*A javító megjegyzései.* 1. A versenyzők egy része összekeverte az oszthatóság fogalmát azzal, hogy két szám relatív prím. Abból, hogy $(a;b)>1$ nem következik, hogy $a \mid b$ vagy $b \mid a$.

2. A másik komoly probléma a túlzott általánosítás volt, például a közös osztó létezésének megmutatása helyett sokan azonnal közös osztót mutattak, amelyre legtöbbször létezik triviális ellenpélda.

3. Végül, súlyos elvi hibaként előfordult, hogy csak néhány konkrét $p$ prímre bizonyította a versenyző az állítást, de általánosan nem.

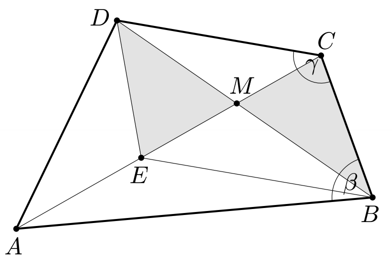
## Matematika feladatok megoldása

**B. 5139.** *Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja $M$. Az $ADM$ háromszög területe nagyobb a $BCM$ háromszög területénél. A négyszög $BC$ oldalának felezőpontja $P$, $AD$ oldalának felezőpontja pedig $Q$, $AP+AQ=\sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint* 1.

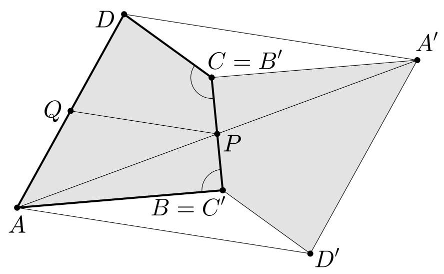
(*5 pont*)

**Megoldás.** Először megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszögben $\beta+\gamma>180^\circ$ (*1. ábra*).

A feltétel szerint $T(ADM)>T(BCM)$, ezért az $AM$ szakasz belsejében létezik olyan $E$ pont, amelyre $T(EMD)=T(BCM)$. Ismert továbbá, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha az $EBCD$ négyszög trapéz, úgy hogy $EB$ és $CD$ a trapéz alapjai. Ekkor $EBC\sphericalangle+\gamma=180^\circ$, azonban az $E$ pont az $AM$ szakasz belső pontja, azaz $EBC\sphericalangle<\beta$, így $\beta+\gamma>180^\circ$.




*1. ábra*




*2. ábra*

Tükrözzük a négyszöget a $BC$ oldal $P$ felezőpontjára és használjuk a *2. ábra* jelöléseit.

A tükrözésnél $ABD'A'CD$ egészen biztosan konkáv hatszöget alkot, mert $B$-nél és $C$-nél létrejött szögei a fentiek alapján nagyobbak $180^\circ$-nál. Látjuk tehát, hogy az $AD'A'D$ paralelogramma területe nagyobb a hatszög területénél.

$$AD+AA'=2\sqrt{2}=\sqrt{8}, \quad \text{ezért ha} \quad AD=x, \text{ akkor } AA'=\sqrt{8}-x.$$

Legyen a négyszög területe $T$, így a tükrözéssel kapott konkáv hatszög területe $2T$. Ennél biztosan nagyobb a paralelogramma két szomszédos oldalának szorzata $x(\sqrt{8}-x)$, mert a paralelogramma $AD=x$ alapjához tartozó magasság legfeljebb $AA'=\sqrt{8}-x$,

$$2T < x(\sqrt{8}-x).$$

A befejezéshez használjuk fel a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x(\sqrt{8}-x)} \leqslant \frac{x+\sqrt{8}-x}{2} = \sqrt{2}\,,$$

innen azonnal a

$$2T < x(\sqrt{8}-x) \leqslant 2,$$

vagyis az igazolandó $T<1$ adódik.

*Csonka Illés* (Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn., Pécs, 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 44 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 36, 4 pontot 5 tanuló. 3 pontos 2, 1 pontos 1 versenyző dolgozata.

