1 \leqslant a, p \leqslant N$, $1 \leqslant b, q \leqslant M$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program az $N, M \leqslant 1000$ tesztesetekre helyes megoldást ad.

S. 163. Manapság több olyan sakkmotor (sakkozó robot) létezik, mely képes a legjobb sakknagymestereket is legyőzni. A probléma nehézségét szeretnénk illusztrálni ezzel a feladattal, melyben jelentősen könnyítünk a feltételeken.

Adott egy hagyományos sakktábla, melyen egy világos gyalog és a két király található. Az esetek nagyjából 2/3-ában világos mattot tud adni a sötét királynak, a figurák elhelyezkedésétől függően azonban a kimenetel döntetlen is lehet (sötét nem nyerhet). Készítsünk számítógépes programot, amely megadja, hogy mi lesz a játék kimenetele egy ilyen állás esetén.

Bemenet: a bemenet első és egyetlen sora egy sakkállást tartalmaz a Forsyth–Edwards jelölés (FEN) szerint. Ez egy standard sakkállások jelölésére. Figyelem! A standard azt is megadja, hogy melyik játékosnak kell lépni. Ez befolyásolhatja a kimenetet. Feltételezhetjük, hogy az 50 lépés számlálója nulláról indul, így a lépésszám miatt nem lesz döntetlen az eredmény, ha világos nyerni tud.

Kimenet: a kimenet első és egyetlen sorába a W karaktert kell írni, ha világos nyerhet, és a B karaktert, ha sötét kikényszerítheti a döntetlent (mindkét fél optimálisan játszik).

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`7k/4PK2/8/8/8/8/8/8 b - - 0 0`	`W`

Magyarázat: ebben az állásban sötét lép, majd fehér három lépésben mattot ad.

Időkorlát: 1 mp.

Értékelés: A pontok 50%-a kapható, ha a program helyes eredményt ad olyan bemenetre, amikor a gyalog a 7. sorban van.

Segítség: játékállásokat kipróbálhatunk és tesztelhetünk például a `https://www.chess.com/analysis` és a `https://syzygy-tables.info/` oldalakon.

Beküldendő egy `s163.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. október 15.

❄

Szép szereplés az 52. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

Az 52. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia (IPhO) 2022. július 10. és 17. között került megrendezésre online formában. A magyar csapat tagjai egy arany-, egy ezüst- és három bronzérmet szereztek, és ezzel az igen előkelő 16-17. helyet érték el az országok közti nem hivatalos éremtáblázatban. (Összpontszám szerint hazánk a mintegy 70 résztvevő ország között a 19. helyen végzett.) Az érmek sorrendje szerint legelőkelőbb helyen végzett országok érmeit és összpontszámát a következő táblázat mutatja:

Érem- és ponttáblázat a 2022. évi 52. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

	ország	**arany-érem**	**ezüst-érem**	**bronz-érem**	**dicséret**	**pontszám**
1.	Kína	5	0	0	0	212,3
2.	Dél-Korea	4	1	0	0	134,7
3.	Románia	4	1	0	0	130,45
4.	USA	3	2	0	0	119,0
5.	Vietnám	3	1	1	0	106,25
6.	Tajvan	2	3	0	0	119,2
7.	Németország	2	1	2	0	100,8
8.	Egyesült Arab Emírségek	2	0	3	0	93,15
9.	India	1	4	0	0	111,35
10.	Kazahsztán	1	4	0	0	103,7
11.	Szingapúr	1	4	0	0	99,7
12.	Indonézia	1	3	1	0	89,95
13.	Ausztrália	1	2	2	0	91,7
14.	Izrael	1	2	2	0	87,1
15.	Grúzia	1	2	2	0	80,4
16.	Bulgária	1	1	3	0	83,0
17.	**Magyarország**	**1**	**1**	**3**	**0**	**81,5**
18.	Thaiföld	0	5	0	0	93,2
19.	Hongkong	0	4	1	0	101,95
20.	Japán	0	3	2	0	87,6

A csapattagok kiválasztása és felkészítése most is az ország öt városában (Budapesten, Miskolcon, Szegeden, Székesfehérváron és Pécsen) működő fizikai diákolimpiai szakkörökön zajlott. A budapesti szakkör ebben a tanévben is online módban működött; a szakkörvezetők heti rendszerességgel feladatsorokat tettek közzé a magyar fizikai diákolimpiai szakkörök honlapján[1], majd egy hét múlva az „IPhO Hungary" YouTube-csatornára[2] feltették a feladatok megoldását bemutató videót. Remélhetőleg ezek és a korábban már feltöltött videók is hatékonyan segítik az érdeklődő diákok egyéni tanulását, versenyekre való felkészülését.

A csapat kiválasztása az előző évhez hasonlóan három válogatókörben történt. A KöMaL[3]-ban és a fizikai diákolimpiai szakkörök honlapján meghirdetett első, online fordulóra március közepén került sor. Ezen bárki indulhatott, elég volt a szakköri honlapon közzétett feladatsor megoldását szkennelve beküldeni. A három és fél órás versenyen kitűzött feladatokat nagyjából 20 diák küldte be.

A beérkezett dolgozat pontszáma alapján a legjobb 11 diák kapott lehetőséget a válogatás második körében való részvételre. A kiválasztottak közel egy hónapon keresztül heti 3 alkalommal online felkészítő foglalkozásokon és hetente egy villámversenyen vettek részt. Itt statisztikus termodinamika, fizikai optika, kvantumfizika, relativitáselmélet témakörökről esett szó.

A harmadik válogatókört az elmúlt években megszokott, kétnapos Kunfalvi-verseny jelentette. Az április végén megrendezett verseny öt órás elméleti, három órás mérési és három órás számítógépes szimulációs részből állt. Az elméleti feladatok olimpiai stílusúak (hosszúak és sok alkérdésből állók) voltak.

A válogatás három körében szerzett összpontszám alapján kialakult az ötfős csapat, amely az 52. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián képviselte hazánkat:

Bencz Benedek, 9. oszt., Budapest, Baár–Madas Református Gimnázium, tanára: *Horváth Norbert;*

Gurzó József, 12. oszt., Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, tanára: *Nagy Piroska Mária;*

Kertész Balázs, 12. oszt., Debrecen, DRK Dóczy Gimnáziuma, tanára: *Tófalusi Péter;*

Kovács Balázs Csaba, 12. oszt., Hatvan, Bajza József Gimnázium, tanárai: *Maruzsiné Sevella Judit, Kovács László;*

Toronyi András, 12. oszt., Budapest, Baár–Madas Református Gimnázium, tanára: *Horváth Norbert.*

Megjegyezzük, hogy a válogatóversenyen való szereplése alapján bekerült az olimpiai keretbe Molnár-Szabó Vilmos (11. oszt., Budapest, Fazekas Mihály Gimn, tanára: *Nagy Piroska Mária*). Vilmos az IPhO részvételről lemondott, mert a verseny idején zajló Nemzetközi Matematikai Diákolimpián erősítette a magyar csapatot egy bronzéremmel.

A csapat számára az első nemzetközi erőpróba a május végén Szlovéniában, Ljubljanában megrendezett *Európai Fizikai Diákolimpia*[4] (EuPhO) volt, amely a világ második legnagyobb középiskolás fizikaversenye. (Ezen a versenyen Kertész Balázs helyett Molnár-Szabó Vilmos képviselte országunkat.) Az EuPhO-n a ma-

[1] `https://ipho.elte.hu`

[2] `https://www.youtube.com/c/IPhOHungary`

[3] `https://www.komal.hu`

[4] `https://eupho.ee/eupho-2022`

gyar csapat egy aranyérmet (Kovács Balázs Csaba), egy ezüstérmet (Gurzó József), két bronzérmet (Bencz Benedek, Toronyi András) és egy dicséretet (Molnár-Szabó Vilmos) szerzett. Az Európai Fizikai Diákolimpiáról szóló beszámoló az októberi számunkban olvasható majd.

A csapat tréningben tartása a nyár elején is folytatódott; rendszeresen küldtünk a csapattagoknak egy-egy régebbi IPhO elméleti feladatsort, amit a csapattagok önállóan megoldottak. Néhány nap múlva elküldtük a hivatalos megoldást is, majd kicsit később online megbeszéltük a feladatsor problémásabb részeit, illetve részletesebben körbejártunk egy-egy kérdést.

