



Mennyi a téglalap területe?

Kivonat

Cikkünkben megmutatjuk, hogy a téglalap területképlete levezethető néhány észszerű feltevésből. Megközelítésünkben a Cauchy-féle függvényegyenlet játszik kulcsszerepet, melynek matematikai és történeti vonatkozásaira szintén kitérünk röviden.

1. Bevezetés

A területfogalom kialakítása már az általános iskolában elkezdődik. Bevezetésként a téglalapot szokás vizsgálni, részben „egyszerűsége” miatt, részben, mert számos alakzat területképlete ebből származtatható. Így mindenki számára magától értetődő tény, hogy a téglalap területe a két merőleges oldal hosszának szorzata. Ám a kérdés valójában nem az, hogy *mennyi* a téglalap területe, hanem hogy *miért* pont ennyi. Az intuíció ugyanis még a területképlet megismerése előtt sugalmaz bizonyos evidenciákat. Elvárjuk, hogy a terület csak az oldalak hosszától függő nemnegatív érték legyen; elvárjuk, hogy ha egy téglalapot bármelyik párhuzamos oldalpárja mentén azonos mértékben és irányban meghosszabbítva újabb téglalappá egészítünk ki, akkor a két rész területének összege egyezzen meg az összterülettel; végezetül elvárjuk, hogy az egységnégyzet területe egységnyi legyen. Mindezeket szabatosan a következő megállapodásokban rögzíthetjük. (A továbbiakban \mathbb{R} a valós, \mathbb{R}_+ a nemnegatív valós, \mathbb{Q} a racionális, \mathbb{Q}_+ a nemnegatív racionális számok halmazát jelöli.)

1. megállapodás. A terület egy $T : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény.

2. megállapodás. Ha a, a_1, a_2 , valamint b, b_1, b_2 adott nemnegatív számok, akkor

$$T(a_1 + a_2, b) = T(a_1, b) + T(a_2, b) \quad \text{és} \quad T(a, b_1 + b_2) = T(a, b_1) + T(a, b_2).$$

3. megállapodás. $T(1, 1) = 1$.

Ezekre a továbbiakban rendre *nemnegativitási*, *additivitási* és *normáltsági feltételként* fogunk hivatkozni. Elsőként azt igazoljuk, hogy e három geometriai tartalmú megállapodás egy és csakis egy algebrai formulát eredményezhet: az általános iskolában megismert területképletet.

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

2. Ennyi a téglalap területe

Tegyük fel, hogy az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt az összeadásra, azaz bármely két elemével együtt azok összegét is tartalmazza. Azt mondjuk, hogy az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *additív*, ha minden $x, y \in A$ esetén teljesül rá az úgynevezett *Cauchy-féle függvényegyenlet*:

$$(1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Az egyenlet általános megoldásának leírása nem könnyű feladat. Nyilván az identitás számszorosa, vagyis egy $f(x) = cx$ alakú függvény mindig additív. Sőt, az $A = \mathbb{R}_+$ speciális választás és a nemnegativitási feltétel mellett valamennyi additív függvény csakis ilyen alakú lehet:

Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ additív függvény, akkor minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(x) = f(1)x$.*

Bizonyítás. Elsőként megmutatjuk, hogy f racionálisan homogén, azaz minden $r \in \mathbb{Q}_+$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(rx) = rf(x)$ teljesül. Az (1) egyenletben az $x = y$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy $f(2x) = 2f(x)$. Innen teljes indukcióval igazolható, hogy $f(nx) = nf(x)$ teljesül minden n pozitív egész esetén. Legyen most $r = m/n$ alakban adott, ahol m és n pozitív egészek. Az előbbi tulajdonságot kétszer felhasználva,

$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

Másodszor azt igazoljuk, hogy f monoton növekvő. Legyenek $x \leq y$ nemnegatív számok. Ekkor $y - x$ is nemnegatív, így az f additivitása és a nemnegativitása miatt

$$f(y) = f((y - x) + x) = f(y - x) + f(x) \geq f(x).$$

A harmadik és egyben utolsó lépésben megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén az $f(x)$ és az $f(1)x$ értékek eltérése akármilyen pozitív számmal kisebb. Ez ugyanis pontosan azt jelenti, hogy az eltérés nulla, azaz $f(x) = f(1)x$. Jelölje $[x]$ az x valós szám (alsó) egészrészét. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $[nx] \leq nx < [nx] + 1$, ezért

$$r_n := \frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} = r_n + \frac{1}{n}.$$