**B. 5149.** *Hányféleképpen lehet kitölteni egy* $6\times 6$*-os táblázat mezőit az* $1,2,\dots,36$ *számokkal úgy, hogy bárhogy választunk* 6 *mezőt, melyek közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy oszlopban, a kiválasztott mezőkbe írt számok összege mindig ugyanannyi legyen?*

(*6 pont*)

**Megoldás.** Először oldjuk meg a következő feladatot: *hány, az* 1*-est tartalmazó* $S$ *részhalmaza van a* $H:=\{1,2,\dots,36\}$ *halmaznak, ha* $S$*-nek létezik* 6 *diszjunkt eltoltja, melyek uniója* $H$*?*

Tegyük fel, hogy $S$ egy ilyen részhalmaz; bontsuk az $S$-ben található elemeket nem érintkező intervallumok uniójára; megmutatjuk, hogy ezek az intervallumok egyenlő hosszúak. Legyen az első intervallum hossza $x$; ennek az intervallumnak az elemei: $1,2,\dots,x$. Az itt nem szereplő $x+1$-et az $S$ halmaz $x$-szel való eltoltja tartalmazza. Ha $S$-ben lenne egy másik, $y>x$ hosszúságú intervallum, akkor az nem lenne diszjunkt az $x$-szel való eltoltjával. Hasonlóan belátható, hogy az utolsó intervallum is legalább olyan hosszú, mint a leghosszabb intervallum. Ha nem mindegyik intervallum ugyanolyan hosszú, akkor a hosszak sorozata csak $(2,1,1,2)$ lehet, ez azonban nem lehetséges: $S=\{[1,2],[a],[b],[c,c+1]\}$-ben $a,b,c,c+1>3$ miatt 3-at csak $S$-nek a 2-vel való eltoltja, $S+2=\{[3,4],[a+2],[b+2],[c+2,c+3]\}$ tartalmazhatja. Hasonlóan, az ebben nem szereplő 5-öt csak $S+4=\{[5,6],[a+4],[b+4],[c+4,c+5]\}$ tartalmazhatja, stb. Az $a+1$ sem $S$-nek, sem pedig $S+2$-nek nem eleme, ezért $a+1\geqslant 5$, így $a+1$ az $S+4$, $S+6$, $S+8$, $S+10$ eltoltak valamelyikében, szükségszerűen az $[5,6]$, $[7,8]$, $[9,10]$, $[11,12]$ intervallumok egyikében van. Ez azt jelenti, hogy $a$ viszont az $S+2,\dots,S+10$ eltoltak egyikéhez tartozik – akkor azonban ez nem lenne diszjunkt $S$-sel.

Ha az intervallumok egyenlő hosszúak, hosszuk a 6 osztója, 1,2,3 vagy 6 lehet. Ha 6, akkor – mivel $S$ tartalmazza az 1-et – $S$ csak $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lehet.

Ha a közös hossz 3: A két intervallum közti távolság 3-mal osztható (kitölthető 3 hosszú intervallumokkal), ami lehet 6, 9, vagy 18, így a halmazok: $S \in \big\{\{1, 2, 3, 7, 8, 9\},\ \{1, 2, 3, 10, 11, 12\},\ \{1, 2, 3, 19, 20, 21\}\big\}$ (az elsőt 3-mal eltolva egy 12, a másodikat 3-mal kétszer eltolva egy 18, a harmadikat 3-mal ötször eltolva egy 36 hosszú, lefedett intervallumot kapunk, ezeket rendre 2-szer, 1-szer, illetve 0-szor ismételve megkapjuk az $\{1, \dots, 36\}$ halmazt).

Ha a közös hossz 2: Az első és a második, illetve a második és a harmadik intervallum közti távolság ugyanaz (különben a korábbiakhoz hasonló ellentmondás adódik), ez a távolság lehet 4, 6, vagy 12, tehát a halmazok: $S \in \big\{\{1, 2, 5, 6, 9, 10\},$ $\{1, 2, 7, 8, 13, 14\},\ \{1, 2, 13, 14, 25, 26\}\big\}$ (az elsőt 2-vel tolva egy 12, a másodikat 2-vel kétszer eltolva egy 18, a harmadikat 2-vel ötször eltolva egy 36 hosszú, lefedett intervallumot kapunk, ezt rendre 2-szer, 1-szer és 0-szor ismételve megkapjuk az $\{1, \dots, 36\}$ halmazt).