Az eredeti tervek szerint az 52. Nemzetközi Fizikai Diákolimpiát Fehéroroszország szervezte volna, de a nemzetközi helyzetre való tekintettel a IPhO Nemzetközi Bizottsága áprilisban törölte az eseményt, és Svájc vállalta át a verseny online formában való lebonyolítását. Köszönet illeti a rendezőket és a nemzetközi segítőket, hogy ilyen rövid idő alatt sikerült megszervezni és zökkenőmentesen lebonyolítani a versenyt! A versenyzők többsége saját hazájában, számítógépes kapcsolaton keresztül vett részt az eseményen, de voltak olyan helyszínek is, ahol néhány ország delegációja összejött, és egy közös helyszínen szervezték meg a részvételt, ezzel valamennyire visszaidézve a helyszíni szervezésű diákolimpiák hangulatát. A versenyen 368 tanuló mérte össze tudását, akik a tíz egyéni induló mellett mintegy 70 országot képviseltek.

A magyar delegációt az öt csapattagon túl *Sarkadi Tamás* (BME Fizikai Intézet) és *Tasnádi Tamás* (BME Matematikai Intézet) csapatvezetők, *Széchenyi Gábor* (ELTE Fizikai Intézet) megfigyelő, *Szász Krisztián* (BME Fizikai Intézet) és *Vigh Máté* felügyelők alkották, akik július 10-től 15-ig Balatonfüredre, egy hotelbe költöztek a verseny idejére. Az előkészítő munkák nagy része és a verseny lebonyolítása a hoteltől tíz percre levő, újonnan megnyílt BME Tudáscentrumban zajlott. A csapatvezetők és a megfigyelő végezték a fordítást, javítást, moderálást, a felügyelők gondoskodtak a diákok ellátásáról és a verseny szabályszerű lebonyolításáról, valamint kiépítették a rendezőkkel a folyamatos videókamerás felügyeletet.

Az IPhO első versenynapján az ötórás kísérleti fordulóra került sor. Az IPhO történetében először a versenyzők nem valódi, hanem szimulált kísérleteket végeztek el és értékeltek ki. Ez azt jelenti, hogy a mérési eredményeket nem valódi eszközökkel, manuálisan elvégzett mérések szolgáltatták, hanem egy egyszerű, szöveges ablakban futó programba kellett beírni néhány bemenő paramétert, és ennek függvényében a program kiírt néhány mérési eredményt. (A programokat a felügyelők előzetesen telepítették a versenyzők által használt laptopokra.) A szimulációs program gondoskodott még arról is, hogy az eredményeket megfelelő véletlen hiba terhelje. A mérés többi része, az adatok felvétele, kiértékelése már ugyanúgy zajlott, mint egy valódi mérésnél.

A versenyzők két mérési feladatot kaptak. Az első feladatban egy ismeretlen bolygón különböző paraméterű golyók (szimulált) leejtésének eredményeiből kellett a bolygónak és légkörének adataira következtetni. A második feladatban a versenyzők egy hengeres vákuumdiódát vizsgáltak, a geometriai paraméterek és a diódára kapcsolt feszültség függvényében „mérhették" az áramot, és a dióda karakterisztikájában szereplő paraméterek meghatározása volt a feladat. Mindkét mérési feladat a szokásos IPhO feladatoknál „nyitottabb” volt; a versenyzőknek maguknak kellett rájönniük, hogy egy-egy paraméter meghatározásához milyen beállítás mellett milyen adatsort érdemes fölvenni.

Az elméleti versenynapon a diákok három feladatot oldottak meg öt óra alatt. Az első feladatot a játékboltokban kapható, kicsiny, nagyon erős mágneses golyókból összerakott NeoCube kocka motiválta. A feladatban mágneses dipólusok közti kölcsönhatást vizsgálták a versenyzők, többek között olyan elrendezésekben is, amik a játékmágnesekkel megvalósíthatók. A második feladat a nemrég pályára állított *James Webb űrteleszkóppal* kapcsolatos érdekes problémákról szólt; volt a feladatban optika, termodinamika és modern fizika is. Remek volt az időzítés; a távcső éppen az elméleti forduló napján küldte el első sikeres felvételeit. A harmadik kérdésben négy (nem csak hatványfüggvényeken alapuló) skálatörvényekkel megoldandó feladatot tűztek ki. A problémák a fizika különböző területeihez, mechanikához, hidrodinamikához, relativitáselmélethez kapcsolódtak, sőt, volt olyan kérdés is, ahol a releváns terület meghatározása is fejtörést igényelt (vizes homok szilárdsága). A feladatok helyes megoldásához több különböző gondolatmenettel is el lehetett jutni. Összességében, az elméleti forduló feladatai nagyon szépek, nehezek voltak, melyek megoldásához ötletekre, fizikai gondolkodásra és intuícióra volt szükség. A feladatok és a megoldások megtekinthetők az idei verseny hivatalos honlapján[5].

Az egész verseny színvonalát, a problémák nehézségét jól mutatja, hogy a maximálisan megszerezhető 50 pontból (20 a mérésre, 30 az elméletre) 23,70 pont elérésével már aranyérmet, 16,05 ponttal ezüstöt és 11,65 ponttal bronzérmet lehetett szerezni, a dicséret alsó határa pedig 7,15 pont volt. A magyar versenyzők eredménye a következő:

Kovács Balázs Csaba: *aranyérem* (24,00 pont);

Gurzó József: *ezüstérem* (16,70 pont);

Toronyi András: *bronzérem* (14,70 pont);

Kertész Balázs: *bronzérem* (14,10 pont);

Bencz Benedek: *bronzérem* (12,00 pont).

Gratulálunk a csapatnak a szép eredményhez! Szeretnénk köszönetet mondani a diákok középiskolai tanárainak, valamint sok sikert és hasonlóan tehetséges tanítványokat kívánunk nekik a továbbiakban. Köszönet az öt magyarországi olimpiai előkészítő szakkör vezetőinek a sok éven átívelő, kitartó munkájukért. Külön köszönet illeti továbbá *Szász Krisztiánt, Széchenyi Gábort, Vankó Pétert* és *Vigh Mátét* a csapat felkészítésében nyújtott segítségért. Köszönet illeti a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemet, mert rendelkezésünkre bocsátotta Balatonfüreden az új Tudáscentrumát, és köszönettel tartozunk az anyagi támogatásért az Emberi Erőforrások Minisztériumának.

Bár az online versenyek hangulata utol sem érheti egy helyszíni rendezésű IPhO varázsát, Balatonfüredről is maradandó, szép emlékekkel tértünk haza. Sokat sétáltunk a Tagore sétányon, elmentünk egy hajókirándulásra, láthattuk a Kékszalag

[5] `https://ipho2022.com`

Balatonkerülő vitorlásverseny rajtját, sőt, még aznap délután a Tihanyi Bencés Apátság alatt egy cukrászdában fagyizva figyelhettük, ahogy a félsziget peremén feltűnnek a leggyorsabb katamarán rohanók fekete vitorlái, és a hajók befutnak a füredi célba.

A következő, 2023. évi diákolimpiát Japán rendezi Tokióban[6]. A versenyre való felkészülést a négy vidéki és a budapesti szakkör segíti:

Budapest: *Szász Krisztián* (BME Fizikai Intézet, Budafoki út 8.),

Miskolc: *Zámborszky Ferenc* (Földes Ferenc Gimnázium, Hősök tere 7.),

Pécs: *Pálfalvi László* (Pécsi Tudományegyetem Fizikai Intézet, Ifjúság útja 6.),

Szeged: *Sarlós Ferenc* és *Csányi Sándor* (Szegedi Tudományegyetem, Dóm tér 9.),

Székesfehérvár: *Orosz Tamás* (Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Budai út 45.).

A szakkörökkel kapcsolatos további tudnivalók, elérhetőségek, aktualitások és a felkészülést segítő anyagok a fizika diákolimpiai szakkörök hivatalos honlapján olvashatóak: `http://ipho.elte.hu`. A fenti szakkörökön kívül elsősorban önálló munkával, a KöMaL elméleti és mérési feladatainak rendszeres megoldásával és a hazai fizikaversenyeken való rendszeres részvétellel lehet készülni a jövő évi fizikai diákolimpiára.

Eredményes felkészülést kívánunk!

Sarkadi Tamás és **Tasnádi Tamás,** csapatvezetők

A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiáról és válogatóversenyéről, az Athletica Galacticáról

Napjainkban egyre népszerűbb a titokzatos űr felfedezése, a csillagok fürkészése. A különböző technikai fejlesztések, távcsövek, a világháló nyújtotta tér kiterjesztése mind segítik ennek a világnak a megismerését.

