1. Amikor az érkező golyó vele azonos tömegű golyóval ütközik, vagyis $m_1 = m_2$, akkor $v_1 = 0$ és $v_2 = v$. Tehát ha két azonos tömegű golyó ütközik, azok sebességet cserélnek. A folyamat első 4 ütközése ilyen lesz.

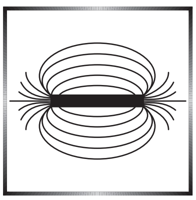
2. Ha a kisebb (m) tömegű golyó ütközik egy nagyobb (M) tömegűvel, akkor ($v > 0$ esetén) v_1 negatív lesz, tehát a kisebb tömegű golyó balra fog visszapattanni, a nagyobb tömegű golyó pedig az ütközés után jobbra halad, hiszen annak pozitív lesz a sebessége. A balra haladó kis golyó (az 1. esetnek megfelelően) sorra sebességet cserél a tőle balra lévő golyókkal, ezért a bal oldali legszélső golyó végül balra fog mozogni, a többi kis golyó pedig megáll. Ha két, egyenként M tömegű golyó ütközik, akkor azok is csak sebességet cserélnek (1. eset).

3. Amikor a jobb oldali utolsó nagy golyó ütközik a sor végén álló kis golyóval, akkor $m_1 = M$ és $m_2 = m$, tehát $m_1 > m_2$. Ebben az esetben v_1 is és v_2 is pozitív lesz, azaz mindkét golyó jobbra fog mozogni az ütközés után, és természetesen $v_1 < v_2$ is teljesül.

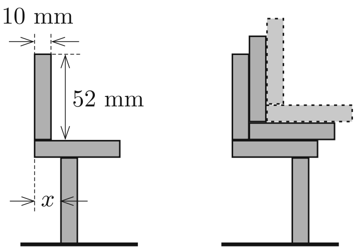
Az ütközéssorozat után a bal oldali legszélső (m tömegű) golyó *balra,* a sor jobb oldali szélén lévő (M és m tömegű) két golyó *jobbra* fog mozogni, a többi golyó pedig *egyhelyben marad.*

Beke Botond (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

34 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1 pont) 7, hibás 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása



P. 5338. *A* bal oldali ábrán *látható módon egy dominópárt helyezünk el egy harmadikon.*

a) *Határozzuk meg x lehetséges értékeit, hogy a dominók egyensúlyban legyenek.*

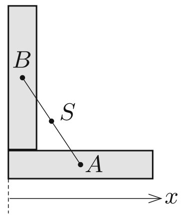
b) *Ezt követően további dominópárokat helyezünk el* a jobb oldali ábrának *megfelelően. Legfeljebb hány dominót helyezhetünk el a legalsóra, hogy az egyensúlyi állapot fennmaradjon?*

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

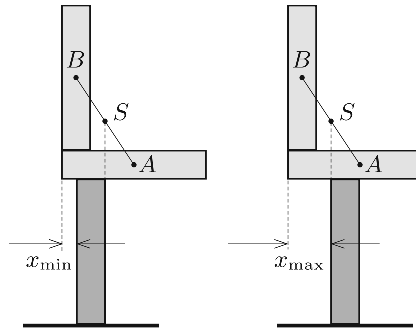
Megoldás. a) Az alátámasztás bal oldalán kilógó rész x hosszát úgy kell megválasztanunk, hogy a dominópár tömegközéppontja a függőleges „tartóhasáb" fölé essen. A két felső dominó S tömegközéppontjának elegendő a „vízszintes" x_S koordinátáját kiszámítanunk, hiszen a stabilitás feltételében csak ez szerepel. A dominókat egyforma, homogén tömegeloszlású hasáboknak tekintjük. Az *1. ábráról* leolvasható, hogy $x_A = \frac{52}{2} = 26$, $x_B = \frac{10}{2} = 5$ és

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = 15{,}5 \text{ mm}.$$

A távolságokat milliméter egységekben mérjük, és ezt a dimenziót a továbbiakban nem jelezzük.