Ha a közös hossz 1: Alkalmazzuk azt az öndualitást, amely a korábbi 7 megfelelő részhalmazt a megfelelő, 1 hosszú intervallumokkal bíró részhalmazokhoz párosítja, úgy, hogy egy részhalmaz duálisa a hozzá tartozó eltoláshalmaz legyen! Mivel minden korábbi részhalmazt legalább 2-vel kellett eltolnunk, tehát az intervallumok távolsága a duálisban legalább 2, továbbá az eltolás kommutatív művelet, a korábbi eltolásokban felcserélve a tagok sorrendjét az unió az $\{1, \dots, 36\}$ marad, továbbá duális duálisa az eredeti részhalmaz. Így 7 ilyen részhalmaz van, tehát összesen $1 + 3 + 3 + 7 = 14$ a megfelelő $S$ részhalmazok száma.

Például az $S = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$ duálisát a következőképpen kaphatjuk meg. Az $S$ megfelelő eltoltjai:

$$\begin{aligned}
&(\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9, 10),\\
&(\ 3,\ 4,\ 7,\ 8, 11, 12),\\
&(13, 14, 17, 18, 21, 22),\\
&(15, 16, 19, 20, 23, 24),\\
&(25, 26, 29, 30, 33, 34),\\
&(27, 28, 31, 32, 35, 36).
\end{aligned}$$

Ekkor az $S$ duálisa: $(1, 3, 13, 15, 25, 27)$.

Térjünk vissza az eredeti feladathoz. Egy megfelelő kitöltésben jelölje a táblázat $x$-edik sorának $y$-adik elemét $(x, y)$. Vegyük észre, hogy ha tetszés szerint permutáljuk a táblázat sorait és oszlopait, akkor továbbra is egy megfelelő kitöltést kapunk. Ezzel elérhetjük, hogy (alkalmas sor- és oszlopcserékkel) a táblázat első sorának első eleme az 1-es legyen. Tetszőleges $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ esetén $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_2) + (x_2, y_1)$, mivel egy, a feladat feltételeinek megfelelő, $(x_1, y_1)$-et és $(x_2, y_2)$-t tartalmazó részösszegben felcserélve az $y_1$-edik és az $y_2$-edik oszlopot nem változik az összeg. Ekkor viszont $(i, j) - (1, j) = (i, 1) - (1, 1)$, tehát az $i$-edik sor az első sor eltoltja, úgy, hogy az első sor első cellájában az 1 van, tehát az így kapható táblázatok száma 14.

Az ilyen táblázatokat $(6!)\cdot(6!)$ féleképpen lehet visszarendezni, vagyis pontosan $14\cdot(6!)^2$ jó kitöltés létezik.

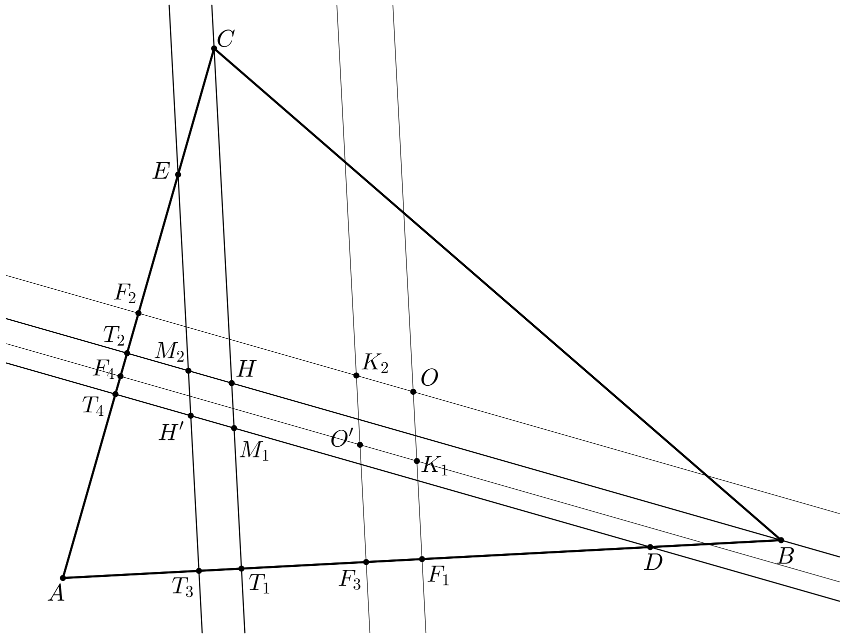
*Németh Márton* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 10. évf.)