A csillagászat a felfedezés tudománya. Ahogy az égbolt, úgy a lehetőségeink is határtalanok. Az *Athletica Galactica* verseny kiváló alkalom és lehetőség arra, hogy megtalálja a jövő középiskolás kozmikus tehetségeit, akiknek a kisujjában van a fizika, a matematika és az informatika. A mozgalom nem új keletű, már több mint 10 éve van jelen hazánkban.

A kezdetektől a Bajai Obszervatórium Alapítvány égisze alatt futott a felkészítés. Olimpikonjaink évről évre egyre eredményesebben szerepeltek a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpián (IOAA). Aztán 2019-ben már hazánk

[6] `https://ipho2023.jp`

rendezte az eseményt, ahol a Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont is részt vett a szervezésben.

Az évek múlásával egyre népszerűbbé vált a verseny. Nőtt a jelentkezők száma, ezzel párhuzamosan a szakmai felkészítők is egyre többen csatlakoztak a jobb eredmények elérésének érdekében. Ennek okán született meg tavaly, a Kolumbia által szervezett diákolimpián az első magyar IOAA aranyérem.

Ez a növekedés adott okot arra, hogy legyen egy beazonosítható elnevezése a versenynek. Megszületett az Athletica Galactica, amely Magyarországon egyedülálló megmérettetés középiskolások számára. A fizika és matematika terén kiemelkedő, a csillagászat és az űrkutatás iránt érdeklődő diákok egy háromfordulós tornán vesznek részt, amelynek a végén az országos válogatókon továbbjutott 25 diák közül kiválasztásra kerül a legjobb 10 versenyző. Az ő diákolimpiai felkészítésüket szakmai csapatunk veszi át.

A felkészítés három felkészítő hétvégéből, heti feladatsorokból, valamint egy felkészítő és válogató táborból áll, amelyek során a diákok mind elméleti, mind gyakorlati tekintetben olimpiai szintre fejlődhetnek. Ezenfelül pedig a nagy megmérettetést megelőzi egy miniolimpia, amelyet szomszédos országokkal forgó rendszerben tartunk minden évben. Idén Szlovénia adott otthont ennek az eseménynek, jövőre pedig várhatóan Horvátország szervezi meg.

Küldetésünknek érezzük, hogy segítséget biztosítsunk a diákok és tanárok számára ismereteik bővítéséhez, gyakorláshoz. Tesszük ezt egy korábbi olimpikonunk, *Dálya Gergely* által írt, már az egyetemek által is használt könyvvel. Ez a kötet az olimpia témaköreit felölelő elméleti összefoglalás mintafeladatokkal, laikusoknak és a szakmának egyaránt. Hamarosan nyomtatásban is megjelenik emellé egy feladatgyűjtemény megoldókulccsal és magyarázatokkal. Távcsőhasználati és -ismereti tanfolyamainkkal próbálunk hozzájárulni ahhoz, hogy a diákok bátran tudjanak tanáraikhoz fordulni segítségért. Ehhez a kezdeményezéshez az ország több pontján megtalálható partnereink is csatlakoztak.

Az Athletica Galacticára, valamint magára az IOAA-ra szükséges elméleti és gyakorlati tudás elsajátítását diákolimpiai szakköri hálózat segíti, amely országszerte, különböző szinteken folyó munkájával éppúgy helyet ad a teljesen kezdő, mint a már nem először versenyző diákoknak. Sőt a résztvevők egy remek, motivált, összetartó és vidám csapat tagjaivá is válnak.

IOAA Olimpiai Szakkör, Budapesten és online

Az Olimpiai Szakkör 2013 óta alkotja a szakköri hálózat gerincét, felkészítve a matematikából és fizikából tehetséges, 10–12. osztályos diákokat az Athletica Galactica döntőjének szintjére. A szakkört volt diákolimpikonok tartják, akik a döntő utáni keretfelkészítésben is részt vesznek, Kalup Csilla, az ELTE Csillagászati Tanszéke doktoranduszának szakkörvezetésével.

A szakkörök az ELTE TTK lágymányosi campus Északi Tömbjében folynak szeptembertől a döntőig, kb. kéthetente, szombatonként, 09:00 és 14:00 között, de online csatlakozásra is lehetőség van. Az első három szakkör időpontja szeptember 17., október 1. és október 22. A részvétel ingyenes, de regisztrációhoz kötött.

Budapesti alapozó szakkör és vidéki szakkörök

Az Újpesti Könyves Kálmán Gimnáziumban a matematikai, fizikai és csillagászati tudást megalapozó szakkört tart Udvardi Imre matematika-fizika szakos tanár 8-10. osztályosoknak. A szakköri foglalkozások péntekenként 15:00-től 18:00-ig vannak, amelyeket 22:00-ig távcsövezés követ az iskola Kulin Csillagdájában. Első alkalom: október 7.

A fentiek mellett számos vidéki szakkör is felkészülési lehetőséget kínál. További információ a szakkörökről, valamint jelentkezési információ a

`https://athleticagalactica.hu/orszagos-szakkori-halozat`

címen található.

Aki kedvet érez magában, hogy részese legyen egy kiváló csapatnak, vagy csak foglalkoztatja, hogy mi mindent rejt a csillagos ég, a csodálatos univerzum, csatlakozzon a megadott elérhetőségeken.

Akik ki szeretnék próbálni magukat a hazai válogató versenysorozaton, hogy felmérjék tudásukat, azok pedig alább olvashatják, hogy miként tudnak jelentkezni.

FELHÍVÁS
az Athletica Galactica Kárpát-medencei Középiskolai Csillagászati és Asztrofizikai Versenyre

A Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont Kárpát-medence magyar ajkú középiskolás diákjai számára országos versenyt hirdet. Ismét keressük azokat a középiskolai pedagógusokat, akik a fizika és matematika terén kiemelkedő, a csillagászat és az űrkutatás iránt érdeklődő középiskolásokat ösztönzik a nevezésre, s felkészülésüket segítik a háromfordulós verseny során. Tanári támogatásukkal hozzájárulnak a hazai döntőben való megmérettetésre, így lehetőséget adva a legtehetségesebb diákok számára a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpián (IOAA, International Olympiad on Astronomy and Astrophysics) való részvételre, amelyet Lengyelország szervez 2023. augusztus végén.

A döntőbe jutó diákok legjobbjaiból kerülnek ki a magyar nemzeti diákolimpiai keret tagjai.

A 2022-es Athletica Galactica verseny fordulóinak időpontjai:
I. (iskolai) forduló: 2022. november 16. (szerda), 15.00 óra (időtartam: 120 perc);
II. (iskolai) forduló: 2022. december 14. (szerda), 15.00 óra (időtartam: 120 perc);
III. (iskolai, számítógépes) forduló: 2023. január 11. (szerda), 15.00 óra (időtartam: 120 perc);
Országos döntő (terv): 2023. március 24–26.

Jelentkezni honlapunkon (`www.athleticagalactica.hu`), érdeklődni az alábbi elérhetőségeken lehet:

Vincze Nikolett +36 30 683 6154
`info@athleticagalactica.hu`

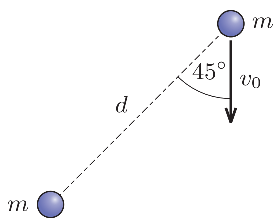
Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny
1. elméleti forduló

2022. március 21. 15:00

Figyelem!* A versenyen nem-grafikus számológépen, író- és rajzeszközökön kívül semmilyen más segédeszköz (pl. könyv, füzet, táblázatok, internet) **nem** használható. A feladatok megoldását kézírással, papírra kell elkészíteni, minden feladat megoldása új oldalon kezdődjön. Az első oldalon szerepeljen a versenyző neve, évfolyama, felkészítő tanárainak és iskolájának neve. Törekedni kell a jól áttekinthető külalakra, az olvasható kézírásra, a megoldások fizikai alapjainak ismertetésére, valamint a magyaros, világos és tömör fogalmazásra.

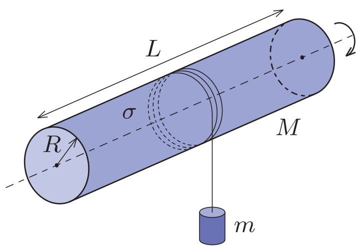
Minden feladat azonos pontszámot ér. A verseny időtartama 3 óra, amelynek lejárta után további 30 perc áll rendelkezésre a megoldások digitalizálására és elküldésére. A megoldásokat egyetlen pdf-dokumentumban a verseny napján (2022. március 21.) 18:30-ig kell elküldeni az `iphoteamhun@gmail.com` címre. A későn érkezett dolgozatokat nem tudjuk elfogadni. A pdf-dokumentum készülhet például mobiltelefonos alkalmazással vagy szkennerrel.