1. *ábra*

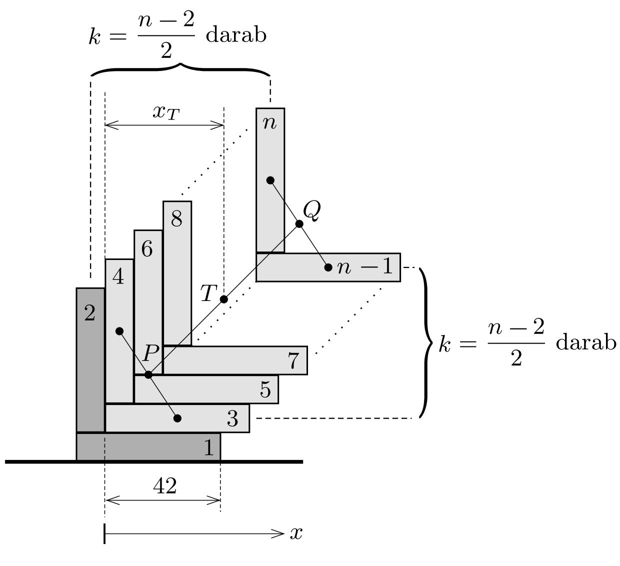


2. *ábra*

A *2. ábrán* látszik, hogy $x_{\min} = x_S - 10 = 5{,}5$ és $x_{\max} = x_S = 15{,}5$. A dominópár egyensúlyának feltétele ezek szerint:

$$5{,}5 \leqslant x \leqslant 15{,}5.$$

(A két szélső helyzet labilis (instabil) egyensúlynak felel meg.)



3. *ábra*

b) Helyezzük el először a dominópárokat a vízszintes asztallapra a *3. ábrán* látható módon. Ha a dominók n száma meghalad egy $n_{\max}$ értéket, akkor a $3, 4, 5, 6, \dots, n-1, n$ jelzésű (halványszürke) dominókból álló építmény lebillen, elfordul az 1 jelű dominó jobb felső éle körül. Ez mindaddig nem következik be, ameddig az építmény tömegközéppontjának x_T koordinátája nem haladja meg az alátámasztó felület 42 milliméteres hosszát. (Az x koordinátákat most a 4-es jelű dominó bal oldali lapjától mérjük.)

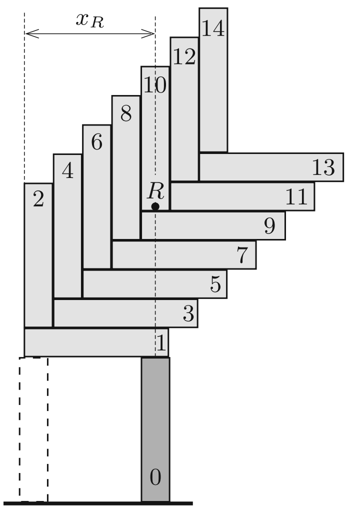
A 3–4 dominópár tömegközéppontja – mint láttuk – az $x_P = 15{,}5$ adattal adható meg. A további dominópárok tömegközéppontja vízszintesen 10-10 milliméterrel tolódik el jobbra, tehát az $(n-1)$-edik és az n-edik dominóra

$$x_Q = x_P + (k-1)\cdot 10 = 5{,}5 + 10\,k,$$

ahol $k = \frac{n-2}{2}$ a halványszürke dominópárok száma. A stabilitás szempontjából fontos T tömegközéppontra fennáll, hogy

$$x_T = \frac{x_P + x_Q}{2} = 10{,}5 + 5k = 5{,}5 + 2{,}5\,n.$$

Az $x_T \leqslant 42$ feltétel akkor teljesül, ha $n \leqslant 14{,}6$, vagyis a természetes számok körében $n \leqslant 14$. A vízszintes asztalon tehát legfeljebb 14 dominót (7 párat) helyezhetünk el úgy, hogy stabil egyensúlyban legyenek. (Amennyiben még egy további vízszintes dominót rakunk fel, a tömegközéppont 2 mm-rel túlnyúlik a megengedett határon. Könnyen belátható, hogy ha az építmény nem billen le a legalsó dominóról, akkor máshol sem billenhet le.)



