hasonlítani. Nem véletlenül akarták sokáig makacsul azt igazolni, hogy minden additív $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ reguláris. Ez a törekvés csak akkor bizonyult sikeresnek, ha valamilyen többletfeltételt szabtak a keresett függvényre. A teljesség igénye nélkül megemlítjük, hogy az (1) egyenletet elsőként a névadó Cauchy tanulmányozta és oldotta meg a folytonosság feltételezése mellett [2]. Darboux vette észre, hogy a nemnegativitási feltétel szintén reguláris megoldásokra vezet [3].

A probléma végső megoldása sokáig váratott magára. A fordulatokban gazdag történeti és matematikai részletekkel kapcsolatban ajánljuk Aczél könyvét [1]. Most csupán arra utalunk, hogy végül Hilbert tanítványa, Hamel oldotta meg a Cauchy-egyenletet miden egyéb segédfeltétel nélkül. Mindenki legnagyobb meglepetésére eredményéből kiderült, hogy a megoldások között *léteznek* nem reguláris megoldások. Egy ilyen megoldás birtokában lehetőségünk nyílna a téglalap területének másfajta mérésére is. Kérdés persze, hogy mire megyünk egy olyan területmértékkel, amely lehet negatív, és ráadásul egy mindenütt sűrű függvénygráffal áll kapcsolatban ...

Hivatkozások

[1] Aczél J.: *Lectures on functional equations and their applications,* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19, Academic Press (New York–London, 1966).

[2] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnic, Analyse algébrique,* V., Oeuvres (2)3 (Paris, 1897).

[3] Darboux, G.: *Sur le théorème fundamental de la géométrie projective,* Math. Ann., **17** (1880), 55–61.

[4] Hamel, G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetige Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y)=f(x)+f(y)$, Math. Ann., **60** (1905), 459–462.

[5] Legendre, A. M.: *Eléments de géométrie,* Note II. (Paris, 1791).

Bessenyei Mihály és **Maksa Gyula**
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet
H-4010 Debrecen, Pf. 12
besse@science.unideb.hu
b9wgla@unideb.hu

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $a^2-5a+4\leqslant 0,$ (*3 pont*)

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1}-25^x)\leqslant -2.$ (*8 pont*)

2. A bolthálózat raktárában 14 500 doboz üdítőt tárolnak. A rövid szavatossági idő miatt a tulajdonos szeretné a teljes készletet 29 napon belül eladni. Az első napon 150 darabot sikerült értékesíteni.

a) Legalább mennyivel kell naponta növelni az eladott üdítők számát, hogy a terv sikerüljön? (*3 pont*)

A bolthálózat növekedése miatt szükségessé vált egy új raktárépület megvásárlása, amelyet a tulajdonos hitel felvételével kíván megvalósítani. A banktól kapott 30 millió forint kölcsönt 5 éven át 5 egyenlő részletben kell visszafizetnie. A 2021. januárjában felvett kölcsönre a bank minden év végén 3,5%-os kamatot számít fel. A törlesztést a tulajdonos a következő év januárjában kezdi meg.

b) Mekkorák az egyes törlesztőrészletek ezer forintra kerekítve? (*5 pont*)

A bolt gazdasági vezetője azt tanácsolta, hogy évente maximum 4 millió forintot költsön a tulajdonos az új raktárépületre felvett kölcsön törlesztésére, az előzővel megegyező banki kamat mellett.

c) Hány év alatt tudja így a tulajdonos visszafizetni a kölcsönt? (*5 pont*)

3. Legyen az U alaphalmaz az első n pozitív egész szám, amelynek három részhalmaza:

A : 6-tal osztható számok,

B : 15 többszörösei,

C : olyan egészek, amelyeknek osztója a 20.

a) Mennyi lehet n legkisebb és legnagyobb értéke, ha az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszáma 3? (*3 pont*)

b) Hány olyan szám található 1 és 200 között, amelyek A, B és C halmazok közül pontosan kettőnek elemei? (*5 pont*)

c) Határozzuk meg a következő állítások logikai értékét. Válaszainkat minden esetben indokoljuk.

(*i*) A $B \setminus (A \cup C)$ halmaz elemeinek utolsó számjegye 5 vagy 6.

(*ii*) $B \setminus (A \cup C) = B \setminus A$.

