Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a $2^{x+1}+3=2^{1-x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

A $H=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ alaphalmaz A, B, C részhalmazairól az alábbiakat ismerjük:

$$B\subset A;\quad \overline{A\cup C}=\{0;8\};\quad A\cap C=\{3;4;7\};\quad \overline{C}=\{0;1;2;8;9\};\quad A\setminus B=\{2;7;9\}.$$

b) Elemeinek felsorolásával adjuk meg az A, B, C halmazokat. (*11 pont*)

2. Egy 10 cm oldalú négyzet minden oldalára kifelé egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk, melyeknek szárai 13 cm-esek, így egy csillagszerű alakzatot kaptunk.

a) Mekkora a csillag területe?

Felhajtogatva az egyenlő szárú háromszögeket, egy négyzet alapú egyenes gúla keletkezett.

b) Mekkora a gúlába írható gömb sugara? (*13 pont*)

3. András és Balázs „zsíroznak”. A „zsírozás” a 32 lapos magyar kártya egyik egyszerű játéka, amelynek az a lényege, hogy a végén az „ütések” során megszerzett lapok „zsír” tartalma alapján dől el, ki nyerte a játékot.

A magyar kártyában négy „szín”: piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes található. „Zsírnak” számít az ász és a tízes, az nyer, akinek több a „zsírja”. (Ha mindketten $4-4$ „zsírt” szereztek, akkor az nyert, aki utoljára „ütött”; döntetlen nincs.)

Az első leosztásnál egyszerre négy-négy lapot kapnak a játékosok.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy András első leosztáskor kapott négy lapja között legalább egy „zsír”, és legalább egy hetes található?

Azért, hogy eldöntsék, ki kezdi a játékot, sorsolnak úgy, hogy a megkevert csomagból felváltva visszatevés nélkül leemelnek egy-egy lapot. Aki az első hetest húzza, az kapja először a négy lapot, és kezdi meg a játékot. (Ha pl. András húz először hetest, akkor Balázs kever, és oszt előbb Andrásnak négy lapot, majd saját magának négyet; András kezdi a játékot. Később ez a keverés, osztás- kezdés felváltva történik.)

András kezdte a sorsolást, és Balázsnak a második húzására sikerült hetest húznia.

b) Mennyi ennek a valószínűsége? (*13 pont*)

4. Vegyük az alábbi kijelentéseket:

A) Ha egy mértani sorozatnak van véges határértéke, akkor hányadosa egynél kisebb.

B) Ha $f(x) = x + 1$, és $g \circ f = x^2 + 2x + 1$, akkor $g(x) = x^2$.
($g \circ f = g\big(f(x)\big)$, a g függvény az f függvénynek közvetett függvénye.)

C) Ha két sorozat összege és szorzata konvergens, akkor a sorozatok külön-külön is konvergensek.

a) Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét (igaz, hamis). Állításainkat igazoljuk.

D) Ha egy n csúcsú egyszerű gráf minden csúcsa legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ fokú, akkor a gráf összefüggő. ($\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egész részét jelenti.)

b) Fogalmazzuk meg a D) állítás megfordítását, majd döntsük el, hogy ez igaz, vagy hamis. Megállapításunkat indokoljuk. (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Függvény-transzformációk felhasználásával ábrázoljuk az $f(x) = 4|x| - x^2$ függvényt a $[-5; 5]$ intervallumon.

A H halmaz elemeit az $f(x)$ függvény zérushelyei és lokális maximumhelyei alkotják. Ismétlés nélkül, véletlenszerűen kiválasztunk három elemet H-ból.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három elem összege osztható 9-cel?

Egy korlátos síkidomot a $g(x) = 4x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonja és az x tengely zár közre.

c) Számítsuk ki a síkidom területét. (*16 pont*)

6. Egy vitorlázórepülő pilóta teljesítményrepülést tervez a következőképpen: Szombathelyről indul, délkelet felé repül, majd Kaposvár környékén irányt vált É-ÉK felé. Mikor Székesfehérvár légterét elérte, nyugatra tart, így érkezik vissza a kiinduló repülőtérre. (É-ÉK az északi és északkeleti irány szögfelezőjébe mutató irány.)

Az $1:450\,000$-es méretarányú térképen a Kaposvár-Székesfehérvár távolság 22 cm. (Az $1:450\,000$-es méretarány azt jelenti, hogy a térképen mért távolság $450\,000$-szerese van a valóságban a két objektum között.)

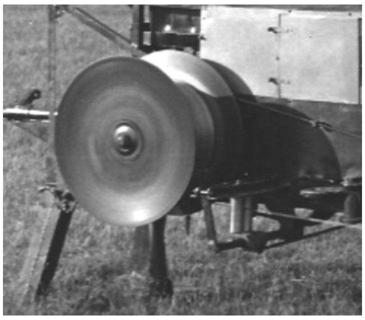
a) Mekkora a tervezett távrepülés hossza légvonalban? A végeredményt 10 km-es pontosságúra kerekítve km-ben adjuk meg.

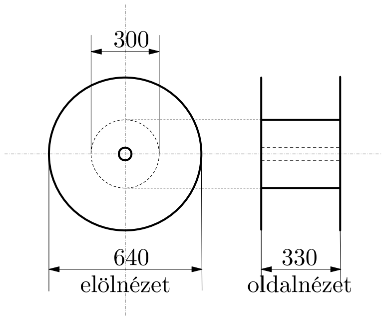
A repülőgép hagyományos magasságmérője a p légköri nyomásból határozza meg a tengerszint feletti magasságot a $p = p_0 \cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$ képlet alapján, ahol p_0 a tengerszinten mért nyomást, h pedig a tengerszint feletti magasságot jelenti méter mértékegységben megadva.

b) Milyen magasan van a repülőgép, ha $p_0 = 103$ kPa, $p = 88$ kPa?