4. ábra

Vajon ráállítható-e (ráemelhető-e) ez a 14 dominó egyetlen, a legkisebb lapján álló (0-val jelölt) dominóra? Ez akkor tehető meg, ha a 14 dominóból álló rendszer R tömegközéppontja nincs messzebb az 1-es jelű dominó bal oldali lapjától, mint a dominó 52 milliméteres hossza. A fenti képletekből kiszámíthatjuk, hogy $x_R = 45{,}5 < 52$, tehát a *4. ábrán* látható állapot megvalósítható.

Megjegyzés. Amennyiben a 14 dominót nem az asztalon rakjuk egymásra, hanem a 0-val jelölt elemre egyesével pakoljuk rá a többi dominót, akkor az építkezés közben – átmenetileg – stabilizálnunk kell az ingatag szerkezetet. Ezt például a 4. ábrán látható, szaggatott vonallal jelölt dominóval oldhatjuk meg. Az „állványt” az építmény elkészülte után óvatosan eltávolíthatjuk.

Szabó Márton (Szeghalom, Péter András Gimn. és Kollégium, 11. évf.) dolgozata alapján

55 dolgozat érkezett. Helyes Szabó Márton megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 14, hiányos (1–3 pont) 34, hibás 6 dolgozat.

P. 5354. *Motoros játékvonat halad R sugarú, kör alakú pályán, állandó nagyságú v sebességgel. A kör középpontjától $d<R$ távolságra egy állandó, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó, pontszerű hangforrás helyezkedik el. A vonatra egy mikrofont rögzítünk. Milyen határok között változik a mikrofon által észlelt hang frekvenciája? (A hang sebessége c.)*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

I. megoldás. Legyen a vonat kör alakú pályájának középpontja O, a rögzített hangforrás helye F, a vonat pillanatnyi helye pedig a körpálya P pontja (lásd az *1. ábrát*). Álló, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó hangforrás hangját egy mozgó megfigyelő (esetünkben a mikrofon) a Doppler-effektus szerint

$$f=f_0\left(1+\frac{u}{c}\right)$$

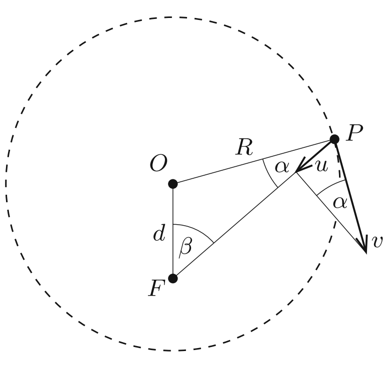
frekvenciájúnak észleli, ahol u az észlelő sebességének a *hangforrás irányába* mutató komponense.

A hangforrás helyét pl. az ábrán látható β szöggel adhatjuk meg. Bontsuk fel a mikrofon v nagyságú sebességvektorát egy PF-fel párhuzamos és egy arra merőleges komponensre. A párhuzamos összetevőt jelöljük u-val. A hangforrás és a mikrofon távolsága $u=v\sin\alpha$ sebességgel *csökken,* ahol α az OPF szög. A legnagyobb észlelt frekvencia u legnagyobb értékének, vagyis α legnagyobb értékének felel meg. Mivel az OPF háromszögre felírható szinusztétel szerint