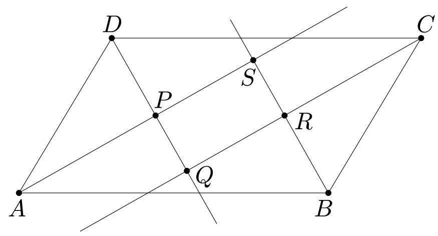
(*iii*) A $C \setminus (A \cup B)$ halmaz elemeinek szorzata 10 darab 0-ra végződik $n = 200$ esetén. (*6 pont*)

4. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek AB oldala 16 cm-rel hosszabb, mint az AD oldala, valamint hegyesszöge $DAB\sphericalangle = \alpha$.

a) Igazoljuk, hogy a paralelogramma szögfelezői által meghatározott $PQRS$ négyszög téglalap. (*3 pont*)

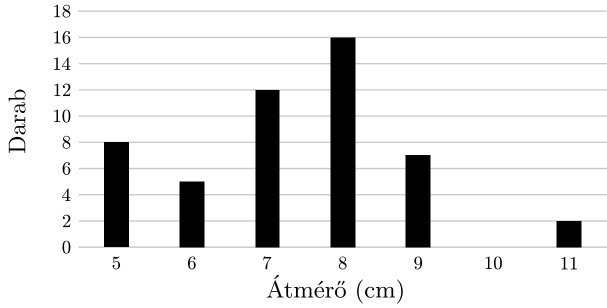
b) Igazoljuk, hogy a $PQRS$ téglalap területe cm^2-ben mérve $T = 128 \cdot \sin\alpha$. (*7 pont*)

c) Mekkora a $PQRS$ téglalap átlójának hossza? (*3 pont*)



II. rész

5. Almaszüret után véletlenszerűen kiválasztottak 50 darab almát, megmérték az átmérőjüket, ezt mutatja az alábbi *oszlopdiagram.*



a) Mennyi az almák átmérőjének átlaga és szórása? (*4 pont*)

A következő évben újfajta tápoldatot is használtak az almafák öntözésére. Az újabb almaszüret után újra választottak 50 darabot, amelyeknek megmérték az átmérőjét. Az előző évi mintával összehasonlítva azt tapasztalták, hogy a 8 cm-nél kisebb gyümölcsök átmérője 24%-kal nőtt, ha méretüket egész cm-re kerekítjük.

b) Mekkora lesz az új minta mediánja, illetve a minta mediántól való átlagos abszolút eltérése? (*5 pont*)

A szüreten szedett gyümölcsből almalevet préselnek. A leszedett almát meghámozzák, kiszedik a magját, ezáltal 12%-ot veszít a tömegéből. A préseléskor 8 kg pucolt almából átlagosan 5 liter levet készítenek.

c) Hány kg almát szedtek a szüret alkalmával, ha abból összesen 3 000 liter almalé készült? (*3 pont*)

Az almát 200 Ft/kg egységáron tudja eladni a gazda. Az almalé árát úgy szeretné meghatározni, hogy azzal 20%-kal több bevétele legyen.

d) Mennyibe kerüljön 1 liter almalé? (A választ egész forintra kerekítve adjuk meg.) (*4 pont*)

6. A színház szervezési osztályán 196 bérletet adtak el az aktuális évadra. A bérletes előadások előtt – a bérlettulajdonosok elfoglaltsága miatt – átlagosan 5% bérletlemondás történik. A színház pénztárában az ilyen esetekre úgynevezett lépcsőjegyeket adnak el, amelyek nem helyre szólnak, hanem a bérletlemondás miatt megüresedett helyeket tölthetik fel a nézők. A 12. évfolyam tanulói 7 db lépcsőjegyet vásároltak.

Simon azt mondja: „Mind a 7 diáknak jut ülőhely a színházban."

a) Fogalmazzuk meg Simon állításának megfordítását. (*2 pont*)

Tamás azt mondja: „Legalább 65% a valószínűsége, hogy mindenkinek jut ülőhely a színházban."

b) Igazoljuk Tamás állítását. (*6 pont*)

A színházban a szék aljára barna, sárga és lila színű borítékokat ragasztottak $4:5:5$ arányban, amelyekben vásárlási kedvezményre jogosító kuponok találhatóak. A barna borítékok felében 10%-os, a többiben 15%-os kupon található. A sárga színűek harmadában 15%-os, a többiben 20%-os kupon van. A lila borítékokba egységesen 15%-os kupont tettek. Réka 15%-os kedvezményt talált a saját borítékjában.

