A két egyenletet összeszorozva:

$$m^4 = 16xyzv,$$

majd négyzetgyököt vonva (megtehetjük, mert mindkét oldal pozitív):

$$m^2 = 4\sqrt{xyzv}\,.$$

Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti közismert összefüggést (x és v, illetve y és z közepeire):

$$m^2 = 4\sqrt{xv}\sqrt{yz} \leqslant 4 \cdot \frac{x+v}{2} \cdot \frac{y+z}{2} = (x+v)(y+z),$$

majd helyettesítsük be a trapéz ($a = x+v$ és $c = y+z$) alapjait és vonjunk ismét négyzetgyököt. Így éppen az

$$m \leqslant \sqrt{(x+v)(y+z)} = \sqrt{ac}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, azaz a feladat állítását beláttuk.

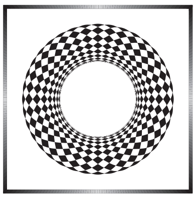
Diszkusszió: Az $x = y$ esetben létrejövő elfajult derékszögű háromszögre is igaz az állítás, az $x < y$ esetet a *4. ábrán* láthatjuk.

Ilyenkor a Pitagorasz-tételt alkalmazva az $(x+y)^2 = m^2 + (y-x)^2$ egyenletet kapjuk. Mivel $(x-y)^2 = (y-x)^2$, így ez sem befolyásolja a megoldást, és ugyanígy nincs baj, ha y és z arányait változtatjuk.

Egyenlőség a közepek miatt $x = v$ és $y = z$ esetén áll fenn, vagyis ha a trapéz nemcsak érintő-, hanem húrtrapéz is.

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 79 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 9, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.



Nehezebb feladat megoldása*

A. 812. *Két játékos a következő játékot játssza: van két kupac, melyekből felváltva kell kavicsokat elvenniük, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ha a kupacok mérete egy adott pillanatban A és B, akkor a soron következő játékos valamelyik kupacból elveheti A egy többszörösét vagy B egy többszörösét.*

* Szeptembertől ismét minden A-jelű feladat megoldása megtalálható honlapunkon, ez az egyik közülük.

Határozzuk meg azokat az (k, n) számpárokat, melyekre a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha kezdetben az egyik kupacban k, a másikban pedig n darab kavics van.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

Megoldás. Azt állítjuk, hogy pontosan akkor van a második játékosnak nyerő stratégiája, ha $n \leqslant \varphi k$ és $k \leqslant \varphi n$, ahol $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ az úgynevezett aranymetszés. Ismert, és könnyen ellenőrizhető, hogy $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, ezt az azonosságot többször fogjuk alkalmazni.

Nevezzünk egy helyzetet nyerőnek, ha onnan a kezdő játékos nyer, vesztőnek, ha a második. Egy helyzet pontosan akkor nyerő, ha onnan lehet vesztőre lépni, és akkor vesztő, ha onnan csak nyerőre lehet lépni. Világos, hogy a $(0, k)$ és $(k, 0)$ helyzetek nyerők, és a (k, k) helyzet vesztő, mivel onnan csak $(0, k)$-ra vagy $(k, 0)$-ra lehet lépni ($k > 0$), így ezekben az esetekben tényleg igaz az állításunk. Mostantól a (k, n) állapotot vizsgáljuk, és feltesszük, hogy $n, k > 0$ és $k < n$.

Először tegyük fel, hogy (k, n) vesztő helyzet, igazoljuk, hogy ekkor csak nyerő helyzetre lehet lépni. Azt tudjuk, hogy $k < n \leqslant \varphi k < 2k$, így ebből az állásból csak a $(0, n)$, $(k, 0)$ és $(k, n-k)$ helyzetekbe lehet lépni. Az első kettő nyerő, és a harmadik is, mivel

$$\varphi(n-k) \leqslant \varphi^2 k - \varphi k = k,$$

és φ irracionális, így $\varphi(n-k) < k$.

Most tegyük fel, hogy (k, n) nyerő helyzet, azaz $\varphi k < n$. Indirekten tegyük fel, hogy nem tudunk innen vesztő helyzetre lépni. Osszuk el n-t maradékosan k-val, legyen $n = dk + r$ ahol $r < k$. Ekkor a (k, r) párra lehet lépni, így $\varphi r < k$. Továbbá a $\varphi k < r + k$ egyenlőtlenség is teljesül, mivel vagy tudunk ide lépni, és akkor az indirekt feltevés miatt igaz, vagy $r + k = n$, ekkor azért igaz, mert (k, n) nyerő helyzet. Ezt a két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy

$$\varphi k < r + k < \frac{k}{\varphi} + k.$$

Átrendezve és φ-vel szorozva

$$k(\varphi^2 - \varphi - 1) < 0,$$

ami ellentmondás, mivel $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

18 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott 12 versenyző: Bán-Szabó Áron, Ben Gillott, Diaconescu Tashi, Lovas Márton, Móra Márton Barnabás, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Seres-Szabó Márton, Simon László Bence, Sztranyák Gabriella, Tarján Bernát, Varga Boldizsár. 6 pontos 1, 5 pontos 1, 3 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.