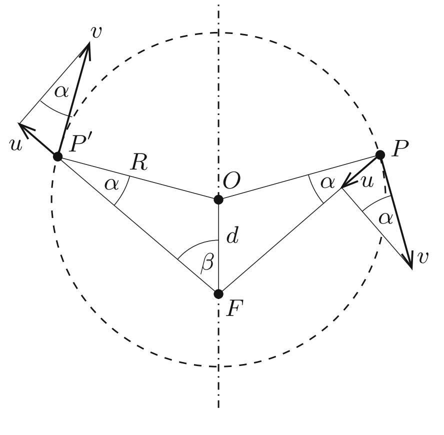
$$\sin\alpha=\frac{d}{R}\sin\beta,$$

ez a maximumát $\sin\beta=1$, vagyis $\beta=90^\circ$-nál veszi fel. Ezek szerint $(\sin\alpha)_{\max}=\frac{d}{R}$, $u_{\max}=\frac{d}{R}v$, tehát a mikrofon által észlelt legnagyobb frekvencia

$$f_{\max}=f_0\left(1+\frac{v}{c}\,\frac{d}{R}\right).$$



1. ábra



2. ábra

Hasonló módon kapjuk a hangforrástól távolodó mikrofon által észlelt frekvenciacsökkenést is. Ha tükrözzük a P pontot az OF egyenesre, az F és P' pontok *távolodásának* sebessége ugyanakkora lesz, mint F és P *közeledésének* sebessége volt (*2. ábra*). Mivel u legnagyobb értéke $\frac{d}{R}v$, az észlelt frekvencia legkisebb értéke:

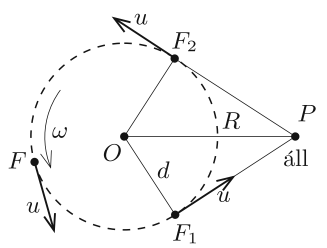
$$f_{\min} = f_0\left(1 - \frac{v}{c}\,\frac{d}{R}\right).$$

Köpenczei Csanád (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 11. évf.) és
Yokota Adan (Gödöllői Török Ignác Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. A hangmagasság változását a Doppler-effektussal magyarázzuk. Eszerint az f_0 frekvenciájú, a levegőhöz képest álló hangforrás frekvenciáját egy, a hangforráshoz u sebességgel közeledő (vagy távolodó) mikrofon

$$f = f_0\left(1 \pm \frac{u}{c}\right)$$

nagyságúnak rögzíti. A feladatunk tehát u legnagyobb értékének meghatározása.



3. ábra

Két test távolsága nem függ attól, hogy milyen koordináta-rendszerben számítjuk ki azt. Válasszuk azt a koordináta-rendszert, amelynek origója a körpálya O középpontjában van, és $\omega = \frac{v}{R}$ szögsebességgel forog az O pont körül a vonat körmozgásával megegyező irányban. A játékvonat – ebben a forgó vonatkoztatási rendszerben – mindig ugyanazon a helyen áll, a hangforrás pedig egy d sugarú körpályán $u = d\omega = \frac{vd}{R}$ sebességgel egyenletesen mozog (*3. ábra*).

A vonat és a hangforrás távolsága akkor változik a leggyorsabban, amikor a hangforrás éppen az F_1 pontban van, ahol a sebessége az álló vonat irányába mutat, vagy az F_2 pontban, ahol a sebessége a vonattal ellentétes irányú. Ilyenkor F és P közeledésének, illetve távolodásának sebessége u, a megváltozott frekvencia legnagyobb és legkisebb értéke tehát

$$f_{\max} = f_0\left(1 + \frac{vd}{Rc}\right), \qquad \text{illetve} \qquad f_{\min} = f_0\left(1 - \frac{vd}{Rc}\right).$$

Megjegyzés. A forgó koordináta-rendszerben a hangforrás mozog, az észlelő (mikrofon) pedig áll. Ennek ellenére a Doppler-effektusnak nem az $f = f_0\frac{c}{c-u}$ képletét alkalmaztuk, hanem az álló hangforrásra vonatkozó $f = f_0\frac{c+u}{c}$ összefüggéssel számoltunk. Ezt azért tehettük meg, mert a forgó vonatkoztatási rendszerben a levegő is mozog (forog), és a Doppler-effektusnál mindig a közeghez viszonyított sebességek számítanak.