F1. Az *ábrán* látható két pontszerű, szabad elmozdulásra képes test között csak a tömegvonzás hat. Kezdetben a testek távolsága d, az egyik m tömegű test nyugalomban van, a másik (ugyancsak m tömegű) test pedig $v_0 = k\sqrt{\gamma m/d}$ sebességgel mozog az *ábrán* látható irányban, ahol k paraméter, γ pedig a gravitációs állandó.



a) Legalább mekkora k értéke, ha a testek hosszú idő után egymástól nagyon messzire („végtelen” távolra) kerülnek?

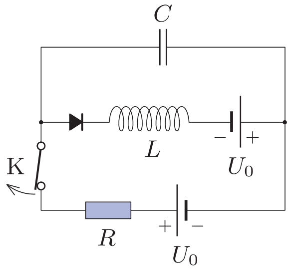
b) Mekkora a testek közötti legnagyobb távolság $k = 1$ esetén?



F2. Egy szigetelőanyagból készült, R sugarú, L hosszúságú ($L \gg R$), vékony falú, M tömegű cső egyenletesen fel van töltve σ felületi töltéssűrűséggel. A cső rögzített szimmetriatengelye körül súrlódásmentesen foroghat. A csőre fonalat csévélünk, melynek végére m tömegű kis testet rögzítünk. Mekkora gyorsulással mozog a kis test, ha elengedjük?

* A versenyzőknek szóló technikai információk itteni közlésével a későbbi, hasonló stílusban megrendezendő versenyek résztvevőit szeretnénk segíteni. (A Szerk.)

F3. Az *ábrán* látható áramkörben a telepek, a dióda és a tekercs ideális. A K kapcsoló hosszú ideje zárva van. Adatok: $L = 150$ mH, $C = 200$ nF, $R = 500\ \Omega$, $U_0 = 9{,}0$ V.



a) Mekkora maximális $U_{\max}$ feszültségre töltődik fel a kondenzátor, miután a kapcsolót kinyitjuk?

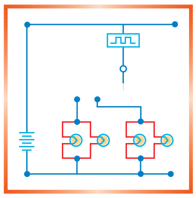
b) A kapcsoló kinyitása után mennyi idővel éri el a kondenzátor feszültsége az $U_{\max}$ értéket?

F4. A pozitron egyszeresen pozitív töltésű elemi részecske, melynek tömege egyenlő az elektron m_0 tömegével. Egy állónak tekinthető elektronnak $3m_0c^2$ mozgási energiájú pozitront ütköztetünk, melynek következtében annihiláció következik be és az energia két foton formájában sugárzódik szét.

a) Feltéve, hogy a két foton ellentétes irányban repül szét, mekkora a fotonok hullámhosszának aránya?

b) Mekkora a két foton kirepülési iránya által bezárt szög lehetséges legkisebb értéke?

Fizika gyakorlat megoldása



G. 773. *A Föld–Hold rendszer a két égitest közös tömegközéppontja körül kering* 27,32 napos *keringési idővel a távoli állócsillagokhoz képest. Ehhez képest több mint két nappal hosszabb idő, átlagosan* 29,53 nap *telik el két egymást követő holdtölte között. Magyarázzuk meg a kétféle periódusidő közötti különbséget, és egyszerűsített számítással mutassuk meg, hogy valóban nagyjából két nap az eltérés!*

(*4 pont*)

Megoldás. Holdtöltekor a Hold, a Föld és a Nap (közelítőleg) egy egyenesbe esik. Két telihold között a Nap–Föld egyenes valamekkora szöggel elfordul az állócsillagokhoz képest. Ugyanennyivel többet kell elforduljon a 360°-on felül a Hold a Föld körül, hogy megint a Nap–Föld egyenesén legyen rajta.

Legyen az egymást követő két holdtölte között eltelt idő $27{,}32 + n$ nap. Mivel a Föld 365,26 nap alatt fordul 360°-ot a Nap körül, $27{,}32 + n$ nap alatt a Nap–Föld egyenes elfordulása

$$\alpha = \frac{27{,}32 + n}{365{,}26} \cdot 360^\circ.$$

A Hold 27,32 nap alatt tesz meg egy teljes fordulatot a Föld körül, n nap alatt pedig a Föld–Hold egyenes még elfordul α szöggel. Az idő egyenesen arányos az elfordulás szögével, tehát

$$\alpha = \frac{n}{27{,}32} \cdot 360^\circ.$$

Ezek szerint fennáll:

$$\frac{27{,}32+n}{365{,}26}=\frac{n}{27{,}32},$$

és ennek az egyenletnek a megoldása:

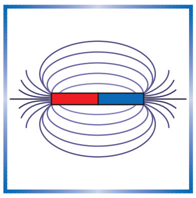
$$n=2{,}21\approx 2.$$

Tehát valóban kb. két nappal több idő telik el két holdtölte között, mint amennyi a Hold keringési ideje.

Fehérvári Donát (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Egyszerűsített – akár fejben is elvégezhető – számítás a következő. A Föld keringési ideje 12 hónap, a Holdé ennek kb. $\frac{1}{12}$-ed része, közelítőleg 1 hónap („holdnap"). A Hold tehát az állócsillagokhoz viszonyított keringési idejéhez képest annak még kb. $\frac{1}{12}$-ed része, vagyis hozzávetőlegesen 2 nappal később kerül ismét a Nap–Föld egyenesre.

12 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1 pont) 1, hibás 2, nem versenyszerű 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5392. *Egy szökőkút középső nyílásán függőlegesen kiáramló vékony vízsugár H magasságig jut el. A vízsugár „vízhozama", azaz az időegységenként kiáramló víz térfogata: $\Phi=\frac{\Delta V}{\Delta t}$. Milyen h magasságban lebeg egy m tömegű labda, ha a vízsugárba helyezzük? (Feltételezhetjük, hogy a vízsugár teljes keresztmetszete eléri a labdát, és arról vízszintes irányban spriccel szét.)*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. A vízsugár bármelyik keresztmetszetén Δt idő alatt $\Delta V=\Phi\Delta t$ térfogatú, tehát $\rho\Phi\Delta t$ tömegű víz áramlik át (ρ a víz sűrűsége). Ennyi víznek $\Delta p=\rho\Phi\Delta t\cdot v$ nagyságú, függőlegesnek tekinthető impulzusa van, ahol v az áramló víz sebessége az adott magasságban. A labdának csapódó vízsugár függőleges irányú impulzusa Δt idő alatt nullára csökken, tehát – Newton 2. törvénye szerint – a víz

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\rho\Phi v$$

erőt fejt ki a labdára.

Tudjuk, hogy a nyíláson kiáramló, valamekkora M tömegű víz kezdeti v_0 sebessége és a maximális H emelkedési magassága közötti összefüggés az energiamegmaradás törvénye szerint

$$M\frac{v_0^2}{2}=MgH,\quad \text{azaz}\quad v_0=\sqrt{2gH}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy h magasságban a víz sebessége:

$$v(h) = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Ahhoz, hogy az m tömegű labda lebegjen, a rá ható erők eredőjének nullának kell lennie:

$$\rho\Phi\sqrt{2g(H-h)} = mg,$$

ahonnan a lebegés magassága:

$$h = H - \frac{m^2 g}{2\rho^2\Phi^2}.$$

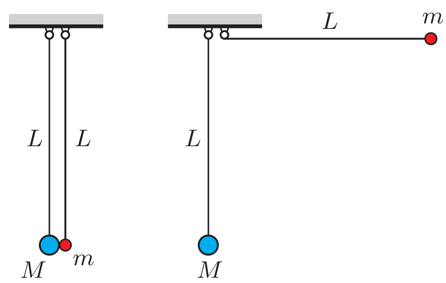
A fenti egyenlet azt is megmondja, hogy legfeljebb mekkora tömegű labdát lehet lebegtetni. Nyilván $h > 0$, vagyis

$$m < m_{\max} = \rho\Phi\sqrt{2H/g}.$$

Csillingek csapat:
Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) és
Csilling Katalin (Budapest, Szilágyi E. Gimn., 12. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5393. *Egy m tömegű és egy $M = 3m$ tömegű, kicsiny golyóhoz fonalakat erősítünk, melyek másik végét a* bal oldali ábra *szerint azonos magasságban rögzítjük. A golyók középpontja ekkor a felfüggesztés alatt L mélységben van. A kisebb tömegű golyót felemeljük úgy, hogy a hozzá kapcsolódó fonál vízszintes legyen* (jobb oldali ábra), *majd a golyót elengedjük. A két golyó tökéletesen rugalmasan és egyenesen ütközik.*



a) Az ütközés előtti pillanatban mekkora együttes erővel terheli a két fonál a felfüggesztést?

b) Mekkora a terhelés az ütközés utáni pillanatban?

c) Az első és a második ütközés között mekkora a két fonál által bezárt legnagyobb szög?

d) A c) esetben mekkora nagyságú, és milyen irányú az együttes terhelés?

e) Mekkora szöget zárnak be a fonalak a függőlegessel, amikor bekövetkezik a második ütközés?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. *a*) Az M tömegű testre ható fonálerő legyen K_1, az m tömegűre ható erő pedig K_2. Tudjuk, hogy az ütközés előtti pillanatban az M tömegű golyó sebessége $v_1 = 0$, a másik golyó sebessége pedig (az energiamegmaradás törvénye szerint) $v_2 = \sqrt{2gL}$.

