Megjegyzés. Természetesen nem szükséges végigszámolni az összes esetet, ha az első dobás 5-öt, vagy 6-ot eredményezett, akkor a második dobás értékétől függetlenül D pozitív lesz, ezek tehát az esemény szempontjából rossz esetnek számítanak. (Ha $b=1$, akkor az összes c jó eset.)

Németh László
Fonyód

C gyakorlat megoldása

C. 1703. *Az a és b 10-es számrendszerbeli természetes számok, mindegyik számjegyük 1-es. Mutassuk meg, hogy ha a és b nem relatív prímek, akkor számjegyeik $S(a)$ és $S(b)$ összege sem az.*

Megoldás. Az a és a b szám egyike sem lehet 1, mert az 1 bármelyik egész számmal relatív prím, ezért $a>1$ és $b>1$.

1. eset Ha $a=b$, akkor $S(a)=S(b)>1$, így a feladat állítása igaz.

2. eset Ha $a\neq b$, akkor az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a>b$, ekkor $S(a)>S(b)$. Mindkét szám utolsó számjegye 1, ezért sem 2-vel, sem 5-tel nem oszthatóak és mivel nem relatív prímek, így van közös prímosztójuk. Legyen ez a közös prímtényező p, ekkor $p\neq 2$ és $p\neq 5$. Innentől „elfogyasztjuk” a számjegyeket a következő módszerrel. Kivonjuk a-ból b-t, így $p\mid a$ és $p\mid b$ miatt nyilván $p\mid (a-b)$ is teljesül. Ekkor $(a-b)$ egy olyan pozitív szám, amely $(S(a)-S(b))$ darab 1-essel kezdődik, közvetlenül utánuk pedig $S(b)$ darab nulla van. A nulláktól természetesen könnyedén „megszabadulhatunk”, ha elosztjuk $10^{S(b)}$-nel, és mivel a tízhatványok csak 2-vel és 5-tel oszthatóak, ezért hányadosként (nevezzük c-nek) egy olyan csupa 1-es számjegyet tartalmazó számot kapunk, amelyre $p\mid c$, ezért $c>1$, valamint $S(c)=S(a)-S(b)$ és $c<a$ is igaz.

Ekkor előfordulhat, hogy $b=c$, ekkor nyilván $S(c)\mid S(b)$, ezért

$$S(c)\mid S(c)+S(b)=S(a).$$

Találtunk egy közös osztót, $S(c)$-t, ami ($c>1$ miatt) 1-nél nagyobb, így beláttuk, hogy $S(a)$ és $S(b)$ nem relatív prímek.

Ha $b\neq c$, akkor a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket és megismételjük az előbb ismertetett eljárást. Véges sok lépésben biztosan eljutunk odáig, hogy két egyenlő számot kapunk, amelyek nagyobbak 1-nél, mindegyik számjegyük 1, így számjegyeik összege is nagyobb 1-nél és osztója $S(a)$-nak és $S(b)$-nek, azaz utóbbiak nem relatív prímek. Ezzel a gondolatmenet végére értünk, a feladat állítását beláttuk.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn. és Koll., 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 25 dolgozat érkezett. 5 pontos 10, 4 pontos 3, 3 pontos 5 dolgozat. 1 pontot 3, 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

A javító megjegyzései. 1. A versenyzők egy része összekeverte az oszthatóság fogalmát azzal, hogy két szám relatív prím. Abból, hogy $(a;b)>1$ nem következik, hogy $a\mid b$ vagy $b\mid a$.

2. A másik komoly probléma a túlzott általánosítás volt, például a közös osztó létezésének megmutatása helyett sokan azonnal közös osztót mutattak, amelyre legtöbbször létezik triviális ellenpélda.

3. Végül, súlyos elvi hibaként előfordult, hogy csak néhány konkrét p prímre bizonyította a versenyző az állítást, de általánosan nem.

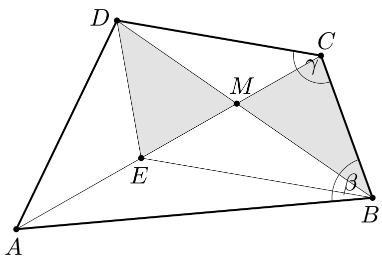
Matematika feladatok megoldása

B. 5139. *Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az ADM háromszög területe nagyobb a BCM háromszög területénél. A négyszög BC oldalának felezőpontja P, AD oldalának felezőpontja pedig Q, $AP+AQ=\sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint* 1.

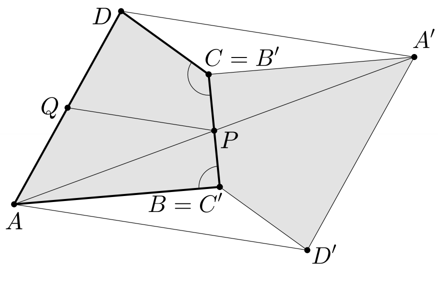
(*5 pont*)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszögben $\beta+\gamma>180^\circ$ (*1. ábra*).

A feltétel szerint $T(ADM)>T(BCM)$, ezért az AM szakasz belsejében létezik olyan E pont, amelyre $T(EMD)=T(BCM)$. Ismert továbbá, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha az $EBCD$ négyszög trapéz, úgy hogy EB és CD a trapéz alapjai. Ekkor $EBC\sphericalangle+\gamma=180^\circ$, azonban az E pont az AM szakasz belső pontja, azaz $EBC\sphericalangle<\beta$, így $\beta+\gamma>180^\circ$.



1. ábra



2. ábra

Tükrözzük a négyszöget a BC oldal P felezőpontjára és használjuk a *2. ábra* jelöléseit.

A tükrözésnél $ABD'A'CD$ egészen biztosan konkáv hatszöget alkot, mert B-nél és C-nél létrejött szögei a fentiek alapján nagyobbak 180°-nál. Látjuk tehát, hogy az $AD'A'D$ paralelogramma területe nagyobb a hatszög területénél.

$$AD+AA'=2\sqrt{2}=\sqrt{8},\quad \text{ezért ha}\quad AD=x,\ \text{akkor}\ AA'=\sqrt{8}-x.$$