(G. P.)

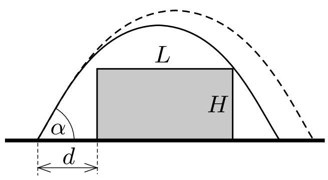
28 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 3, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5356. *Vízszintes talajon fekszik egy téglalap keresztmetszetű gerenda. A téglalap vízszintes oldala L, függőleges oldala H hosszúságú. Elhanyagolva a közegellenállást, honnan és hogyan kell elugrania egy szöcskének, hogy a lehető legkisebb energiaráfordítással sikerüljön átugrania ezt a gerendát? Hol lesz az ugrási parabola fókuszpontja ebben az esetben?*

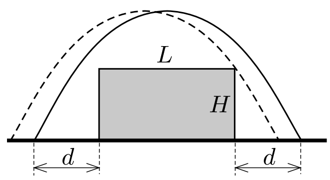
(*5 pont*) *Radnai Gyula* (1939–2021) feladata

Megoldás. A szöcske az elugrása után parabolapályán fog mozogni. Ez a parabola nyilván a gerenda leghosszabb oldalélére merőleges síkban fekszik, elegendő tehát ezt a síkot vizsgálni. (Ha a szöcskének lenne „hosszanti” irányú sebessége, akkor ennek nullára csökkentésével csökkenthetné az energiaráfordítást.)

Ha a szöcske pályagörbéje a gerenda felső éleitől véges távolságra haladna, akkor az elugrás helyének és irányának változatlanul tartása mellett kisebb kezdősebesség (kisebb energiaráfordítás) is elegendő lenne (*1. ábra*). A szaggatott vonallal jelölt parabolapályánál kedvezőbb a folytonos vonallal jelölt pályához tartozó mozgás. A pályagörbének tehát legalább az egyik felső élet „érintenie” kell, annak közvetlen közelében kell elhaladnia. Ha ugyanekkor nem érintené a gerenda másik felső élét, akkor (a kezdősebességet és az elugrás szögét változatlannak tartva) az elugrás helyének megváltoztatásával olyan parabolához juthatnánk, amelyik a gerenda felett, attól véges távolságban halad, tehát ez sem lehet a legkedvezőbb elrendezés (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Optimális esetben a parabola szimmetriatengelye a gerenda téglalap alakú keresztmetszetének függőleges középvonalánál található, és a parabola illeszkedik a téglalap mindkét felső csúcsára. A *3. ábra* jelöléseit használva felírhatjuk, hogy

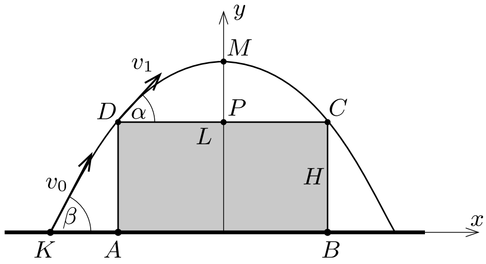
$$v_1 t\cos\alpha = \frac{L}{2}, \qquad \text{valamint} \qquad v_1\sin\alpha = gt,$$

ahol t azt az időt jelöli, amennyi alatt a szöcske a D pontból a pályagörbe legmagasabb (M-mel jelölt) pontjába kerül. Ebből a két egyenletből t kiküszöbölése után kapjuk, hogy

$$v_1^2 = \frac{gL}{\sin(2\alpha)}.$$

Írjuk fel most az energiamegmaradás törvényét a K és D pontok közötti mozgásra:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH,$$



3. ábra

vagyis

$$v_0^2 = 2gH + v_1^2 = 2gH + \frac{gL}{\sin(2\alpha)}.$$

Innen leolvashatjuk, hogy v_0 akkor minimális (akkor legkisebb a szöcske energiaráfordítása az elugráskor), amikor $\sin(2\alpha) = 1$, vagyis $\alpha = 45°$.

