9. Peches Pál nagyon szereti a kaparós sorsjegyeket. Kedvence a Lutri sorsjegy, melynek ára 500 Ft, és a sorsjegyek 25%-a nyerő. Pálnak (most csak) négy darab 500 forintosa van. Bemegy egy lottózóba, és elhatározza, hogy addig vásárolja kedvenc sorsjegyét, amíg nem nyer, vagy ameddig a pénze el nem fogy.

a) Határozzuk meg a Pál által a sorsjegy(ek)re elköltött 500 forintosok számának várható értékét és szórását. (*7 pont*)

Pál háromféle tömegközlekedési eszközzel tudja munkahelyét megközelíteni, éspedig busszal, metróval, illetve villamossal, ezért (is) kombinált bérlettel rendelkezik. Az esetek 25%-ában busszal megy, a metrót pedig négyszer olyan gyakran használja, mint a villamost. A buszon átlagosan minden negyedik, a villamoson átlagosan minden tizedik alkalommal ellenőrzik a bérletét, míg annak a valószínűsége, hogy a metrón kap ellenőrzést, 0,85.

b) Egyik alkalommal ellenőrizték a bérletét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy villamossal utazott? (*6 pont*)

Egyik nap (a munkanap végén) Pál egy ötfős baráti társaság tagjaként busszal utazott haza. Az egyik megállóban ellenőrök szálltak fel, és a buszon (aktuálisan) tartózkodó 48 utasból találomra kiválasztott tíz embernek a bérletét (vagy jegyét) ellenőrizték.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek? (*3 pont*)

Marczis György (Gyula)
Molnár István (Gyula)
Molnár Judit (Gyula)
Rókáné Rózsa Anikó (Békéscsaba)

Megoldásvázlatok a 2022/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Három pénzváltó vállalkozás aktuális forint-euró árfolyamait ismerjük:*

	Vétel	**Eladás**	**Illeték**
Első	348,50	352,90	nincs
Második	351,00	352,00	a tranzakció összegének 0,3%-a, de maximum 1500 Ft
Harmadik	350,00	352,50	400 Ft

A vételi *árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért vesz meg az ügyféltől* 1 *eurót. Az* eladási *árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért ad el az ügyfélnek* 1 *eurót. Végül az* illeték *adja meg, hogy minden egyes pénzváltási tranzakció után mekkora díjat kell pluszban kifizetni.*

a) Annának 250 *euróra volt szüksége. Mennyit kellene ezért fizetnie az egyes pénzváltóknál?* (*3 pont*)

b) Balázs 600 000 Ft*-ért vett eurót az Első Pénzváltónál. Később kiderült, hogy nem lesz rá szüksége, ezért visszaváltotta a pénzt forintra a Második Pénzváltónál. Hány forint vesztesége keletkezett?* (*4 pont*)

c) Határozzuk meg, hány euró vásárlása esetén lesz a Harmadik Pénzváltóé a legkedvezőbb átváltási ajánlat. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Elsőnél: $250 \cdot 352{,}90 = 88\,225$ Ft.

Másodiknál: $250 \cdot 352 = 88\,000$ Ft, plusz ennek a 0,3%-a, ami 264 Ft, tehát összesen 88 264 Ft.

Harmadiknál: $250 \cdot 352{,}50 + 400 = 88\,525$ Ft.

b) A 600 ezer Ft-ért $\frac{600\,000}{352{,}90} \approx 1700$ eurót kapott. A pénz visszaváltásakor $1700 \cdot 351 = 596\,700$ Ft-ot kapna vissza, de ki kell fizetnie az illetéket. Az 596 700 Ft 0,3%-a 1790,10 Ft, de ez meghaladja az illeték maximális összegét, tehát 1500 Ft illeték terheli a tranzakciót.

Így $596\,700 - 1500 = 595\,200$ Ft-ot kap kézhez, tehát 4800 Ft vesztesége keletkezik a két tranzakción.

c) Ha n eurót váltunk, akkor a Harmadik Pénzváltó ajánlata abban az esetben kedvezőbb az Első Pénzváltó ajánlatánál, ha $352{,}5n + 400 < 352{,}9n$. Ebből $400 < 0{,}4n$, azaz $1000 < n$.