49 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 16 versenyző: Argay Zsolt, Bán-Szabó Áron, Baski Bence, Csizmadia Miklós, Duchon Márton, Hegedűs Dániel, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Kovács Tamás, Kökényesi Márk Péter, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Németh Márton, Seres-Szabó Márton, Szanyi Attila, Török Ágoston. 5 pontos 6, 4 pontos 4, 3 pontos 4, 2 pontos 4, 1 pontos 5, 0 pontos 10 dolgozat.

**B. 5173.** *Az $ABC$ hegyesszögű háromszög magasságpontja $H$, körülírt körének középpontja $O$. Legyen $D$ és $E$ az $AB$, illetve $AC$ szakasz belső pontja. Az $ADE$ háromszög magasságpontja és körülírt körének középpontja $H'$, illetve $O'$. Mutassuk meg, hogy a $HH'$ és $OO'$ egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $BD=CE$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

**Megoldás.** Jelöljük az $ABC\triangle$-ben az $AB$, illetve $AC$ oldalakhoz tartozó magasságvonalak talppontját $T_1$-gyel és $T_2$-vel, az $ADE\triangle$-ben az $AD$ és $AE$ oldalakhoz tartozó magasságvonalak talppontját pedig $T_3$-mal és $T_4$-gyel. Legyen $T_1H\cap T_4H'=M_1$ és $T_2H\cap T_3H'=M_2$, az $AB$, illetve $AC$ szakaszok felezőpontja $F_1$ és $F_2$, az $AD$, illetve $AE$ szakaszok felezőpontja $F_3$ és $F_4$, továbbá $F_1O\cap F_4O'=$ $=K_1$ és $F_2O\cap F_3O'=K_2$.




Vegyük észre, hogy az $O$ és $O'$ pontok nem eshetnek egybe, mert például $D$ belső pontja az $ABC$ háromszög köréírt körének, így $OD<OA$, míg $O'D=O'A$.

Ezért az $OO'$ szakasz nem fajulhat egy ponttá. Mivel $EAD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ hegyesszög, az $ABC$ és az $ADE$ háromszög magasságpontja sem lehet az $A$ pont, tehát $H \neq A$ és $H' \neq A$.

Tekintsük most a $H'M_1HM_2$ és az $O'K_1OK_2$ négyszögeket, amelyeknek szemközti oldalaik mind merőlegesek $AB$-re, illetve $AC$-re, ezért mindkét négyszög paralelogramma. Az egyik paralelogramma megfelelő oldalai páronként párhuzamosak a másik paralelogramma megfelelő oldalaival, hiszen mind az oldalfelező merőlegesek, mind a magasságvonalak merőlegesek a megadott oldalra, továbbá a megfelelő csúcsoknál ($H' \leftrightarrow O'$, $H \leftrightarrow O$) ugyanakkora belső szögek vannak, hiszen mindkettőt két $A$-hoz közelebbi egyenes ($T_3H'$, $T_4H'$, illetve $F_3O'$ és $F_4O'$) határolja, amelyek párhuzamosak. Ebből következően a $H'M_1H$ és az $O'K_1O$ háromszögek azonos körüljárási irányúak, valamint két-két oldaluk páronként párhuzamos ($H'M_1 \parallel O'K_1$ és $HM_1 \parallel OK_1$), így ha $HH' \parallel OO'$, akkor a szóban forgó háromszögek hasonlók, tehát megfelelő oldalaik hosszának aránya megegyezik:

