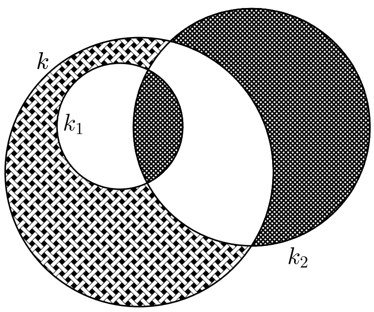
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1714–1720.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1714. Egy táblára felírtuk 1-től 22-ig az egész számokat. Ezután egy lépésben kiválasztunk két számot, letöröljük őket és helyettük felírjuk a különbségük abszolútértékét. Bizonyítsuk be, hogy a táblára utoljára felírt szám páratlan.

(*német feladat*)



C. 1715. A k kör belsejébe rajzoltunk egy 8 cm sugarú k_1 kört. Mindkét kört metszi az *ábrán* látható módon egy 15 cm sugarú k_2 kör. Mekkora k sugara, ha a k belsejében, de k_1-en kívül levő satírozott síkidom területe megegyezik a k_2 belsejében levő satírozott síkidomok területének összegével?

Feladatok mindenkinek

C. 1716. Faktoriális számrendszerben a helyiértékek nem egy egész szám, az alapszám hatványai, hanem az n-edik helyiérték az n szám faktoriálisa. Tehát az első helyiértéken lévő számjegyet 1-gyel, a második helyiértéken álló számot 2-vel, a harmadik helyiértéken álló számot 6-tal kell szorozni, és így tovább. Ennek megfelelően pl. a $3310_!$ faktoriális számrendszerbeli szám értéke tízes számrendszerben $3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! = 92$. (Amennyiben a szám faktoriális alakjában egy helyiértéken többjegyű szám áll, akkor azt zárójelbe tesszük.)* Megfigyeltük, hogy $111_!$ harmada $11_!$, az $111\,111_!$ harmadrésze $22\,011_!$ és $111\,111\,111_!$ harmada pedig $33\,022\,011_!$. Adjuk meg a $3n$ darab 1-esből álló, faktoriális számrendszerben megadott szám harmadát faktoriális számrendszerben.

Lénárt István (Budapest) ötletéből

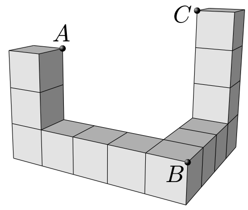
C. 1717. Legyen a $15x^2 - 21x + 7 = 0$ egyenlet két valós gyöke x_1 és x_2. Adjuk meg az

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

kifejezés pontos értékét.

* Igazolható, hogy a felírás egyértelmű, tehát minden pozitív egésznek egy alakja van faktoriális számrendszerben. Lásd az **I. 553.** januári informatika feladatot.

C. 1718. Egy síkon elhelyeztünk 8 darab egységnyi élű kockát, majd ezekre még 5 darab egységkockát tettünk az *ábra* szerint.



Határozzuk meg az ABC háromszög oldalainak hosszát.

Feladatok 11. évfolyamtól

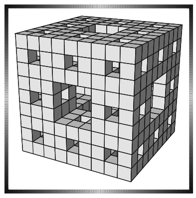
C. 1719. Tekintsük az ABC szabályos háromszög azon P belső pontjait, amelyekből az AB oldal $135°$-os szögben látszik. Bizonyítsuk be, hogy a PA, PB, PC szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög, és a P pont bármely, a feltételnek megfelelő elhelyezkedése esetén ennek a háromszögnek az egyik szöge mindig ugyanakkora.

C. 1720. Adott egy 10 elemű halmaz, amelynek elemei legfeljebb kétjegyű, pozitív egész számok. Igaz-e, hogy ennek a halmaznak mindig van két olyan diszjunkt részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő?

❄

Beküldési határidő: 2022. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5238–5245.)

B. 5238. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számok körében:

$$(k+n)! = k^3 + n^3 + (k+n)(3kn-1).$$

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5239. Egy háromszög oldalai a, b és c, ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnak. Mutassuk meg, hogy a beírt kör középpontja harmadolja a b oldalhoz tartozó szögfelezőt.

(*3 pont*)

B. 5240. Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege n.

(*4 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)