A Harmadik Pénzváltó ajánlata abban az esetben kedvezőbb a Második Pénzváltó ajánlatánál, ha $352{,}5n + 400 < 352n \cdot 1{,}003$ és $352{,}5n + 400 < 352n + 1500$. Innen egyrészt $352{,}5n + 400 < 353{,}056n$, azaz $400 < 0{,}556n$, azaz $719{,}42 < n$, másrészt $0{,}5n < 1100$, azaz $n < 2200$.

Ezeket összevetve tehát 1000 és 2200 közötti mennyiségű euró váltása esetén lesz a Harmadik Pénzváltó ajánlata a legkedvezőbb.

2. *a) Melyik az a legkisebb olyan* 77*-tel osztható négyjegyű pozitív egész szám, amelyik pontosan három különböző számjegyet tartalmaz?* (*4 pont*)

b) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyik pontosan három különböző számjegyet tartalmaz? (*4 pont*)

c) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely a 7 *és a* 11 *közül legalább az egyikkel osztható?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A legkisebb 77-tel osztható négyjegyű pozitív egész szám az 1001. Ez nem jó, mert csak két különböző számjegyet tartalmaz.

A következő az 1078, ez sem jó, mert ez pedig négyet.

A következő az 1155, ez sem jó, mert ez megint csak kettőt.

A következő az 1232, ez pontosan három különböző számjegyet tartalmaz, ezért ez a keresett szám.

b) A három különböző számjegy közül az egyik kétszer, a másik kettő egyszer fordul elő a számban.

Ha az ismétlődő számjegyek egyikével kezdődik a szám, akkor a párja 3-féle helyen állhat. Ez a számjegy (mivel 0-val nem kezdődhet szám) 9-féleképpen, a másik két számjegy 9, illetve 8-féleképpen választható ki. Ez $3\cdot 9\cdot 9\cdot 8$ $(=1944)$ lehetőség.

Ha nem az ismétlődő számjegyek egyikével kezdődik a szám, akkor a két ismétlődő számjegy 3-féle helyen állhat. Az első számjegy (mivel 0-val nem kezdődhet szám) 9-féleképpen, a másik két számjegy 9, illetve 8-féleképpen választható ki. Ez ismét $3\cdot 9\cdot 9\cdot 8$ $(=1944)$ lehetőség.

Azaz összesen 3888 a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.

c) 1001 és 9996 között $\frac{9996-1001}{7}+1=1286$ darab 7-tel osztható szám van. 1001 és 9999 között $\frac{9999-1001}{11}+1=819$ darab 11-gyel osztható szám van. Ezek közül 7-tel és 11-gyel (tehát 77-tel) is osztható $\frac{9933-1001}{77}+1=117$ darab.

Ezeket a 7-tel és a 11-gyel oszthatóak között is megszámoltuk, tehát 7 és 11 közül legalább az egyikkel osztható $(1286+819-117=)1988$ darab négyjegyű szám.

3. *a*) *Egy számtani sorozat első* 10 *tagjának összege megegyezik az ezt követő* 5 *tag összegével. A sorozat* 19*-edik tagja a* 777*. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.* (*7 pont*)

b) *Egy mértani sorozat első* 2 *tagjának összege hatszorosa a sorozat harmadik tagjának. A sorozat* 4*-edik tagja az* 1*. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje a számtani sorozat n-edik tagját a_n, differenciáját pedig d. A számtani sorozat összegképletével:

$$\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=\frac{(a_{11}+a_{15})\cdot 5}{2}.$$

A 10., 11. és 15. tagot az első tag és a differencia segítségével átírva:

$$\frac{(2a_1+9d)\cdot 10}{2}=\frac{(2a_1+24d)\cdot 5}{2},$$

$$2a_1+9d=a_1+12d,$$

$$a_1=3d.$$

Ezt felhasználva $a_{19}=a_1+18d=21d=777$, ahonnan $d=37$, tehát $a_1=111$.

Ellenőrzés: $a_{10}=444$, $a_{11}=481$, $a_{15}=629$, az első 10, és az ezt követő 5 tag összege valóban egyenlő (2775).

b) Jelölje a mértani sorozat n-edik tagját a_n, hányadosát pedig q.

$$a_1+a_1q=6a_1q^2.$$

A nemnulla a_1-gyel osztva és rendezve: $0=6q^2-q-1$. Az egyenlet gyökei (tehát a hányados lehetséges értékei) $1/2$ és $-1/3$.

$$a_1=\frac{a_4}{q^3}=\frac{1}{q^3},$$

innen az első tag 8 és a hányados $1/2$, vagy pedig az első tag -27 és a hányados $-1/3$.