$$\frac{H'M_1}{HM_1} = \frac{O'K_1}{OK_1}.$$

Ez tehát szükséges feltétele annak, hogy $HH' \parallel OO'$. Ez a feltétel azonban elégséges is, mert ha teljesül, akkor a $H'M_1H$ és $O'K_1O$ háromszögek hasonlók, azaz a harmadik oldalpár is párhuzamos. Kimondhatjuk tehát, hogy $HH' \parallel OO'$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\frac{H'M_1}{HM_1} = \frac{O'K_1}{OK_1}. \tag{1}$$

Most vizsgáljuk meg a $H'M_1HM_2$ paralelogramma oldalainak arányát. Ismert, hogy egy paralelogramma területét kiszámíthatjuk egy oldal hosszának és az oldalhoz tartozó magasság hosszának szorzataként:

$$T_{H'M_1HM_2} = HM_1 \cdot T_1T_3 = H'M_1 \cdot T_2T_4,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{HM_1}{H'M_1} = \frac{T_2T_4}{T_1T_3},$$

ahol a nevezők értéke nem 0, hiszen a feladat feltételei szerint $E$ az $AC$ szakasz belső pontja, ezért $EH'$ nem eshet egybe $CM_1$-gyel. Mivel $ABT_2\sphericalangle$ és $ACT_1\sphericalangle$, merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlő nagyságúak, így egy megfelelő egybevágósági transzformációval fedésbe hozhatók egymással. Ekkor alkalmazhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a következőképpen:

$$\frac{T_2T_4}{T_1T_3} = \frac{BD}{CE},$$

ami a fentiek értelmében azt jelenti, hogy

$$\frac{HM_1}{H'M_1} = \frac{T_2T_4}{T_1T_3} = \frac{BD}{CE}, \quad \text{tehát} \quad \frac{BD}{CE} = \frac{HM_1}{H'M_1}.$$

Az $O'K_1OK_2$ paralelogramma esetében az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\frac{OK_1}{O'K_1}=\frac{F_2F_4}{F_1F_3}.$$

Számoljuk ki az $F_2F_4$ és $F_1F_3$ szakaszok hosszát. Mivel $F_2$ az $AC$ szakasz felezőpontja, ezért $AF_2=\frac{AC}{2}$, az $F_4$ pedig az $AE$ szakasz felezőpontja, így

$$AF_4=\frac{AE}{2}=\frac{AC-CE}{2}=AF_2-\frac{CE}{2},$$

amiből

$$F_2F_4=\frac{CE}{2}$$

következik. Hasonlóképpen $F_1F_3=\frac{BD}{2}$, így

$$\frac{OK_1}{O'K_1}=\frac{F_2F_4}{F_1F_3}=\frac{\frac{CE}{2}}{\frac{BD}{2}}=\frac{CE}{BD}.$$

Beláttuk tehát, hogy $\frac{HM_1}{H'M_1}=\frac{BD}{CE}$ és $\frac{OK_1}{O'K_1}=\frac{CE}{BD}$, amit (1)-gyel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{BD}{CE}=\frac{CE}{BD},$$

s mivel szakaszok hosszai pozitív számok, ebből

$$BD=CE$$

következik. Ez tehát szükséges feltétel, már csak azt kell megmutatnunk, hogy elégséges is. Mivel az előbbiekben csupa egyenlőséggel dolgoztunk, ezek megfordítva is igazak, így a bizonyítás végére értünk.

*Koleszár Domonkos* (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 11. évf.),
*Kökényesi Márk Péter* (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.),
*Varga Boldizsár* (Verőce, Géza Fejedelem Református Ált. Isk., 8. évf.)

