Feladat. Lássuk be, hogy S-nek az $\mathbf{s}$ középpontú $(-d)$-arányú középpontos nagyítottja, S', tartalmazza S-et. *Ne olvass tovább, segítség következik!*

Segítség. Állítsuk elő a $\mathbf{p}_i$ pontot $\mathbf{p}_i = \lambda_1\mathbf{p}'_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\mathbf{p}'_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{p}'_{i+1} + \ldots + \lambda_{d+1}\mathbf{p}'_{d+1}$ alakban, ahol a λ_j együtthatók nemnegatívak, és az összegük 1.

Végül kimondhatjuk a cikk bevezetőjében szereplő síkbeli feladat d-dimenziós változatát.

2. tétel. *Adott $\mathbb{R}^d$-ben egy zárt, korlátos, konvex halmaz, K. Vegyük az összes K által tartalmazott szimplexet. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális d-dimenziós térfogatú, legyen S ilyen szimplex. Ekkor, ha S-et az* $\mathbf{s}$ *súlypontjából $(-d)$-szeresére nagyítjuk, akkor az így kapott S' szimplex tartalmazza K-t.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása az eddigi előkészületekkel ugyanaz, mint a síkbeli esetét. Jelölje S csúcsait $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$, az S' csúcsait $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{d+1}$. Ekkor 1. állítás szerint minden S'-n kívül eső $\mathbf{p}$ ponthoz van egy $i \in \{1, \ldots, d+1\}$ index, hogy S' az $\{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}'_i\}$ pontok által meghatározott hipersík egyik oldalán található, míg $\mathbf{p}$ a másikon. A (2) képlet alapján könnyű látni, hogy az

$$\big(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}_i\}\big) \cup \{\mathbf{p}\}$$

halmaz konvex burkaként kapott szimplex térfogata nagyobb S térfogatánál, ezért $\mathbf{p}$ nem lehet K pontja. □

Feladat. Lássuk be, hogy S-nek az $\mathbf{s}$ középpontú $(d+1)$-arányú középpontos nagyítottja tartalmazza K-t.

Hivatkozás

[1] Naszódi M.: *Politópok és a gömb d-dimenzióban,* KöMaL **68.** évf. 9. sz. (2018).

Naszódi Márton

EGMO 2022

Az idei Európai Lányok Matematikai Olimpiáját (EGMO-t) Magyarország szervezte 2022. április 6–12. között Egerben. A verseny weboldala:

`https://egmo2022.hu/`.

Erre a megmérettetésre szervező országként két csapatot is delegálhattunk.

A versenyen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiához (IMO) hasonlóan két versenynap van, mindkét nap 3–3 feladatot kell megoldani 4,5 óra alatt. Minden feladat 7 pontot ér. A feladattípusok a következők voltak: geometria, számelmélet, algebra (első nap), algebra, kombinatorika, geometria (második nap). A feladatsorok és megoldások a verseny hivatalos honlapján elérhetőek:

`https://www.egmo.org/egmos/egmo11/`.

Idén 57 országból 222 résztvevő oldotta meg a feladatokat.

A magyar lányok kiváló eredményt értek el. A „HUN" csapat a hivatalos európai listán a 31 európai ország között az 5. helyet szerezte meg 96 ponttal. Az összes (57) résztvevő országot tekintve a „HUN" csapat 8., a „HUNB" csapat pedig (nem hivatalos európai csapatként) a 19. lett. Az egyéni eredmények:
Fülöp Csilla: 32 pont, európai 3. hely, összesített 12. hely, *aranyérem;*
Kercsó-Molnár Anita: 25 pont, összesített 35. hely, *ezüstérem;*
Páhán Anita Dalma: 24 pont, európai 24. hely, összesített 40. hely, *ezüstérem;*
Somogyi Dalma: 22 pont, összesített 51. hely, *ezüstérem;*
Sztranyák Gabriella: 21 pont, európai 33. hely, összesített 56. hely, *bronzérem;*
Nagy Leila: 19 pont, európai 44. hely, összesített 74. hely, *bronzérem;*
Ungár Éva: 16 pont, összesített 97. hely, *bronzérem;*
Beinschroth Ninett: 15 pont, összesített 118. hely.

A végső eredménylista a

`https://www.egmo.org/egmos/egmo11/scoreboard/`

oldalon tanulmányozható.

Köszönjük a Morgan Stanley és A Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását.

A jövő évi verseny 2023. április 13–19. között Portorožban lesz. Reméljük, hogy jövőre is hasonlóan sok lelkes lánnyal találkozhatunk a felkészítés folyamán és a válogatóversenyeken.

Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa, Janzer Lili
az EGMO felkészítő csapat nevében

Az EGMO 2022 feladatai

Első nap

1. Legyen ABC egy olyan hegyesszögű háromszög, ahol $BC < AB$ és $BC < CA$. A P pont az AB szakaszon, a Q pont az AC szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $P \neq B$, $Q \neq C$ és $BQ = BC = CP$. Legyen T az APQ háromszög körülírt körének középpontja, H az ABC háromszög magasságpontja, valamint S a BQ és CP egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a T, H és S pontok egy egyenesre esnek.

2. Jelölje $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ a pozitív egész számok halmazát. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt, amire tetszőleges pozitív egész a, b számokra az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, és

(2) az $f(a)$, $f(b)$ és $f(a + b)$ számok közül legalább kettő egyenlő.