Ellenőrzés: $8+4=6\cdot 2$, illetve $-27+9=6\cdot(-3)$, és a 4. tag mindkét esetben valóban 1.

4. *a) Igaz-e a következő állítás?*

Ha $x=3$, akkor $f(x)=2x^2-10x+14$ értéke pozitív prímszámmal egyenlő.

Fogalmazzuk meg az állítás megfordítását. Igaz-e az állítás megfordítása? A választ indokoljuk. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|2\sin^2 x+3\sin x-1|=1. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a)* Igaz, hiszen $f(3)=2$, ami valóban prím.

Az állítás megfordítása: Ha $f(x)=2x^2-10x+14$ értéke pozitív prímszám, akkor $x=3$. A megfordított állítás hamis.

Például $f(x)=2x^2-10x+14=2$ esetén nullára rendezés után $x_1=3$ vagy $x_2=2$ adódik, tehát nem biztos, hogy $x=3$.

b) Az abszolútérték jelet elhagyva:

$$2\sin^2 x+3\sin x-1=1 \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x+3\sin x-1=-1,$$

tehát

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x+3\sin x=0.$$

Az egyenletek $\sin x$-ben másodfokúak, gyökeik $1/2$ és -2, illetve 0 és $-1{,}5$, melyek közül ($\sin x$ értékkészlete miatt) csak $\sin x=1/2$ és $\sin x=0$ lehetséges. Ekkor $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$ vagy $x=m\pi$ ($k,l,m\in\mathbb{Z}$).

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

II. rész

5. *Nagyi a* 31,5 cm × 30 cm *(belső) méretű tepsijében sütött süteményt az unokáinak. A sütemény* 4 cm *magas lett. Nagyi a sütemény négy oldalát és a tetejét be szeretné vonni csokikrémmel.*

a) Hány dkg csokikrémre lesz ehhez szüksége, ha 1 dm^2 *felület bevonásához* 2 dkg *csokikrém elegendő? A választ egészre kerekítve adjuk meg.* (*3 pont*)

Az unokái közül ugyanannyian szeretik a sütemény „szélét", mint a „közepét". Ezért Nagyi szeretne a sütemény széléből mind a négy oldalon egy azonos szélességű csíkot levágni úgy, hogy a levágott részek alapterülete és a sütemény közepének alapterülete egyenlő legyen.

b) Határozzuk meg a levágandó csík szélességét. (*7 pont*)

Nagyi minden unokájának ugyanannyi szeletet szeretne adni a süteményből.

Ha $10\cdot 5$ *szeletre vágná a süteményt, akkor az osztás után* 2 *szelet megmaradna. Ha* $9\cdot 5$ *szeletre vágná, akkor* 3 *szelet, ha pedig* $10\cdot 4$ *szeletre vágná, akkor* 4 *szelet maradna meg az osztás után.*

c) Hány unokája van Nagyinak? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A bevonandó felület öt téglalapból áll, ezek területösszege:

$$A = 31{,}5 \cdot 30 + 2 \cdot (31{,}5 \cdot 4 + 30 \cdot 4) = 1437\ \mathrm{cm}^2 = 14{,}37\ \mathrm{dm}^2.$$

Ennek bevonásához $14{,}37 \cdot 2 \approx 29$ dkg csokikrémre lesz szüksége.

b) A levágott csík szélességét jelölje x. Ekkor a középen megmaradó téglalap méretei: $31{,}5 - 2x$, illetve $30 - 2x$. Ennek a téglalapnak a területe fele a teljes sütemény alapterületének:

$$(31{,}5 - 2x)(30 - 2x) = \frac{31{,}5 \cdot 30}{2}.$$

Rendezés után: $4x^2 - 123x + 472{,}5 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei 26,25 (mely nyilván nem megoldása a feladatnak) és 4,5.

Tehát 4,5 cm szélességű csíkot kell Nagyinak levágnia.

Ellenőrzés: a $22{,}5 \times 21$-es rész területe (472,5) valóban fele a teljes süti alapterületének (945).

c) 50 szeletből 2 megmarad, tehát a 48 osztható az unokák számával.