Összesen 33 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott: Bán-Szabó Áron, Baski Bence, Bencsik Ádám, Bencsik Dávid, Bognár András Károly, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Fekete Richárd, Hegedűs Dániel, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Koleszár Domonkos, Kovács Tamás, Kökényesi Márk Péter, Mohay Lili Veronika, Molnár-Szabó Vilmos, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Páhán Anita Dalma, Romaniuc Albert-Iulian, Seres-Szabó Márton, Simon László Bence, Somogyi Dalma, Terjék András József, Varga Boldizsár, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 5 pontos 3, 4 pontos 3 dolgozat.

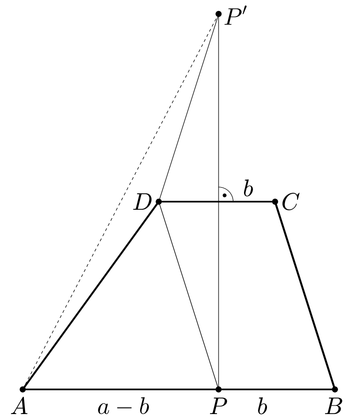
**B. 5188.** *Igazoljuk, hogy az érintőtrapéz magassága nem lehet nagyobb alapjai mértani közepénél.*

(*5 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

**I. megoldás.** Legyen az $ABCD$ érintőtrapéz két alapjának hossza $AB=a$ és $CD=b$, amelyekre teljesül, hogy $a\geqslant b$. (Mivel az $(A,B)\leftrightarrow(C,D)$ pontpárok cseréjével az állítás önmagába megy át, ezt mindig megtehetjük.) Húzzunk párhuzamost a $D$ ponton át a $BC$ szárral, messe ez az $AB$ alapot a $P$ pontban, ekkor $a\geqslant b$ miatt $P$ az $AB$ szakasz pontja (beleértve azt az esetet is, amikor $P=A$).

Mivel a $BCDP$ négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, ezért paralelogramma. A paralelogramma szemközti oldalainak hossza egyenlő, ezért $BP=CD=b$, amiből $AP=a-b$, továbbá $DP=BC$, amiből az érintőnégyszög tulajdonságait felhasználva $a+b=AB+CD=$ $=BC+AD=AD+DP$.

Tükrözzük a $P$ pontot a $CD$ alap egyenesére, legyen a tükörképe a $P'$ pont (*1. ábra*). A tükrözés miatt egyrészt nyilvánvaló, hogy $PP'=2m$, így az érintőtrapéz $m$ magassága: $m=\frac{PP'}{2}$, másrészt $DP=DP'$. Ekkor az $ADP'$ háromszögre (amely lehet elfajuló is) alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget, így



*1. ábra*

$$AP'\leqslant AD+DP'=AD+DP=a+b.$$

Szintén a tükrözés következménye, hogy $PP'\perp CD\parallel AB$, tehát $PP'\perp AB$, ezért abban az esetben, amikor a $P$ pont nem esik egybe $A$-val, az $APP'$ háromszög derékszögű. A Pitagorasz-tétel alapján felírhatjuk, hogy

$$(PP')^2=(AP')^2-AP^2=(AP')^2-(a-b)^2\leqslant(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$$

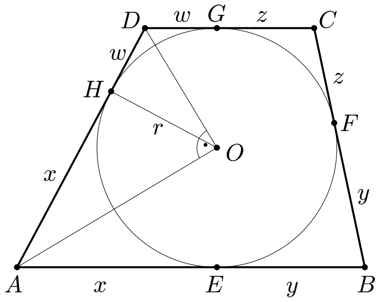
amelyből rendezéssel kapjuk a feladat állítását:

$$2m=PP'\leqslant 2\sqrt{ab}\,.$$

Ha $P=A$, akkor $a=b=m$ miatt szintén igaz az állítás.

Mivel a bizonyítás során csak egyetlenegy egyenlőtlenség volt, ezért egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, azaz $A$, $D$ és $P'$ kollineárisak. Rövid szögszámítással könnyen belátható, hogy ez pontosan $AD=PD$ esetben teljesül. Ebből az következik, hogy $AD=PD=BC$, ezért az $ABCD$ érintőtrapéz egyúttal húrtrapéz is, ami az egyenlőség szükséges és elégséges feltétele.