Azonban f racionálisan homogén és monoton növekvő, ezért ebből az egyenlőtlenség-láncból következik, hogy

$$r_n f(1) = f(r_n) \leq f(x) \leq f\left(r_n + \frac{1}{n}\right) = \left(r_n + \frac{1}{n}\right) f(1).$$

Ha még fölhasználjuk az $x - \frac{1}{n} \leq r_n \leq x$ egyenlőtlenséget, akkor itt $f(1) \geq 0$ miatt a bal oldal alsó, míg a jobb oldal felső becsléssel folytatható:

$$\left(x - \frac{1}{n}\right) f(1) \leq f(x) \leq \left(x + \frac{1}{n}\right) f(1).$$

Tehát

$$|f(x) - f(1)x| \leq \frac{f(1)}{n}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, és éppen ezt akartuk belátni. \square

Rögzített nemnegatív b szám mellett az $a \mapsto T(a, b)$ függvény nemnegatív és additív az első két megállapodás értelmében, így a fenti tétel miatt $T(1, b)a$ alakú. Hasonlóan, a $b \mapsto T(1, b)$ függvény szükségképpen $T(1, 1)b$ alakú. Vagyis megállapodásaink *egyértelműen meghatározzák* a téglalap területképletét:

$$T(a, b) = T(1, b)a = T(1, 1)ab = ab.$$

A területfogalom megalapozásának most bemutatott útja Legendre munkásságára eredeztethető [5]. Megállapodásai lényegében a mieinkhez hasonlóak, egyetlen apró eltéréssel: nincs feltételezve a terület nemnegativitása. Rövidesen látni fogjuk, hogy e feltétel hiányában az előző tétel érvényét veszti.

3. Kitekintés: a Cauchy-féle függvényegyenlet

Mint említettük, az identitás konstansszorozosa, vagyis egy cx alakú függvény additív a valós egyenesen. Az ilyen típusú megoldásokat *reguláris megoldásnak* nevezzük. Mit állíthatunk a nem reguláris additív valós függvényekről? A továbbiakban erre a kérdésre keresünk választ a koordinátageometria segítségével.

A Descartes-féle sík, azaz \mathbb{R}^2 rendezett számpárjait hol pontoknak, hol vektoroknak fogjuk tekinteni. Ez ugyanis sohasem okoz majd félreértést, viszont adott esetben biztosítja a választás kényelmét. A szokásos módon két ilyen vektor összege a komponensek összegéből képzett vektor, egy vektor számszorosa pedig az eredeti komponensek számszorosából álló vektor. Egy vektor *normája* alatt a Pitagorasztétel szerint számított euklideszi hosszát értjük:

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Az így bevezetett norma *pozitív definit, abszolút homogén és szubadditív*. Azaz, minden $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

- $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha \mathbf{v} a nullvektor;
- $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$;
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a norma segítségével a \mathbf{p} középpontú, $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt körlap a következő módon adható meg:

$$U(\mathbf{p}, \varepsilon) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{v} - \mathbf{p}\| < \varepsilon\}.$$

Az $U(\mathbf{p}, \varepsilon)$ körlemez szokás a \mathbf{p} pont ε sugarú környezeteként is említeni. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *gráfja* alatt az $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ halmazt értjük. Világos, hogy reguláris additív valós függvény gráfja egy origón áthaladó egyenes. Teljesen másként viselkednek a nem reguláris additív függvények:

Tétel. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nem reguláris additív függvény, akkor gráfja mindenütt sűrű a Descartes-féle síkon. Azaz, a sík minden pontjának minden környezete tartalmaz gráfpontot.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nem reguláris, azaz nem cx alakú. Ekkor léteznek olyan $x_1 \neq x_2$ valós számok, hogy az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontok két különböző origón átmenő egyenest határoznak meg. Másképpen fogalmazva, a

$$\mathbf{v}_1 = (x_1, f(x_1)) \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = (x_2, f(x_2))$$

vektorok egy nem elfajuló paralelogrammát feszítenek ki a Descartes-féle síkon. Legyen most a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ pont és az $\varepsilon > 0$ sugár tetszőlegesen adott. Azt kell megmutatnunk, hogy az $U(\mathbf{p}, \varepsilon)$ nyílt körlemez tartalmaz f gráfjáról valamilyen \mathbf{q} pontot. Mivel a \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 vektorok nem párhuzamosak, ezért a sík minden pontja előállítható a segítségükkel. Azaz, léteznek olyan α_1 és α_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{p} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2.$$