45 szeletből 3 megmarad, tehát a 42 osztható az unokák számával.

40 szeletből 4 megmarad, tehát a 36 osztható az unokák számával.

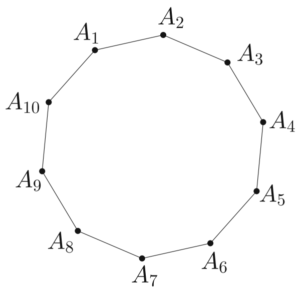
Az unokák száma ezért csak a 36, 42 és a 48 közös osztói közül kerülhet ki, ezek: 2, 3 és 6.

2 és 3 azonban nem lehet az unokák száma, mert akkor vagy az 50 vagy a 45 szeletből nem maradt volna az osztás után, tehát Nagyinak 6 unokája van.

6. *Egy szabályos* 10*-szög alakú asztal egy oldalának hossza* 50 cm*. Erre az asztalra egy olyan kör alakú terítőt készítenek, amely sehol nem lóg le az asztalról.*

a) *Határozzuk meg a legnagyobb ilyen terítő területét.* (*3 pont*)

b) *Legfeljebb hány százalékát tudja lefedni ez a terítő az asztal területének?* (*3 pont*)



Jelölje F_1 az A_1A_2 és F_2 az A_3A_4 szakaszok felezőpontját. Az asztallapot az A_8F_1 és az $A_{10}F_2$ egyenesekkel négy részre osztják. Jelölje M a két egyenes metszéspontját.

c) *Igazoljuk, hogy az $A_{10}A_9A_8M$ négyszög és az $F_2A_3A_2F_1M$ ötszög területe egyenlő.* (*4 pont*)

Egy szabályos 10*-szög csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, így egy háromszög csúcsait kapjuk.*

d) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a háromszög tompaszögű?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A lehetséges legnagyobb kör alakú terítő a szabályos 10-szögbe írható körnek felel meg, melynek középpontját jelöljük O-val. A szabályos 10-szög felbontható 10 darab egybevágó, 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszögre.

A beírható kör r sugara egyben az A_1OA_2 egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága:

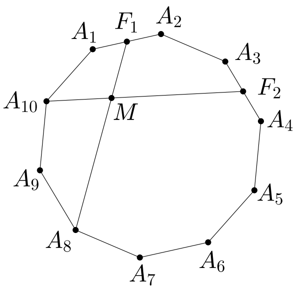
$$r = 25 \cdot \mathrm{tg}\, 72° \approx 76{,}94 \text{ cm}.$$

A kör alakú terítő területe $T_{\text{terítő}} = r^2\pi \approx 18\,600 \text{ cm}^2 = 1{,}86 \text{ m}^2$.

b) Az asztal területét a 10 darab egyenlő szárú háromszög területének összegeként határozzuk meg:

$$T_{\text{asztal}} = 10 \cdot \frac{50 \cdot 76,94}{2} = 19\,235 \text{ cm}^2.$$

Ha sehol nem lóg le az asztalról a terítő, akkor az asztal területének $\frac{18\,600}{19\,235} \cdot 100 \approx$ $\approx 96{,}7\%$-át fedi le.



c) Az $A_8A_9A_{10}A_1F_1$ és $A_{10}A_1A_2A_3F_2$ ötszögek egybevágók, mert a megfelelő oldalaik hossza és a közbezárt szögeik is megegyeznek (vagy egy – az O pont körüli – 72°-os forgatás a két alakzatot egymásba viszi).

Mindkét ötszögből elhagyva a közös $A_{10}A_1F_1M$ négyszöget, a maradék területeknek is meg kell egyezniük.

d) Először összeszámoljuk, hány olyan tompaszögű háromszög van, melynek tompaszögű csúcsa A_1. Tompaszögű háromszög esetén a körülírt kör O középpontja a háromszögön kívül van.

Ha a második csúcs A_2, 3 lehetőség van (A_8-tól A_{10}-ig).

Ha a második csúcs A_3, 2 lehetőség (A_9-től A_{10}-ig).

Ha a második csúcs A_4, 1 lehetőség (A_{10}).

Ha a tompaszögű csúcs A_1, akkor tehát 6 háromszög van.

Bármelyik csúcsnál lehet a tompaszög, így a tompaszögű háromszögek száma $10 \cdot 6 = 60$. A 10 csúcs közül hármat $\binom{10}{3} = 120$-féleképpen tudunk kiválasztani.

