Langyos víz

mérések	idő [s]	hőmérséklet [°C]
1.	10,5	29,9
2.	9,8	30,4
3.	10,2	31,6
átlag	10,2	30,6

A vízhozam:

$$Q_{\text{langyos}} = \frac{V}{t} = \frac{2{,}0\ \text{dm}^3}{10{,}2\ \text{s}} = 0{,}20\ \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}.$$

Jelöljük a langyos víz eredetileg forró összetevőjének tömegét $m_{\text{forró}}$-val, az eredetileg hideg összetevőjének tömegét pedig m_{hideg}-gel. A kalorimetrikus egyenlet szerint

$$c\,m_{\text{hideg}}(T_{\text{langyos}} - T_{\text{hideg}}) = c\,m_{\text{forró}}(T_{\text{forró}} - T_{\text{langyos}}),$$

ahonnan a keresett tömegarány:

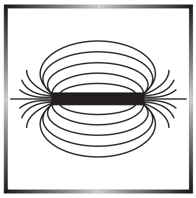
$$\frac{m_{\text{hideg}}}{m_{\text{forró}}} = \frac{T_{\text{forró}} - T_{\text{langyos}}}{T_{\text{langyos}} - T_{\text{hideg}}} = \frac{45{,}0 - 30{,}6}{30{,}6 - 23{,}4} = 2{,}0.$$

Eszerint (az adott csapállásnál) a langyos vízhozam 67%-át adta a hideg víz, 33%-át pedig a forró víz.

Jeszenői Sára (Kecskemét, Katona J. Gimn., 10. évf.)

6 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 2 megoldás. Hiányos (4 pont) 3, nem értékelhető 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5337. *Párhuzamos pályákon állandó sebességgel közlekedik két tehervonat. Ellentétes irányban haladva* 20 s *alatt, azonos irányban haladva pedig* 60 s *alatt haladnak el egymás mellett. Egy* 600 m *hosszú hídon az egyik szerelvény* 40 s *alatt, a másik* 100 s *alatt halad át.*

Határozzuk meg a szerelvények hosszát és sebességét!

(*4 pont*) Közli: *Székely György,* Budapest

Megoldás. Legyen az első szerelvény hossza ℓ_1, sebességének *nagysága* v_1, a másik szerelvény hossza ℓ_2, sebességének nagysága pedig v_2. A 600 m hosszúságú hídon áthaladva annyival több utat kell megtenniük a híd hosszánál, amekkora a saját hosszúságuk. Ha a sebességeket m/s, az időt másodperc, a távolságokat pedig méter egységekben mérjük, akkor a következők teljesülnek:

$$\ell_1 + 600 = 40\,v_1, \tag{1}$$

$$\ell_2 + 600 = 100\,v_2. \tag{2}$$

Ha a két szerelvény egymással szemben halad el, a mozdonyok elejének találkozásakor a vonatok végei $\ell_1 + \ell_2$ távolságra vannak egymástól. Ezek a „vonatvégek" $v_1 + v_2$ sebességgel közelednek egymáshoz és 20 másodperc múlva találkoznak, felírható tehát a következő összefüggés:

$$\ell_1 + \ell_2 = 20\,(v_1 + v_2). \tag{3}$$

Az (1)–(3) egyenletekből ℓ_1-et, ℓ_2-t és v_1-et kifejezhetjük v_2 segítségével:

$$v_1 = 60 - 4\,v_2, \qquad \ell_1 = 1800 - 160\,v_2 \qquad \text{és} \qquad \ell_2 = 100\,v_2 - 600. \tag{4}$$

Amikor a vonatok azonos irányban haladnak, a szerelvények találkozásakor az elöl haladó szerelvény mozdonyának eleje és a hátul haladó szerelvény vége $\ell_1 + \ell_2$ távolságra van egymástól. Ezek a pontok most $|v_1 - v_2|$ sebességgel közelednek egymáshoz és 60 másodperc múlva találkoznak. Fennáll tehát, hogy

$$\ell_1 + \ell_2 = 60\,|v_1 - v_2|. \tag{5}$$

Ha (5)-ben minden ismeretlen helyére a v_2-t tartalmazó kifejezést helyettesítjük be, a következőt kapjuk:

$$20 - v_2 = |60 - 5\,v_2|. \tag{6}$$

A továbbiakban két lehetőséget vizsgálunk. Amennyiben $60 \geqslant 5\,v_2$, vagyis $v_2 \leqslant 12$, akkor (6) szerint

$$20 - v_2 = 60 - 5\,v_2, \qquad \text{vagyis} \qquad v_2 = 10,$$

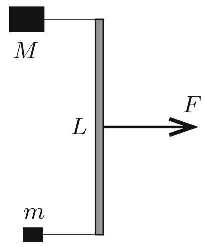
továbbá (4)-ből a $v_1 = 20$, $\ell_1 = 200$ és $\ell_2 = 400$ eredmény adódik. Ha $60 - 5v_2$ negatív, akkor (6)-ból $20 - v_2 = 5\,v_2 - 60$, vagyis $v_2 = \frac{40}{3}$ következik. Ehhez a sebességhez $\ell_1 = -\frac{1000}{3} < 0$ vonathossz tartozna, ami nyilván lehetetlen, emiatt a $60 < 5\,v_2$ lehetőséget ki kell zárnunk.