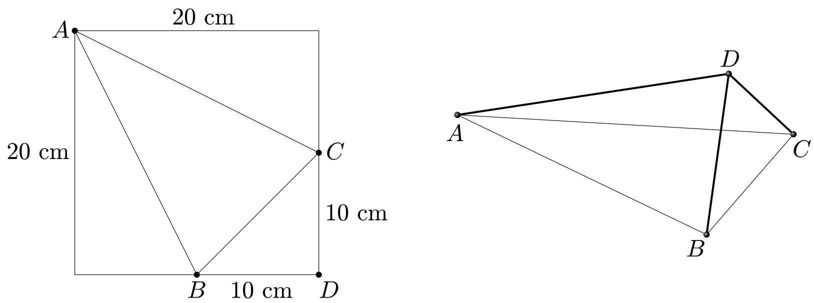
c) Mekkora a valószínűsége, hogy Réka sárga színű borítékot kapott? (*8 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\sin x = |x-1| + |x-3|. \qquad (7\ pont)$$

b) Mekkora az $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = |x-1| + |x-3|$ görbék és az y tengely által határolt korlátos síkidom területének pontos értéke? (*9 pont*)

8. A 20 cm oldalhosszúságú négyzet alakú fehér lapból a kezdő origami szakkörön tetraédert hajtogatnak a gyerekek úgy, hogy az *ábrán* jelölt AC, AB és BC szakaszok mentén hajtják meg a lapot.



a) Mekkora a tetraéder legnagyobb és legkisebb területű lapjának hajlásszöge a hajtogatás után? (*7 pont*)

b) Mekkora a tetraéder térfogata? (*3 pont*)

Az elkészített tetraédereket a gyerekek megerősítik az élek hosszára ragasztott színes szívószálak segítségével. Majd a legnagyobb területű lapjára állítva leteszik egy asztalra egyformán igazítva a testeket.

c) Hány különböző megerősített tetraéder készíthető piros, zöld, sárga és kék színű szívószállal, ha az egy csúcsban találkozó szívószálak nem lehetnek egyforma színűek? (*6 pont*)

9. A koordinátarendszerben megrajzoltuk a $p:\ y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ egyenletű parabolát.

a) Írjuk fel a parabola és az y-tengely metszéspontjában a parabolához húzott érintő egyenletét. (*6 pont*)

Fizika tanulmányok alapján ismert, hogy a parabolatükör a tengelyével párhuzamos fénysugarakat a fókuszponton keresztül veri vissza.

b) A parabola belsejében fénysugár érkezik az y-tengely mentén. Mi a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenlete? (*7 pont*)

Fizikában beesési merőlegesnek hívják a beesési pontban a parabola érintőjére állított merőlegest.

c) Mekkora az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög? (*3 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Megoldásvázlatok a 2022/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $2^{x+1}+3=2^{1-x}$ *egyenletet a valós számok halmazán.*

A $H=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ *alaphalmaz* A, B, C *részhalmazairól az alábbiakat ismerjük:*

$$B\subset A;\quad \overline{A\cup C}=\{0;8\};\quad A\cap C=\{3;4;7\};\quad \overline{C}=\{0;1;2;8;9\};\quad A\setminus B=\{2;7;9\}.$$

b) *Elemeinek felsorolásával adjuk meg az* A, B, C *halmazokat.* (*11 pont*)

Megoldás.

a) $$2\cdot 2^x+3=\frac{2}{2^x};\quad 2\cdot\left(2^x\right)^2+3\cdot 2^x-2=0;$$

$$\left(2^x\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4};\quad 2^x\neq -2;\quad 2^x=\frac{1}{2};\quad 2^x=2^{-1}\Rightarrow x=-1$$

(a 2^x függvény szigorúan monoton növő).

Ellenőrzés: $2^0+3=2^{1-(-1)}$; $1+3=2^2$; $4=4$. (Az ellenőrzés helyettesíthető az ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.)

b) Mivel $B\subset A$, vizsgáljuk először az A, C, H halmazok viszonyát. Ez a második, harmadik és negyedik információ alapján az első *ábráról* leolvasható.