A keresett valószínűség $\frac{60}{120} = 0{,}5$.

7. *Az egyetemen* 220 *diák írt meg egy dolgozatot, az átlag századokra kerekítve* 3,82 *lett. (Csak az* 1, 2, 3, 4, 5 *egész értékű osztályzatok lehettek az eredmények.)*

a) *Legalább és legfeljebb hány* 5*-ös dolgozat született, ha nem volt* 1*-es?* (*7 pont*)

Egy szabályos dobókockával háromszor egymás után dobunk.

b) *Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak számtani vagy mértani közepe lesz.* (*6 pont*)

c) *Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok között van* 6*-os, feltéve, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak a számtani vagy mértani közepe.* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) A dolgozatok pontos x átlagára $3{,}815 \leqslant x < 3{,}825$. A pontszámok S összegére $3{,}815 \cdot 220 \leqslant S < 3{,}825 \cdot 220$, azaz $839{,}3 \leqslant S < 841{,}5$, tehát $S = 840$ vagy $S = 841$.

Legtöbb 5-ös akkor lehetséges, ha a 2-esek (a gyenge osztályzatok) száma minél nagyobb. Ha z darab 5-ös volt, akkor legfeljebb $220 - z$ lehet a 2-esek száma. Ebből $S \geqslant (220 - z) \cdot 2 + z \cdot 5 = 3z + 440$. Innen $z \leqslant \frac{S-440}{3}$, azaz (figyelembe véve, hogy z egész szám) $z \leqslant 133$ adódik.

Ha $z = 133$, akkor az 5-ösök összege $S_5 = 5 \cdot 133 = 665$, a maradék 175 vagy 176 összeget $220 - 133 = 87$ darab jegyből kell elérni. Ez lehetséges, pl. 86 darab 2-es és egy darab 3-as vagy egy 4-es segítségével.

Az 5-ösök száma tehát legfeljebb 133. Az 5-ösök minimális száma 0. Ez megvalósulhat például 180 darab 4-es és 40 darab 3-as esetén.

b) Teljesül a feltétel, ha a három dobott szám egyforma. Ez 6 lehetőség.

Ha az a értékű dobás a másik két (nem a értékű) dobás számtani közepe, akkor a másik két dobás $a - d$ és $a + d$, valamilyen alkalmas d-re.

$d = 1$ esetén a lehetséges értékei 2, 3, 4 vagy 5.

$d = 2$ esetén a lehetséges értékei 3 vagy 4.

$d > 2$ nem lehetséges.

Ha az a értékű dobás a másik két (a-val nem egyenlő) b és c értékű dobás mértani közepe, akkor $a^2 = bc$, tehát az egyik dobás értékének négyzete egyenlő a másik kettőnek a szorzatával. A dobások lehetséges értékeit figyelembe véve csak $2^2 = 1 \cdot 4$ lehetséges, tehát a három dobás 1, 2 és 4.

Mind a hét felsorolt esetben a három különböző értéket $3! = 6$-féle sorrendben dobhatjuk, ez tehát összesen 42 lehetőséget jelent. Összesen $6 + 42 = 48$ a feltételeknek megfelelő dobássorozat van. Az összes lehetséges dobássorozatok száma $6^3 = 216$, a keresett valószínűség tehát $\frac{48}{216} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$.

c) A *b*) feladatban összeszámolt 48 megfelelő dobássorozat (e feladat tekintetében az összes eset) közül a kedvező esetek azok, amelyekben van 6-os. Ezek: 2–4–6 (6-féle lehetséges sorrend), 4-5-6 (6-féle lehetséges sorrend) és 6-6-6 (1-féle lehetséges sorrend). Ez összesen 13 dobássorozat. A keresett valószínűség tehát $\frac{13}{48} \approx 0{,}271$.