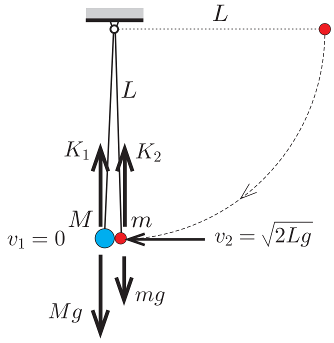
Az ütközés előtti pillanatban a nagyobb tömegű test gyorsulása nulla, a kisebb tömegű test (centripetális) gyorsulása pedig v_2^2/L (*1. ábra*). Newton II. törvénye szerint a golyók mozgásegyenlete:

$$K_1 - Mg = 0, \quad \text{illetve} \quad K_2 - mg = m\frac{v_2^2}{L},$$

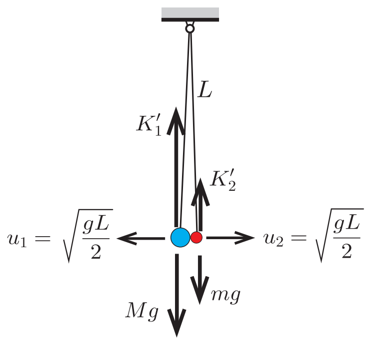
ahonnan a fonálerők:

$$K_1 = K_2 = 3mg.$$

A felfüggesztési pontot ebben a pillanatban $K_1 + K_2 = 6mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló erő terheli.



1. ábra



2. ábra

b) Írjuk fel a tökéletesen rugalmas ütközésre az energia- és a lendületmegmaradás törvényét! Ha az ütközés utáni sebességeket u_1-gyel és u_2-vel jelöljük (és a *2. ábrának* megfelelően az ütközési ponttól távolodó irányban tekintjük ezeket pozitívnak), a megmaradási törvények szerint

$$mv_2 = Mu_1 - mu_2, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mu_2^2 + \frac{1}{2}Mu_1^2.$$

Behelyettesítve az ismert adatokat, majd m-mel egyszerűsítve ezt kapjuk:

$$\sqrt{2gL} = 3u_1 - u_2, \qquad 2gL = u_2^2 + 3u_1^2.$$

Innen u_2-t kiküszöbölve a

$$12u_1^2 - 6u_1\sqrt{2gL} = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Mivel nyilván $u_1 \neq 0$, az egyenlet megoldása:

$$u_1 = u_2 = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

A két golyó tehát az ütközés után azonos nagyságú, de ellentétes irányú sebességgel fog elindulni.

Az ütközés utáni pillanatban fellépő (K_1'-vel és K_2'-vel jelölt) fonálerőket ismét Newton II. törvényéből kaphatjuk meg:

$$K_2' - mg = m\frac{u_2^2}{L} = m\frac{gL}{2}\frac{1}{L},$$

$$K_2' = \frac{3}{2}mg,$$

és hasonlóképp:

$$K_1' - Mg = M\frac{u_1^2}{L} = M\frac{gL}{2}\frac{1}{L},$$

tehát

$$K_1' = \frac{3}{2}Mg = \frac{9}{2}mg.$$

Mivel mindkét fonálerő függőleges, ezért a felfüggesztési pontnál ható (függőlegesen lefelé irányuló) terhelés:

$$K_1' + K_2' = 6mg.$$

Megjegyzés. Az ütközés során mindkét fonálerő nagysága hirtelen véges értékkel megváltozik, az összegük azonban ugyanakkora marad, mint amennyi az ütközés előtt volt.

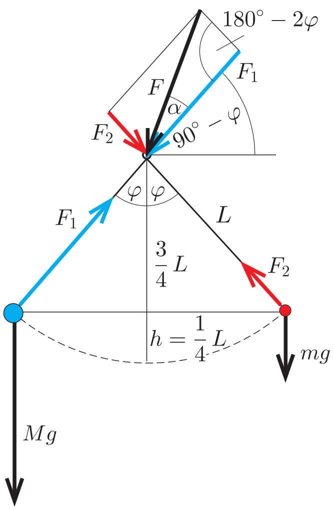
c) Mivel a két test ütközés utáni kezdősebességének nagysága megegyezik, valamint minden helyzetben a gyorsulásuk is egyforma nagyságú, ezért azonos idő alatt mindkét golyó ugyanolyan magasra fog eljutni. Az emelkedés h magasságát az energiamegmaradásból könnyen megkaphatjuk:

$$mgh = \frac{m}{2}\frac{u_2^2}{L} = \frac{1}{4}mgL,$$

vagyis $h = L/4$.

Jelöljük a fonalaknak a függőlegessel bezárt legnagyobb szögét φ-vel. A *3. ábráról* leolvashatjuk, hogy

$$\cos\varphi = \frac{L - \frac{1}{4}L}{L} = \frac{3}{4},$$



3. ábra

azaz $\varphi = 41{,}4°$, és így a két fonál által bezárt legnagyobb szög: $2\varphi = 82{,}8°$.

d) Legyen a fonalakat feszítő erő a fonalak szélső helyzetében F_1 és F_2. Ebben a helyzetben mindkét golyó pillanatnyi sebessége nulla, tehát a fonálirányú (centripetális) gyorsulásuk is nulla kell hogy legyen. Ezek szerint mindkét testre igaz, hogy az eredő erő fonálirányú komponense nulla, vagyis a fonálerő a nehézségi erő fonálirányú komponensével egyenlő:

$$F_1 = Mg\cos\varphi = \frac{3}{4}Mg = \frac{9}{4}mg,$$

$$F_2 = mg\cos\varphi = \frac{3}{4}mg.$$

A felfüggesztési pontban ható eredő erő a koszinusztétel szerint

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - 2\varphi) =$$

$$= \frac{45}{8}m^2g^2 + \frac{27}{8}m^2g^2\cos(2\varphi) = \frac{45}{8}m^2g^2 + \frac{27}{8}m^2g^2(2\cos^2\varphi - 1) = \frac{387}{64}m^2g^2,$$

vagyis

$$F = \frac{3\sqrt{43}}{8}mg \approx 2{,}46\,mg.$$

Az együttes terhelőerő irányát a szinusztétel segítségével számíthatjuk ki. A 3. ábráról leolvasható, hogy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{F_2}{F} = \frac{2}{\sqrt{43}},$$

ahonnan

$$\sin\alpha = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{43}} \approx 0{,}303, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha \approx 17{,}6^\circ.$$

A felfüggesztési pontnál ható terhelőerő tehát a vízszintessel $90^\circ - \varphi + \alpha = 66{,}2^\circ$-os szöget zár be.

e) A fonalak mozgása nem függ a rajtuk lévő tömegek nagyságától, ezért a második ütközés akkor fog bekövetkezni, amikor mindkét fonál épp függőleges.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

42 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 8, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5397. *Egy* $Q = 10^{-9}$ C *töltésű kicsiny testet egy nagy méretű, földelt fémlemeztől* $d = 10$ cm *távolságban szigetelő állványon rögzítettünk.*

a) *Mekkora a fémlemez felületi töltéssűrűsége a kicsiny testhez legközelebb eső P pontjában?*

b) *Milyen messze van P-től az a pont, ahol a fémlemez felületi töltéssűrűsége a maximális értéknek egyharmada?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

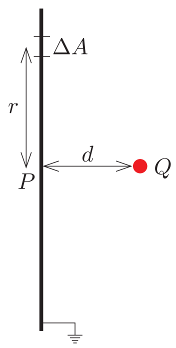
Megoldás. A Q pozitív töltés negatív töltéseket vonz a földelt fémlemezre. A töltés és a fémlemez elektromos mezője, a fémlemez azon oldalán, ahol a Q töltés is van, ugyanolyan, mintha a lemez másik oldalán, attól d távolságban lenne egy $-Q$ „tükörtöltés”, és nem lenne ott a fémlemez.