Válasszunk olyan r_1 és r_2 racionális számokat, amelyek elég közel vannak az α_1 és α_2 együtthatókhoz az alábbi értelemben:

$$|\alpha_1 - r_1| < \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|}; \quad |\alpha_2 - r_2| < \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Ilyen r_1 és r_2 racionális szám létezését az előző tétel bizonyításának harmadik lépésében használt módszer biztosítja. Tekintsük a $\mathbf{q} = r_1 \mathbf{v}_1 + r_2 \mathbf{v}_2$ pontot. A norma abszolút homogenitása és szubadditivitása, valamint r_1 és r_2 választása miatt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| &= \|(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) - (r_1 \mathbf{v}_1 + r_2 \mathbf{v}_2)\| = \|(\alpha_1 - r_1) \mathbf{v}_1 + (\alpha_2 - r_2) \mathbf{v}_2\| \\ &\leq \|(\alpha_1 - r_1) \mathbf{v}_1\| + \|(\alpha_2 - r_2) \mathbf{v}_2\| = |\alpha_1 - r_1| \cdot \|\mathbf{v}_1\| + |\alpha_2 - r_2| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|} \cdot \|\mathbf{v}_1\| + \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|} \cdot \|\mathbf{v}_2\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy $\mathbf{q} \in U(\mathbf{p}, \varepsilon)$. Másrészt, az előző tétel bizonyításában látottak alapján megmutatható, hogy f racionálisan homogén. Ezt és f additivitását szem előtt tartva,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = r_1 \mathbf{v}_1 + r_2 \mathbf{v}_2 &= (r_1 x_1 + r_2 x_2, r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)) \\ &= (r_1 x_1 + r_2 x_2, f(r_1 x_1) + f(r_2 x_2)) \\ &= (r_1 x_1 + r_2 x_2, f(r_1 x_1 + r_2 x_2)). \end{aligned}$$

Ha tehát $x = r_1 x_1 + r_2 x_2$, akkor $\mathbf{q} = (x, f(x))$ alakú. Vagyis \mathbf{q} egy megfelelő gráfpont az $U(\mathbf{p}, \varepsilon)$ nyílt körlemezben. \square

Továbbra is kérdés persze, hogy egyáltalán létezik-e nem reguláris additív valós függvény. Gondoljunk csak el, mi a szemléletes tartalma ennek a tételnek: egy mindenütt sűrű függvénygráfot az egész síkot kitöltő szürke ködhöz lehet leginkább

hasonlítani. Nem véletlenül akarták sokáig makacsul azt igazolni, hogy minden additív $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reguláris. Ez a törekvés csak akkor bizonyult sikeresnek, ha valamilyen többletfeltételt szabtak a keresett függvényre. A teljesség igénye nélkül megemlíjtjük, hogy az (1) egyenletet elsőként a névadó Cauchy tanulmányozta és oldotta meg a folytonosság feltételezése mellett [2]. Darboux vette észre, hogy a nemnegativitási feltétel szintén reguláris megoldásokra vezet [3].

A probléma végső megoldása sokáig váratott magára. A fordulatokban gazdag történeti és matematikai részletekkel kapcsolatban ajánljuk Aczél könyvét [1]. Most csupán arra utalunk, hogy végül Hilbert tanítványa, Hamel oldotta meg a Cauchy-egyenletet minden egyéb segédfeltétel nélkül. Mindenki legnagyobb meglepetésére eredményéből kiderült, hogy a megoldások között *léteznek* nem reguláris megoldások. Egy ilyen megoldás birtokában lehetőségünk nyílna a téglalap területének másfajta mérésére is. Kérdés persze, hogy mire megyünk egy olyan területmértékkel, amely lehet negatív, és ráadásul egy mindenütt sűrű függvénygráffal áll kapcsolatban ...

Hivatkozások

- [1] Aczél J.: *Lectures on functional equations and their applications*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19, Academic Press (New York–London, 1966).
- [2] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnic, Analyse algébrique*, V., Oeuvres (2)3 (Paris, 1897).
- [3] Darboux, G.: *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*, Math. Ann., **17** (1880), 55–61.
- [4] Hamel, G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetige Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Math. Ann., **60** (1905), 459–462.
- [5] Legendre, A. M.: *Eléments de géométrie*, Note II. (Paris, 1791).

Bessenyei Mihály és Maksa Gyula

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

H-4010 Debrecen, Pf. 12

besse@science.unideb.hu

b9wgl@unideb.hu



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $a^2 - 5a + 4 \leq 0$, (3 pont)

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leq -2$. (8 pont)