*Varga Boldizsár* (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján



*2. ábra*

**II. megoldás.** Legyenek a trapéz csúcsai $A$, $B$, $C$ és $D$ ebben a sorrendben úgy, hogy $AB$ és $CD$ a trapéz alapjai. Legyen a beírt kör érintési pontja az $AB$, $BC$, $CD$ és $DA$ oldalakon rendre $E$, $F$, $G$ és $H$, továbbá a beírt kör középpontja $O$, sugara $r$ (*2. ábra*). Mivel a körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért

$$AH = AE =: x, \quad BE = BF =: y,$$

$$CF = CG =: z \text{ és } DG = DH =: w,$$

$x, y, z, w > 0$.

Mivel a beírt kör középpontja illeszkedik a szomszédos oldalak szögfelezőjére, $AO$ és $DO$ felezik a trapéz $A$-nál, illetve $D$-nél lévő belső szögét, tehát

$$OAD\sphericalangle + ADO\sphericalangle = \frac{BAD\sphericalangle}{2} + \frac{ADC\sphericalangle}{2} = \frac{BAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ,$$

hiszen a trapéz egy szárán fekvő belső szögei egymást $180^\circ$-ra egészítik ki. Ismert, hogy a háromszög belső szögeinek összege $180^\circ$, ekkor az $AOD\triangle$ harmadik szöge $AOD\sphericalangle = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$-os, tehát az $AOD\triangle$ derékszögű. Mivel a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, $OH \perp AD$, vagyis az $OH(=r)$ szakasz az $AOD\triangle$ átfogóhoz tartozó magassága. Ekkor a magasságtétel alapján $\sqrt{xw} = r \ \Rightarrow \ xw = r^2$. Teljesen hasonlóan a másik száron az $yz = r^2$ teljesül, így a trapéz alapjainak szorzata:

$$(x+y)(z+w) = xz + xw + yz + yw = xz + yw + 2r^2.$$

Az előzőek alapján $xw = r^2$, így

$$xz = \frac{xw}{w} \cdot z = \frac{r^2}{w} \cdot z = r^2 \frac{z}{w},$$

és $yz = r^2$ miatt $yw = \frac{yz}{z} \cdot w = r^2 \frac{w}{z}$, amiből

$$xz + yw = r^2 \left( \frac{z}{w} + \frac{w}{z} \right).$$

Közismert, hogy bármely pozitív számhoz a reciprokát hozzáadva legalább 2-t kapunk, ezért a távolságok pozitivitása miatt: $\frac{z}{w} + \frac{w}{z} \geqslant 2$. Mivel $r^2$ pozitív, ekkor

$$xz + yw = r^2 \left( \frac{z}{w} + \frac{w}{z} \right) \geqslant 2r^2,$$

vagyis az alapok szorzata

$$(x+y)(z+w) = xz + yw + 2r^2 \geqslant 2r^2 + 2r^2 = 4r^2 = (2r)^2.$$

Tudjuk, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért $OE$ és $OG$ merőleges a trapéz alapjaira, így az alapok párhuzamossága miatt az $O, E, G$ pontok egy egyenesre esnek, és ez az egyenes merőleges az alapokra. Ebből következően a trapéz magassága $EG = OE + OG = 2r =: m$, vagyis $m^2 = (2r)^2$, így az alapok szorzata nem kisebb a magasság négyzeténél:

$$(x+y)(z+w) \geqslant (2r)^2 = m^2.$$

Pozitív mennyiségekről lévén szó, az egyenlőtlenség mindkét oldalából négyzetgyököt vonhatunk:

$$\sqrt{(x+y)(z+w)} \geqslant m,$$

ami azt jelenti, hogy az alapok mértani közepe nem kisebb a trapéz magasságánál. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Tudjuk, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha ez a szám az 1, vagyis jelen esetben akkor, ha $\frac{z}{w} = 1 \Rightarrow z = w$. Ez pedig pontosan a húrtrapézokban teljesül (ha az érintési pont felezi az alapot, akkor a trapéz szimmetrikus, ha pedig a trapéz szimmetrikus, akkor az érintési pont felezi az alapot).