8. *a*) *Az $y = \frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^2$ egyenletű görbe és az x-tengely által határolt zárt tartományt két részre osztja az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Határozzuk meg a két rész területének arányát.* (*8 pont*)

b) *Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben $A(0;0)$, $B(3;0)$ és $C(3;4)$. A háromszöget megforgatjuk a leghosszabb oldala körül. Határozzuk meg az így kapott forgástest felszínét és térfogatát.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Megkeressük a görbe és az x-tengely metszéspontjait:

$$\frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^2 = 0, \qquad \frac{4}{3}x\left(2 - \frac{1}{3}x\right) = 0,$$

ahonnan $x=0$ vagy $x=6$. A görbe és az x-tengely által határolt területet tehát (a Newton–Leibniz-szabály felhasználásával) az

$$\int_0^6 \left(\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

integrál adja meg.

$$\int_0^6 \left(\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{27}x^3\right]_0^6=48-32=16 \text{ területegység.}$$

A görbe és az egyenes közös pontjait a

$$\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2=\frac{4}{3}x$$

egyenlet megoldásából kapjuk.

$$\frac{4}{3}x\left(1-\frac{1}{3}x\right)=0,$$

ahonnan $x=0$ vagy $x=3$, a közös pontok tehát $(0;0)$ és $(3;4)$.

A görbe alatti területet az $x=3$ egyenes két szimmetrikus részre vágja, melyek területe 8-8 területegység.

A $(0;0)$, $(3;0)$ és a $(3;4)$ pontok által meghatározott háromszög területe 6 területegység. Az egyenes tehát egy 2 és egy 14 egység területű részre vágja a megadott tartományt, ezek aránya így $1:7$.

b) Az ABC háromszög derékszögű, leghosszabb oldala az 5 egység hosszú AC átfogó. Ha a háromszöget megforgatjuk az AC oldal körül, a keletkezett forgástest egy kettőskúp (két, közös alaplappal rendelkező kúp) lesz. A kúpok közös alaplapjának sugara a háromszög átfogójához tartozó m magassága. A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{AC\cdot m}{2}=\frac{AB\cdot BC}{2}.$$

Innen $m=2{,}4$.

A Pitagorasz-tétellel kapjuk, hogy ez a magasság egy 1,8 és egy 3,2 egység hosszúságú részekre osztja a háromszög átfogóját. A kettőskúp térfogata:

$$V=\frac{2{,}4^2\cdot\pi\cdot 3{,}2}{3}+\frac{2{,}4^2\cdot\pi\cdot 1{,}8}{3}=\frac{2{,}4^2\cdot\pi\cdot 5}{3}=9{,}6\pi\approx 30{,}2 \text{ térfogategység.}$$

A forgástest felszíne a két kúppalást területének összege. A kúpok alkotói a derékszögű háromszög befogói, tehát 3, illetve 4 egység hosszúak.

$$A=2{,}4\cdot\pi\cdot 3+2{,}4\cdot\pi\cdot 4=16{,}8\pi\approx 52{,}8 \text{ területegység.}$$

9. *Egy építőipari vállalkozónak a legutóbbi építkezés után megmaradt* 200 kg *cementje, és úgy döntött, hogy egyenlő tömegű részekre osztva értékesíti.*

A kereskedelemben szokásos módon nagyobb kiszerelésű csomag esetén alacsonyabb a cement kilogrammonkénti ára (egységára): ha egy csomag cement tömege m *kg, akkor* $\left(40-\frac{m}{10}\right)$ *pengős egységáron kínálja eladásra. A cement becsomagolásának is van költsége, mégpedig* m *kg-os csomag esetén* $\left(25+\frac{m}{10}\right)$ *pengő csomagonként.*

a) Határozzuk meg, hogy mekkora lesz a vállalkozónak az eladásából (a csomagolás költségének levonása után) származó bevétele, ha a cementet 10 *egyenlő tömegű részre osztva értékesíti.* (*5 pont*)

b) Határozzuk meg, hány egyenlő tömegű részre kell osztani a cementet ahhoz, hogy – azt a tervek szerint értékesítve – az eladásból származó (a csomagolási költségek levonása utáni) bevétel maximális legyen. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) 10 részre osztva az eladandó cementet, egy csomag tömege 20 kg. Ekkor a cement egységára 38 pengő, az összes cement eladásából származó bevétel (a csomagolási költségek nélkül) $200\cdot 38=7600$ pengő.

Egy csomag csomagolási költsége 27 pengő, az összes csomagolási költség $10\cdot 27=270$ pengő.

A bevétel tehát $7600-270=7330$ pengő.

b) Tegyük fel, hogy a vállalkozó n egyenlő tömegű részre osztva értékesíti a cementet ($n\in\mathbb{Z}$). Ekkor egy csomag tömege $\frac{200}{n}$ kg.