A vitorlázó repülőgépek levegőbe emelésének leggyakrabban alkalmazott módja a csörlővel vontatás. Ez úgy történik, hogy a csörlőaggregátor egy kötéldobra rétegenként szorosan feltekercseli a drótkötelet, amelynek végén a vitorlázó repülőgép van. A mellékelt *ábrán* a kötéldob legfontosabb méreteit milliméter mértékegységben tüntettük fel. A drótkötél átmérője 6 mm.

c) Legfeljebb milyen hosszú drótkötelet lehet feltekerni erre a dobra? (*16 pont*)





7. Egy trapéz rövidebbik alapja 1, egy másik oldala 7 egység hosszú. A trapéz oldalainak hosszát megfelelő sorrendbe rakva egy számtani sorozat szomszédos elemeit kapjuk.

a) Mekkora a trapéz nagyobbik alapja, mekkorák a szárak?

Az alábbi adatsokaságban néhány trapéz oldalhosszának mérőszámát soroltuk fel véletlenszerűen: 1, 3, 5, 7, 1, 4, 7, 10, 1, 7, 13, 19, 1, 6, 12, 15.

b) Számítsuk ki az adatok átlagát, szórását, határozzuk meg a móduszt és a mediánt.

Az egy síkban levő 1, 3, 7, 5 egység hosszú szakaszokat ebben a sorrendben csuklósan rögzítettük egymáshoz, majd addig mozgattuk, míg egy húrnégyszöget sikerült kialakítani.

c) Mekkora szöget zár be egymással ekkor az 5 és 7 egység hosszú szakasz?

(*16 pont*)

8. Egy vegyi anyagokat gyártó vállalat egy bizonyos terméket, melynek összetétele csak hatóanyagának koncentrációjában különbözik, kétféle kiszerelésben forgalmaz az alábbiak szerint.

A változat: 60%-os töménységű, 2 kg-os, 3 dm^3-es dobozban;

B változat: 20%-os töménységű, 5 kg-os, 8 dm^3-es dobozban.

A vállalat mintaboltjában a fenti árukból árkedvezményt adnak azoknak a vevőknek, akik összesen legalább 40 kg-ot vásárolnak ezekből. Egy vevő, akinek 50%-os keverékre van szüksége, vásárolni szeretne belőlük úgy, hogy minden megvásárolt doboz tartalmát teljes mértékben felhasználja.

a) Hány dobozzal vegyen az egyes változatokból, ha részesülni kíván az árkedvezményben, szállítóeszközére legfeljebb összesen 120 kilogrammnyi terhet rakhat, a megvásárolt áru teljes térfogata nem haladhatja meg a 130 dm^3-t, és a kedvezmény mértéke egyenesen arányos a megvásárolt áru össztömegével?

Ez a vállalat egyike annak az öt vállalatból álló csoportnak, melyben mindegyik vállalat bármelyik másikkal üzleti kapcsolatban áll, és az egymással szembeni követeléseiket forintban, vagy euróban egyenlítik ki. Két szereplő egymás között ugyanabban a pénznemben fizeti ki a számlát. A szerződések megkötése után észrevették, hogy nincs három olyan vállalat, melyek egymás között azonos valutában rendezik tartozásaikat.

b) Igazoljuk, hogy mindegyik vállalat kettőnek forinttal, a másik kettőnek pedig euróval fizet.

(*16 pont*)

9. *a*) A p valós paraméter mely értéke esetén lesz az $f(x)=x^3-3x^2+\frac{9}{4}x+p$ $(x\in\mathbb{R})$ függvénynek három különböző zérushelye a valós számok halmazán?

A $g(x)=x^3+bx^2+cx+2022$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény b és c együtthatóit szabályos dobókockával sorsoljuk ki; az első dobás b-t, a második c-t eredményezi.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott függvénynek nem lesz helyi szélsőértéke? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2022/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Határozzuk meg a következő kifejezés előjelét, ha n tetszőleges természetes szám:*

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}-\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}. \qquad (6\ pont)$$

b) *Hány valós megoldása van a*

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

trigonometrikus egyenletnek a $]0;\pi[$ *intervallumon?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) *Egyik lehetőség.* Osszuk el az első (pozitív) törtkifejezést a második (pozitív) törtkifejezéssel, felhasználva a hatványozás ismert azonosságait:

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}:\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}=\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}\cdot\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}=\frac{2^{2n}+2^{n+1}+1+2^{n-1}}{2^{2n}+2^{n+1}+1}=$$

$$=1+\frac{2^{n-1}}{2^{2n}+2^{n+1}+1}>1,$$

mert az összegben szereplő tört számlálója és nevezője is, így maga a törtkifejezés is pozitív előjelű (az exponenciális függvény tulajdonsága miatt), amiből az következik, hogy az eredeti különbségben az első (pozitív) tag nagyobb, mint a második (pozitív) tag, így a különbségük előjele pozitív.

Másik lehetőség. Hozzunk közös nevezőre, ismét felhasználva a hatványozás ismert azonosságait:

$$\frac{(2^{n-1}+1)(2^{n+1}+1)-(2^n+1)^2}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2n}+2^{n-1}+2^{n+1}+1-2^{2n}-2\cdot2^n-1}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n+1}-2\cdot2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}>0,$$