Tekintsünk egy, a P ponttól r távolságban lévő kicsiny, ΔA nagyságú felületdarabkát a fémlemez síkjában (*1. ábra*). Erre a kis felületre alkalmazva a Gauss-féle fluxustörvényt:

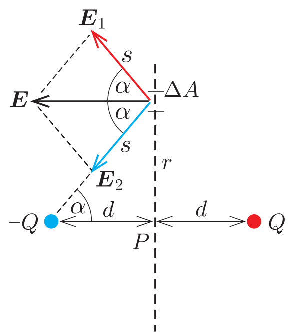
$$\frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0}\Delta A = -E(r)\Delta A,$$

ahol $E(r)$ az eredő (a fémfelületre merőleges irányú) elektromos térerősség nagysága a kérdéses pontban, $\sigma(r)$ pedig az egységnyi felületre jutó elektromos töltés, vagyis a fémlemez felületi töltéssűrűsége. Eszerint a keresett (negatív) töltéssűrűség:

$$\sigma(r) = -\varepsilon_0 E(r).$$



1. ábra



2. ábra

A két töltés elektromos térerősségének nagysága a kis felületdarabnál:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{s^2},$$

ahol s a vizsgált felületdarabkának a Q töltéstől, illetve a $-Q$ tükörtöltéstől mért távolsága (*2. ábra*).

Az eredő $\boldsymbol{E}$ térerősséget a töltés és a tükörtöltés elektromos terének szuperpozíciójából kaphatjuk meg. Ennek nagysága:

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{s^2}\cos\alpha,$$

ahol $\cos\alpha = d/s$ és $s = \sqrt{d^2+r^2}$. Így tehát a fémlemez töltéssűrűsége: a P ponttól r távolságban

$$\sigma(r) = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}}.$$

a) A P pontban

$$\sigma(r=0) = -\frac{Q}{2\pi d^2} = 1{,}59 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ez a töltéssűrűség maximális értéke.

b) Ha a P ponttól x távolságban a felületi töltéssűrűség a legnagyobb érték harmada, akkor

$$\sigma(x) = -\frac{Q}{2\pi}\,\frac{d}{\left(d^2+x^2\right)^{3/2}} = -\frac{Q}{6\pi d^2}$$

teljesül. Innen a kérdéses távolság

$$x = d\sqrt{3^{2/3}-1} = 0{,}104\ \mathrm{m}.$$

Dóra Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 12. évf.)

20 dolgozat érkezett. Helyes Dóra Márton, Gábriel Tamás, Schmercz Blanka és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 9 dolgozat.

P. 5398. *Digitális fényképezőgépen* 35 mm *gyújtótávolságú objektív található, melynek közelpontja* 25 cm. *A közelpont az a szenzortól mért legkisebb távolság, ahonnan az objektív még képes fókuszálni.*

a) Hogyan változik meg a közelpont távolsága, ha az objektív és a fényképezőgép közé egy közgyűrűt helyezünk, melynek hatására az objektív 12 mm*-rel messzebbre kerül a szenzortól?*

b) Készítsünk egy közelpontba helyezett tárgyról felvételt közgyűrűvel és anélkül. Hogyan aránylik egymáshoz ezen két kép nagysága?

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. Ismerjük, hogy az objektív fókusztávolsága: $f = 3{,}5$ cm, a közelpont távolsága a szenzortól: $\ell = 25$ cm és a közgyűrű vastagsága: $d = 1{,}2$ cm.

a) A feladat szövege szerint a közelpontban lévő tárgyról az objektív még éppen képes éles képet alkotni, vagyis a szokásos jelölésekkel

$$\ell = t + k.$$

A leképzési törvényből:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ell - t}.$$

Ez t-re nézve másodfokú egyenlet:

$$t^2 - \ell t + \ell f = 0,$$

amelynek megoldása

$$t_1 = 20{,}8\ \mathrm{cm}, \qquad \text{illetve} \qquad t_2 = 4{,}2\ \mathrm{cm}.$$

Esetünkben fizikai értelme a nagyobb ($t = t_1$) gyöknek van, hiszen a leképezéskor $t > 2f = 7$ cm esetben kapunk – a fényképezőgépektől elvárható módon – kicsinyített képet. A képtávolság: $k = \ell - t_1 = 4{,}2$ cm.

A közgyűrű behelyezése után a képtávolság a korábbi esethez képest d-vel nő, vagyis $k' = k + d = 5{,}4$ cm lesz, és az ehhez tartozó tárgytávolság: $t' = 9{,}9$ cm.

A keresett közelponttávolság tehát a közgyűrű behelyezése után

$$\ell' = t' + k' = 15{,}3 \text{ cm}.$$

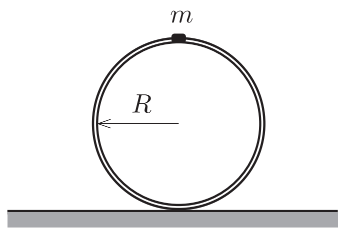
b) Közgyűrű nélkül egy T nagyságú tárgy képének mérete: $K_1 = T\frac{k}{t}$, közgyűrűvel pedig $K_2 = T\frac{k'}{t'}$. A keresett arány tehát

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{k't}{t'k} = \frac{5{,}4 \cdot 20{,}8}{9{,}9 \cdot 4{,}2} \approx 2{,}7.$$

Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

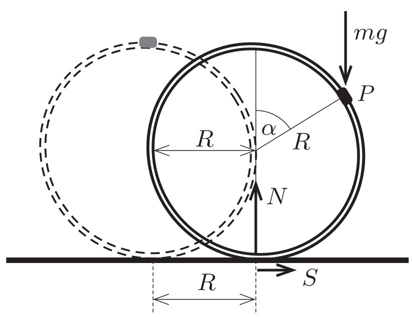
9 dolgozat érkezett. Helyes Gábriel Tamás, Kertész Balázs, Kürti Gergely, Toronyi András és Téglás Panna megoldása. Hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

P. 5402. *Egy R sugarú, elhanyagolható tömegű, vékony hengeres abroncsra egy m tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. Az abroncs az* ábrán *látható labilis egyensúlyi helyzetéből kimozdul, és akkor csúszik meg a talajon, amikor középpontjának elmozdulása éppen R. Mekkora a tapadási súrlódási együttható az abroncs és a vízszintes talaj között?*



(*5 pont*)

Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő



Megoldás. Mivel az abroncs tisztán gördül, mialatt a talajon megtesz R távolságot, a geometriai középpontjának elmozdulása is ugyanennyi, így a szögelfordulása (lásd az *ábrát*)

$$\alpha = 1 \text{ rad} \approx 57{,}3^\circ.$$

Jelöljük a talaj által az abroncsra kifejtett vízszintes súrlódási erőt S-sel, a függőleges nyomóerőt pedig N-nel. Tiszta gördülés esetén

$$S \leqslant \mu_0 N$$

(ahol μ_0 a kérdezett tapadási súrlódási együttható), és a megcsúszás pillanatában

$$S = \mu_0 N.$$

Mivel az abroncs tömege (és így a tehetetlenségi nyomatéka is) elhanyagolható, a rendszer tömegközéppontja mindig az m tömegű test pillanatnyi helyzeténél, a P pontnál lesz. A nehezék pontszerűnek tekinthető, így a tehetetlenségi nyomatéka nullának vehető.

A forgómozgás alapegyenlete szerint az abroncsra és a nehezékre ható külső erők eredő forgatónyomatéka a P pontra:

$$\sum M = \Theta_P\,\beta = 0,$$

$$\sum M = NR\sin\alpha - SR(1+\cos\alpha) = 0.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mu_0 = \frac{S}{N} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0{,}55.$$

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., 11. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes Beke Bálint, Bencz Benedek, Dóra Márton, Kertész Balázs, Nemeskéri Dániel és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 4, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 415. A nyár melegét még kihasználva mérjük meg, hogy milyen távolságra jut el egy talajszinten lévő tömlőből indított vízsugár a vízhozamtól és szögállástól függően!

(*6 pont*) Közli: *Horváth Norbert,* Budapest

G. 785. Felhős időben vagy esik az eső, vagy nem. Mitől függ, hogy a felhőben lévő esőcseppek (vagy jégkristályok) lepotyognak a gravitáció hatására, vagy benne maradnak a felhőben?

(*3 pont*)

G. 786. Egy decemberi és egy júniusi napon, Ecuadorban, délben, védőszemüvegben arccal a Nap felé fordulunk. Mit látunk, merre mozog a Nap az égen, jobbra vagy balra?