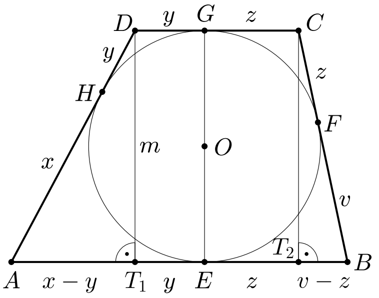
*Duchon Márton* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

**III. megoldás.** Készítsük el a *3. ábrát.* Az ábrán az egy pontból húzott ugyanolyan hosszú érintőket $x$, $y$, $z$, $v$-vel jelöltem, illetve $C$ és $D$ merőleges vetületei $AB$-re $T_2$ és $T_1$, így $DG = T_1E = y$ és $GC = ET_2 = z$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a $DAT_1$ háromszögre (az érintőtrapéz magasságát $m$-mel jelölöm):

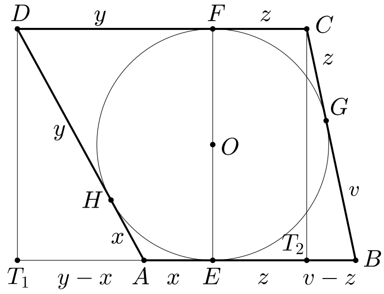
$$(x+y)^2 = m^2 + (x-y)^2,$$
$$m^2 = 4xy.$$

A $BCT_2$ háromszög is derékszögű, így az előzőekhez hasonlóan:

$$(v+z)^2 = m^2 + (v-z)^2,$$
$$m^2 = 4vz.$$




*3. ábra*




*4. ábra*

A két egyenletet összeszorozva:

$$m^4 = 16xyzv,$$

majd négyzetgyököt vonva (megtehetjük, mert mindkét oldal pozitív):

$$m^2 = 4\sqrt{xyzv}\,.$$

Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti közismert összefüggést ($x$ és $v$, illetve $y$ és $z$ közepeire):

$$m^2 = 4\sqrt{xv}\sqrt{yz} \leqslant 4 \cdot \frac{x+v}{2} \cdot \frac{y+z}{2} = (x+v)(y+z),$$

majd helyettesítsük be a trapéz ($a = x+v$ és $c = y+z$) alapjait és vonjunk ismét négyzetgyököt. Így éppen az

$$m \leqslant \sqrt{(x+v)(y+z)} = \sqrt{ac}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, azaz a feladat állítását beláttuk.

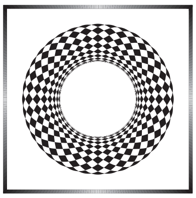
*Diszkusszió:* Az $x = y$ esetben létrejövő elfajult derékszögű háromszögre is igaz az állítás, az $x < y$ esetet a *4. ábrán* láthatjuk.

Ilyenkor a Pitagorasz-tételt alkalmazva az $(x+y)^2 = m^2 + (y-x)^2$ egyenletet kapjuk. Mivel $(x-y)^2 = (y-x)^2$, így ez sem befolyásolja a megoldást, és ugyanígy nincs baj, ha $y$ és $z$ arányait változtatjuk.

Egyenlőség a közepek miatt $x = v$ és $y = z$ esetén áll fenn, vagyis ha a trapéz nemcsak érintő-, hanem húrtrapéz is.

*Jánosik Máté* (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 79 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 9, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.



## Nehezebb feladat megoldása*

**A. 812.** *Két játékos a következő játékot játssza: van két kupac, melyekből felváltva kell kavicsokat elvenniük, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ha a kupacok mérete egy adott pillanatban $A$ és $B$, akkor a soron következő játékos valamelyik kupacból elveheti $A$ egy többszörösét vagy $B$ egy többszörösét.*

---

* Szeptembertől ismét minden A-jelű feladat megoldása megtalálható honlapunkon, ez az egyik közülük.