Határozzuk meg a parabola

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

alakban keresett egyenletét a 3. ábrán látható koordináta-rendszerben. Mivel a $C = \left(\frac{L}{2}, H\right)$ és a $D = \left(-\frac{L}{2}, H\right)$ pontok rajta vannak a parabolán, teljesül, hogy

$$H = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\frac{L}{2} + c, \quad \text{illetve} \quad H = a\left(-\frac{L}{2}\right)^2 - b\frac{L}{2} + c.$$

Ezekből következik, hogy $b = 0$ és $c = H - a\frac{L^2}{4}$, vagyis a parabola egyenlete:

$$f(x) = a\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right) + H.$$

Láttuk, hogy a parabola meredeksége a D pontban $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45° = 1$. A parabola ismert tulajdonsága szerint ez a meredekség éppen kétszerese a DM szelő meredekségének:

$$1 = 2\frac{-aL^2/4}{L/2}, \qquad \text{ahonnan} \qquad a = -\frac{1}{L},$$

tehát a pályagörbe egyenlete:

$$f(x) = H + \frac{L}{4} - \frac{x^2}{L}.$$

Megjegyzés. Ugyanezt az összefüggést differenciálszámítással is megkaphatjuk. $f'(x) = 2ax$, ami az $x_D = -L/2$ helyen $-2aL/2 = 1$, vagyis $a = -1/L$.

A szöcske elugrásának $x_K < 0$ koordinátáját az $f(x_K) = 0$ feltételből kapjuk meg:

$$x_K = -\sqrt{HL + \frac{L^2}{4}}\,,$$

vagyis az elugrási hely és a gerenda szélének KA távolsága

$$d = \sqrt{HL + \frac{L^2}{4}} - \frac{L}{2}.$$

Az elugrás szögét a vízszintes irányú sebesség állandóságát kifejező $v_0 \cos\beta = v_1 \cos 45^\circ$ összefüggésből kaphatjuk meg:

$$\cos\beta = \frac{v_1}{\sqrt{2}\,v_0} = \sqrt{\frac{L}{2(L+2H)}},$$

amit így is kifejezhetünk:

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1 + \frac{4H}{L}}\,.$$

Megjegyzés. Ezt az összefüggést differenciálszámítással is megkaphatjuk. Az $f(x)$ függvény deriváltja az $x_K = -\sqrt{HL + (L^2/4)}$ helyen:

$$\operatorname{tg}\beta = f'(x_K) = -2ax_K = \sqrt{1 + \frac{4H}{L}}.$$

Hátra van még a legkisebb energiaráfordításhoz tartozó parabolapálya fókuszpontjának meghatározása. A szimmetria miatt ez a pont a gerenda MP szimmetriatengelyén, vagyis az y tengelyen található. Egy optikai analógia segítségével könnyen beláthatjuk, hogy a fókuszpont éppen a DC szakasz felezőpontja, vagyis a gerenda felső lapjának P pontja. Képzeljük el, hogy a szöcske pályagörbéje egy parabolatükörnek (forgásparaboloidnak) a szimmetriatengelyére illeszkedő síkkal való metszete. Ha erre a tükörre az AD egyenes mentén haladó fénysugár esik, az ($\alpha = 45^\circ$ miatt) vízszintesen halad tovább. Másrészt a tükör szimmetriatengelyével párhuzamos fénysugarak a fókuszpont irányába verődnek vissza, a fókuszpont tehát csakis a P pont lehet. (Ennél a megfontolásnál hallgatólagosan felhasználtuk azt a tényt is, hogy a parabola *geometriai* értelemben vett fókuszpontja és a parabolatükör *fizikai* értelemben vett fókuszpontja egybeesik.)

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és *Seprődi Barnabás Bendegúz* (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (1–3 pont) 18, hibás 6 dolgozat.