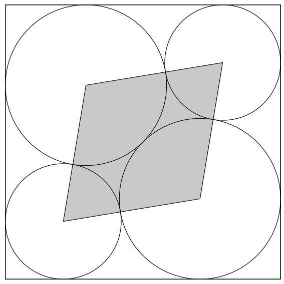
Feladatok mindenkinek

C. 1709. Az a és b egész számok osztói a 720-nak, ab pedig nem osztója 720-nak. Hány ilyen rendezett $(a;b)$ számpár van?

Javasolta: *Róka Sándor* Nyíregyháza)

C. 1710. Egy egységnyi oldalú négyzetbe négy kört rajzolunk az *ábrán* látható módon. A két nagyobbik kör egyforma méretű és érintik egymást és a négyzet oldalait is. A két kisebbik egybevágó, ezek szintén érintik a négyzet oldalait és a nagy köröket is. Mekkora a körök középpontjai által meghatározott rombusz területe?



C. 1711. Oldjuk meg az

$$\sqrt{x-1801}+\sqrt{y-1860}=2-\frac{1}{\sqrt{x-1801}}$$

egyenletet, ha x és y valós számok.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1712. Mekkorák lehetnek annak az ötszögnek az ismeretlen szögei, melynek minden oldala egyforma hosszúságú és van két derékszöge?

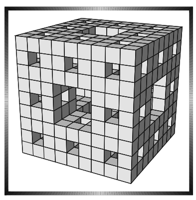
Javasolta: *Károlyi Gergely* (Budajenő)

C. 1713. Az x és a olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy $x+\frac{1}{x}=a$. Határozzuk meg a függvényében az $x^{13}+\frac{1}{x^{13}}$ értékét.

Beküldési határidő: 2022. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5230–5237.)



B. 5230. Az AB átmérőjű félköríven kijelöltük a C és D pontokat. Az A és B pontból a CD egyenesre állított merőlegesek talppontját jelölje A', illetve B'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'C$ és $B'D$ szakaszok hossza egyenlő.

(*3 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5231. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1).$$

(*4 pont*)

B. 5232. Az ABC hegyesszögű háromszög belsejében, a C-ből induló súlyvonalon vegyük fel a P pontot úgy, hogy $APB\sphericalangle = 180^\circ - ACB\sphericalangle$ teljesüljön. Igazoljuk, hogy az AB egyenes érinti az APC kört.

(*4 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5233. Egy szabályos hatszög csúcsaira véletlenszerű sorrendben felírjuk az $1, 2, \ldots, 6$ számokat. Ezután a hatszög minden oldalára ráírjuk a két végpontján szereplő számok különbségének abszolútértékét. Határozzuk meg az oldalakra írt hat szám összegének várható értékét.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5234. Az n pozitív egész számot nevezzük *mitikusnak,* ha minden osztója 2-vel kisebb egy prímszámnál. Például a 15 mitikus szám. Legfeljebb hány osztója lehet egy mitikus számnak? Adjuk meg az összes olyan mitikus számot, amelynek maximális számú osztója van.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5235. Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozatban minden 3-nál nagyobb prímszám $4k + 1$ alakú.

(*5 pont*)

B. 5236. Legyen a, b, c három pozitív valós szám úgy, hogy $abc = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 + c + c^2 + c^3 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest) és *Michael Rozenberg* (Izrael)

B. 5237. Egy háromszögben r a beírt kör sugarát, R a köré írt kör sugarát, s pedig a háromszög félkerületét jelöli. Mutassuk meg, hogy ha $r + 2R = s$, akkor a háromszög derékszögű.

(*6 pont*) Javasolta: *Fridrik Richárd* Szeged)

❄

Beküldési határidő: 2022. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