(*3 pont*)

G. 787. Internetes kutakodással állapítsuk meg, hogy mekkora a víz esetében a legnagyobb százalékos eltérés a 0 °C és 100 °C közötti hőmérséklet-tartományban a következő fizikai mennyiségek vizsgálatakor: sűrűség, hangsebesség, felületi feszültség, fajhő! Hány Celsius-fokhoz tartozik ezeknek a mennyiségeknek a legnagyobb és legkisebb értéke? (A százalékos eltérést mindig a legnagyobb értékhez viszonyítsuk.) Tüntessük fel az adatok forrását!

(*3 pont*)

G. 788. Egy fiú csónakjával átevez egy folyón a pontosan szemben lévő mólóhoz, majd azonnal megfordul és visszaevez a kiindulási pontba. A 288 m széles folyó vizének sebessége 1 m/s, a csónak vízhez viszonyított sebessége 2,6 m/s. A fiú azt is kipróbálja, hogy a folyón felfelé tesz meg 288 métert, majd a visszautat is ugyanúgy evezve teszi meg. Számítsuk ki a csónak kétféle mozgásának idejét!

(*4 pont*)

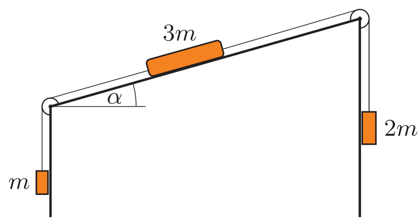
P. 5418. Két különböző szögben, de megegyező kezdősebességgel elrúgott labda azonos távolságban ért földet. A magasabb pályán haladó labda kétszer annyi ideig repült, mint a másik. Hogyan aránylik egymáshoz a két pálya csúcsmagassága? Milyen szögek alatt rúgták el a labdát?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5419. Vízszintes síkon egyenletesen, 6 m/s nagyságú sebességgel mozgó pontszerű test gyorsulásának nagysága állandó. A test pályájának A és B pontja közé eső útja 1,2-szerese az elmozdulásvektor nagyságának. Ezt az utat a test 2 másodperc alatt teszi meg. Mekkora a gyorsulása?

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

P. 5420. *a*) Milyen α szög esetén van egyensúlyban az *ábrán* látható rendszer, ha a lejtőn nincs súrlódás?



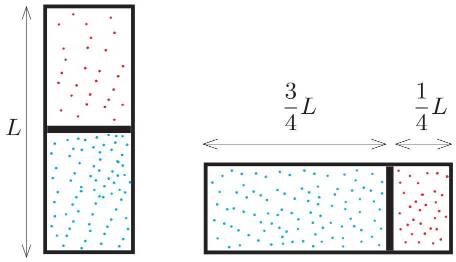
b) Milyen α szögek esetén vannak egyensúlyban a testek, ha a lejtőn a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$?

c) Mekkora gyorsulással és merre mozognak a testek, ha $\alpha = 35°$ és a súrlódási együttható $\mu = 0{,}15$? Mekkora ebben az esetben a két kötélerő aránya?

(*5 pont*) Közli: *Siposs András*, Budapest

P. 5421. A tengerfenéken, 150 m mélységben fekszik egy elsüllyedt, főleg acélból készült, egykoron 1000 tonna vízkiszorítású hajó, amelyet szeretnének a felszínre hozni. Ennek érdekében a búvárok boltíves részeket alakítanak ki a hajóban, amelyek alá hosszú csöveken keresztül a felszínről légköri levegőt juttatnak kompresszorok segítségével. Legalább mekkora munkát kell végezniük a kompresszoroknak, hogy a hajó megemelkedjen a tengerfenékről! Feltételezhetjük, hogy a tenger és a levegő is 15 °C hőmérsékletű.

(*5 pont*) Közli: *Tófalusi Péter,* Debrecen

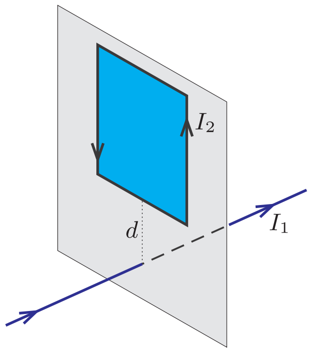


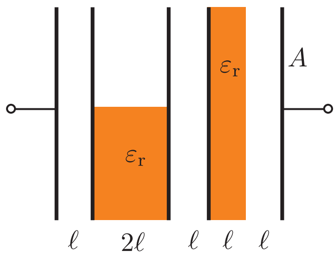
P. 5422. Egy zárt, henger alakú, $L=40$ cm hosszúságú, hővezető falú tartályt egy vékony dugattyú oszt két részre, amelyekben ideálisnak tekinthető gáz található. Kezdetben a tartály tengelye függőleges, a dugattyú pedig egyensúlyi állapotában éppen a tartály felénél helyezkedik el. Ezután a tartály szimmetriatengelyét 90°-kal lassan elforgatjuk, melynek eredményeképp a dugattyú 10 cm távolsággal mozdul el. Mennyivel mozdult volna el a dugattyú, ha 90° helyett 180°-kal forgattuk volna el a tartályt? A hőmérséklet mindvégig állandó.

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5423. Egy hosszú, egyenes vezetőre merőleges síkban egy téglalap alakú drótkeretet helyezünk el. A vezetőhöz legközelebb, d távolságra a keret egyik élének középpontja található. Vonzza vagy taszítja egymást a két vezeték, ha az egyenes vezetőben I_1, a vezető keretben pedig I_2 erősségű áram folyik?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*





P. 5424. Az *ábrán* látható kondenzátorrendszert 5 darab négyzet alakú, A területű, töltetlen fémlemezből állítottuk össze. A lemezek távolsága ℓ, illetve 2ℓ, a széleffektusok $\ell^2 \ll A$ miatt elhanyagolhatóak.

A lemezek között levegő, illetve a barna színnel jelölt térrészekben ε_r relatív dielektromos állandójú szigetelő anyag van. A dielektrikum mindkét esetben az adott helyen lévő kondenzártorlemezek közötti térfogat felét tölti ki.

Mekkora az elrendezés eredő kapacitása?

(*5 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

P. 5425. Fénysugár levegőből $n=1{,}33$ törésmutatójú vízbe lép át. Mekkora a beesési szög, ha a fénytörés során a fénysugár sebességének a határfelületre merőleges komponense nem változik meg?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5426. A fotonrakéta olyan elképzelt rakéta, amelynek hajtóműve az üzemanyagot fotonokká alakítja, majd azokat egyirányban, párhuzamosan kilövelli. Egy hosszútávú űrutazás során a rakéta nyugalomból indulva egyenes pályán haladva felgyorsul valamekkora sebességre, majd a hajtóművét az ellenkező irányban üzemeltetve az úticélig fékezve megáll. Ezalatt a rakéta tömege negyedére csökken. Mekkora volt a rakéta maximális sebessége?

(A relativisztikus dinamikáról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján.*)

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

❄

Beküldési határidő: 2022. október 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

2022. október 14-én,

pénteken délután 15^{h}-tól 20^{h}-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de hagyományos (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Versenybizottság

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 6. September 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 351): **K. 729.** What angle is enclosed by the hands of the tower hall clock 2022 minutes before it strikes midnight? (Based on the idea of *K.A. Kozma,* Győr) **K. 730.** Eight chords are drawn in a circle, such that they have the largest possible number of intersections. Into how many regions will the eight chords divide the disc bounded by the circle? **K. 731.** A 4×6 rectangle is to be covered, without overlaps, with tiles congruent to the L-shape shown in the *figure*. The L-shaped tiles may be rotated or turned over as needed. Are there at least 36 different arrangements possible? **K/C. 732.** Four mathematics teachers are all younger than 70 years, and the age of each of them is a prime number of years. How old is the youngest if their average age is 60 and all their ages are different? **K/C. 733.** What is the area of the smallest rectangle that has an inscribed parallelogram in which one angle is 60°, sides are 4 cm and 6 cm long, and two sides lie on two sides of the rectangle?

New exercises for practice – competition C (see page 352): **Exercises up to grade 10: K/C. 732.** See the text at Exercises **K. K/C. 733.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1728.** Find the exact solutions of the equation $-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}=\{x\}$. ($\{x\}$ denotes the fractional part of x, that is, the difference between x and the greatest integer not greater than x.) **C. 1729.** Semicircles k_1 and k_2, respectively, are drawn outside a square $ABCD$, over the sides BC és CD as diameters. The midpoints of the semicircular arcs are E and F, and the midpoints of line segments DE and AF are P and Q, respectively. Show that P lies on diagonal AC and Q lies on diagonal BD of the square. **C. 1730.** Find all decimal numbers of the form $\overline{0.abc}$ where a, b, c are digits, $a\neq 0$, and $\overline{0.abc}=\frac{a}{a+b+c}$. (*Croatian problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1731.** The parallel sides of a trapezium $ABCD$ are $AB>CD$. The midline of the trapezium intersects diagonal AC at E and diagonal BD at F. The length of line segment CD is the a) arithmetic b) geometric mean of line segments AB and EF. In which of the two cases will the ratio $\frac{AB}{CD}$ have a larger value? **C. 1732.** Let U denote the set of prime numbers greater than 337 but not greater than 733. How many 4-element subset does U have that contain 467 or 499 as an element?