A cement egységára $\left(40-\frac{20}{n}\right)$ pengő, az összes cement eladásából származó bevétel

$$200\cdot\left(40-\frac{20}{n}\right)=8000-\frac{4000}{n}\ \text{pengő}.$$

Egy csomag csomagolási költsége $\left(25+\frac{20}{n}\right)$ pengő, az összes csomag csomagolási költsége $n\left(25+\frac{20}{n}\right)=25n+20$ pengő. Az eladásból származó haszon így

$$\left(8000-\frac{4000}{n}\right)-(25n+20)=7980-25n-\frac{4000}{n}.$$

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett

$$f:\ x\mapsto 7980-25x-\frac{4000}{x}$$

függvényt, és keressük ennek maximumhelyét. Az f deriváltfüggvénye:

$$f'(x)=-25+\frac{4000}{x^2}.$$

Az f-nek ott lehet maximumhelye, ahol $f'(x)=0$, azaz $-25+\frac{4000}{x^2}=0$. Ebből ($x>0$ miatt) $x=\sqrt{160}\approx 12{,}65$. Mivel itt a deriváltfüggvény előjelet vált (pozitívból negatívba), az $f(x)$ függvény $x<\sqrt{160}$ esetén szigorúan monoton növekvő, $x>\sqrt{160}$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő.

Mivel n értéke csak egész lehet, így meg kell vizsgálni $f(12)$-t és $f(13)$-at.

$$f(13) \approx 7347{,}3 > f(12) \approx 7346{,}7,$$

tehát 13 egyenlő részre osztva lesz a legmagasabb az eladásból származó bevétel.

Koncz Levente
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5150. *Igazoljuk, hogy csak véges sok olyan pozitív egész szám van, amelyet nem lehet megkapni úgy, hogy egy kisebb számhoz hozzáadjuk annak valamelyik számjegyét. Melyik a legnagyobb ezek közül?*

(*4 pont*)

Megoldás. Minden három-, vagy annál többjegyű számot meg lehet kapni egyik számjegyének és egy kisebb számnak az összegeként a következő módon: a számból kivonjuk a legelső számjegyét (ez biztosan nagyobb, mint 0), az így kapott különbség lesz a megfelelő szám, hiszen ha ehhez hozzáadjuk az első számjegyét, akkor szinte minden esetben visszakapjuk az eredeti számot.

A fenti módszer akkor nem működik, ha a kivonás során változik az első számjegy. Mivel legalább háromjegyű számokat vizsgálunk, ez csak akkor fordulhat elő, ha a tízes helyiértéken lévő számjegy 0, és az első számjegy nagyobb, mint az utolsó. Ebben az esetben más módszerrel állítjuk elő a számot. Ha kivonunk a számból 9-et, akkor a tízes helyiértéken lévő 0-ból 9-es lesz, mert az utolsó számjegynél nagyobbat vontunk ki. Az így kapott számhoz hozzáadva az utolsó előtti számjegyét, amely 9, megkapjuk az eredetit számot.

Általánosságban, ha egy pozitív egész szám $\overline{x_n \dots x_2 x_1}$ alakú, ahol $x_2 \neq 0$, akkor a megfelelő szám: $\overline{x_n \dots x_2 x_1} - x_n$, amelyhez x_n-t hozzáadva megkapjuk az eredeti számot.

Ha egy pozitív egész szám $\overline{x_n \dots 0 x_1}$ alakú, ahol $9 \geqslant x_n > x_1$,akkor a megfelelő szám: $\overline{x_n \dots 0 x_1} - 9$, amelynek utolsó előtti számjegye biztosan 9, így hozzáadva 9-et, megkapjuk az eredeti pozitív egész számot. Ezzel beláttuk, hogy minden legalább háromjegyű szám előállítható a feladatban megadott módon.

Most megvizsgáljuk a 100-nál kisebb számokat. Közülük azokat a páros számokat, amelyek nem 0-ra végződnek, megkaphatjuk úgy, hogy az utolsó számjegyének a felét kivonjuk belőle, mert akkor a kapott számhoz az utolsó számjegyét hozzáadva megkapjuk az eredeti számot. Ha pedig 0-ra végződik a szám, akkor 5-öt vonunk ki, így a különbség utolsó számjegye 5 lesz.