New exercises – competition B (see page 353): **B. 5254.** Prove that the difference of the squares of any two odd numbers not divisible by 3 is divisible by 24. (*3 points*) (*Journal of Mathematics and Science Didactics,* 1943) **B. 5255.** Vertex A of a triangle ABC is reflected about vertex B, B is reflected about C, and C is reflected about A. The reflections are points C_1, A_1 and B_1, respectively. Show that there exists a triangle with sides of lengths AA_1, BB_1 and CC_1. (*3 points*) **B. 5256.** In the lottery game, five numbers are drawn out of ninety every week. Andrew fills out a single lottery ticket with the same five numbers in each of the 52 weeks of the year. Belle uses a different scheme. She plays only once a year with 52 tickets simultaneously: she fills them out in pairwise different ways. Is it true that both of them have the same chance of having a ticket with five correct numbers? (*4 points*) **B. 5257.** In an acute-angled triangle ABC, the heights are AA_1, BB_1, CC_1, and the midpoint of side AB is F. A circle k passes through the points F and C_1, and intersects the extensions of line segments A_1C_1 and B_1C_1 beyond C_1 at points P and Q, respectively. Prove that $A_1P = B_1Q$. (*4 points*) **B. 5258.** Is it true that every positive integer has a positive multiple in which the sum of the digits in decimal notation is at most 2022? (*5 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5259.** Solve the following simultaneous equations over the set of real numbers: $x^2 - 3y + 4 = z$, $y^2 - 3z + 4 = w$, $z^2 - 3w + 4 = x$, $w^2 - 3x + 4 = y$. (*4 points*) (Based on the idea of *M. Bencze,* Brassó) **B. 5260.** G and H are points of chord AB of a circle k such that $AG = GH = HB = 1$. Let F denote the midpoint of one of the arcs AB. The secants FH and FG intersect the circle again at points C and D, respectively. Show that $CD = BC^2$. (*6 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5261.** Starting Player and Second Player are playing a game on the edges of a complete graph of 100 vertices. They take turns in colouring an edge of the graph that has not been coloured before. In each step, Starting Player colours his edge red, and Second Player colours his edge blue. The game terminates and Starting Player wins if there is a set of four vertices such that all the six connecting edges are red. The game terminates and Second Player wins if there is a set of four vertices such that all the six connecting edges are blue. The game terminates with a draw if there is no such set of four vertices but there remain no further vertices to colour. Who has a winning strategy? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 354): **A. 830.** For $H \subset \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{Z}$, let h_n denote the number of finite subsets of H in which the sum of the elements is n. Does there exist $H \subset \mathbb{Z}$, for which $0 \notin H$, and h_n is a (finite) even number for every $n \in \mathbb{Z}$? (The sum of the elements of the empty set is 0.) (Submitted by *Csongor Beke,* Cambridge) **A. 831.** In triangle ABC let F denote the midpoint of side BC. Let the circle passing through point A and tangent to side BC at point F intersect sides AB and AC at points M and N, respectively. Let line segments CM and BN intersect in point X. Let P be the second point of intersection of the circumcircles of triangles BMX and CNX. Prove that points A, F and P are collinear. **A. 832.** Let us assume that the number of offsprings for every man can be $0, 1, \ldots$ or n with probabilities $p_0, p_1, \ldots, p_n$ independently from each other, where $p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$ and $p_n \neq 0$. (This is the so called Galton–Watson process.) Which positive integer n and probabilities $p_0, p_1, \ldots, p_n$ will maximize the probability that the offsprings of a given man go extinct in exactly the tenth generation?

Problems in Physics

(see page 378)

M. 415. Taking advantage of the warm summer weather, measure how the horizontal range of a jet of water launched from a hose at the ground depends on the water flow and the angular position of the nozzle.

G. 785. In cloudy weather, it either rains or it doesn't. What determines whether the raindrops (or the ice crystals) in a cloud fall off due to gravity or stay in the cloud? **G. 786.** One day in December and one in June, in Ecuador, at noon, with solar eclipse glasses on, we face to the Sun. What do we see, which way does the Sun move in the sky, to the right or to the left? **G. 787.** Research the internet and find out in the case of water between the temperature values of 0 °C and 100 °C the largest percentage difference of the following quantities: density, speed of sound, surface tension, and specific heat. To what temperature values (in Celsius degree) do the maximum and minimum values of these quantities belong? (Always relate the difference in percent to the maximum value.) Also indicate the sources of your data. **G. 788.** A boy takes a boat across a river to the pier directly opposite, then immediately turns around and rows back to the starting point. The river is 288 m wide, the water flows at a speed of 1 m/s, and the speed of the boat relative to the water is 2.6 m/s. The boy also tries that he rows upstream 288 m and then rows back to the starting point. Calculate the times for the two movements of the boat.

P. 5418. Two balls, kicked at different angles but with the same initial speed, land at the same distance. The ball with the higher trajectory flew twice as long as the other. What is the relationship between the peak heights of the two trajectories? At what angles were the balls kicked? **P. 5419.** The magnitude of the acceleration of a point-like body moving at a constant speed of 6 m/s in a horizontal plane is constant. The length of the path of the body between points A and B is 1.2 times the magnitude of the displacement vector. It takes 2 seconds for the body to cover this path. What is its acceleration? **P. 5420.** *a*) At what angle of α is the system in the *figure* in equilibrium if there is no friction on the slope? *b*) For what angles of α are the objects in equilibrium if the coefficient of friction on the slope is $\mu = 0.2$? *c*) What is the acceleration and the direction of motion of the objects if $\alpha = 35^\circ$ and the coefficient of friction is $\mu = 0.15$? What is the ratio of the two tensions in this case? **P. 5421.** At the bottom of the sea, 150 m below the surface, lies a sunken, mainly steel ship, which once had a 1000 tons displacement. Divers would like to bring this ship the surface. To do this, the divers create arched sections in the ship, into which the atmospheric air from the surface is pumped through long tubes by means of compressors. At least how much work do the compressors have to do in order to raise the ship off the seabed? We can assume that both the sea and the air has a temperature of 15 °C. **P. 5422.** A closed, cylindrical tank of length $L = 40$ cm, is made of heat-conducting walls and is divided into two parts with a thin piston. There is some ideal gas in both parts of the tank. Initially, the axis of the tank is vertical and the piston is in equilibrium, exactly at the middle of the tank. Then the tank is slowly turned such that its symmetry axis turns 90°, which causes the piston to move a distance of 10 cm. How much would the piston have moved if the tank had been rotated by 180° instead of 90°? The temperature is constant all the time. **P. 5423.** A rectangular frame of wire is placed next to a long, straight conducting wire such that its plane is perpendicular to the wire, as it is shown in the *figure.* The midpoint of one of the edges of the frame is the closest to the wire, and it is at a distance of d from the wire. Do the two wires attract or repel each other if the straight wire carries a current of magnitude I_1 and the conducting frame carries a current of magnitude I_2? **P. 5424.** The capacitor system shown in the *figure* is made of 5 square-shaped uncharged metal plates of area A. The distance between the plates is ℓ or 2ℓ, and the edge effects are negligible because $\ell^2 \ll A$. Between the plates, in the white regions there is air and in the brown regions there is some insulating material of relative dielectric constant $\varepsilon_{\rm r}$. In both condensers which contain dielectric, the dielectric material fills half of the area between the plates of the condensers. What is the equivalent capacitance of the arrangement? **P. 5425.** A ray of light passes from air into water of refractive index $n = 1.33$. What is the angle of incidence if during refraction the component of the speed of light ray which is perpendicular to the boundary does not change? **P. 5426.** A photon rocket is an imaginary rocket whose engine converts fuel into photons, which are then ejected into one direction parallel to each other. During a long-duration space mission, the rocket, starting from rest and moving in a straight path, accelerates to some speed, then with its engine running in the opposite direction, it brakes to a stop at the end of its journey. During this time, the mass of the rocket is reduced to one-quarter of its original value. What was the maximum speed of the rocket?