A feladat megoldása tehát az, hogy az egyik szerelvény hossza $\ell_1 = 200$ m és $v_1 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel halad, a másik tehervonat hossza $\ell_2 = 400$ m, sebessége pedig $v_2 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

104 dolgozat érkezett. Helyes 72 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 2 dolgozat.

P. 5339. *Vízszintes, súrlódásmentes felületen egy $L = 0{,}6$ m hosszúságú, elhanyolható tömegű, vékony rúd fekszik. A rúd végpontjaihoz elhanyagolható tömegű, feszes fonalakkal $m = 0{,}2$ kg és $M = 0{,}8$ kg tömegű testeket rögzítettünk. A fonalak merőlegesek a rúdra. Egy adott pillanatban a rúd középpontjára a vízszintes felülettel párhuzamos, a rúdra merőleges, $F = 8$ N nagyságú erőt fejtünk ki.*



a) Határozzuk meg a kezdőpillanatban a rúd középpontjának gyorsulását!

b) A rúd melyik pontjára kellene kifejteni ezt az F erőt, hogy a testek gyorsulása azonos legyen? Mekkora erők ébrednek ekkor a fonalakban?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Ha a rúd tömege (és így a tehetetlenségi nyomatéka is) elhanyagolható, akkor a kezdőpillanatban a rúdra ható erők eredője, és a forgatónyomatékok eredője is nulla kell hogy legyen (*1. ábra*):

$$F = F_1 + F_2, \qquad \text{illetve} \qquad F_1\frac{L}{2} = F_2\frac{L}{2},$$

ahonnan

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2} = 4\ \mathrm{N}$$

következik.

A rúd végeihez rögzített testek gyorsulása:

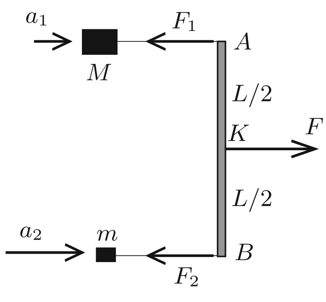
$$a_1 = \frac{F_1}{M} = \frac{4\ \mathrm{N}}{0{,}8\ \mathrm{kg}} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

illetve

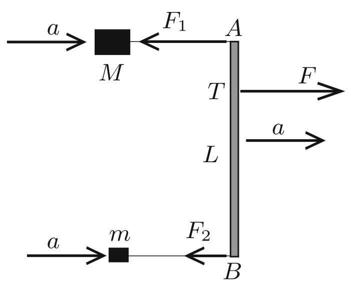
$$a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{4\ \mathrm{N}}{0{,}2\ \mathrm{kg}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A rúd K geometriai középpontjának (ami nem egyezik meg a rendszer tömegközéppontjával) a gyorsulása az a_1 és a_2 gyorsulás számtani közepe:

$$a_K = \frac{a_1 + a_2}{2} = 12{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



1. ábra



2. ábra

b) Egy alkalmasan választott T pontban ható F erő hatására a rúd nem fordul el, tehát az egész rendszer a gyorsulással mozog (*2. ábra*).

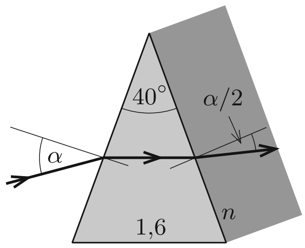
Ilyenkor
$$F_1 = Ma \qquad \text{és} \qquad F_2 = ma,$$
vagyis
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{M}{m} = 4,$$
továbbá
$$F_1 + F_2 = F = 8\ \text{N},$$
tehát
$$F_1 = 6{,}4\ \text{N} \qquad \text{és} \qquad F_2 = 1{,}6\ \text{N}.$$

A T pont helyét a forgatónyomatékok egyensúlyából kapjuk meg:
$$\frac{BT}{AT} = \frac{F_1}{F_2} = 4,$$
másrészt $AT + BT = AB = 60$ cm, ahonnan $AT = 12$ cm és $BT = 48$ cm.

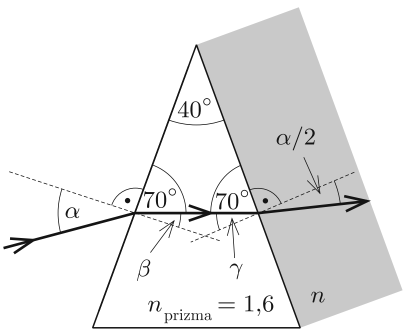
Juhász-Molnár Erik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

43 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 3 dolgozat.

P. 5344. *Egyenlő szárú háromszög keresztmetszetű prizma törőszöge* 40°, *anyagának törésmutatója* 1,6. *Mekkora* α *beesési szöggel érkezik a fénysugár az egyik oldallaphoz, ha ez a fénysugár a prizmában az alappal párhuzamosan halad tovább? Mekkora* n *törésmutatója van annak az üvegnek, amiből készült hasábot a prizma másik oldalához illesztve a törési szög az* ábra *szerint* $\alpha/2$?



(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros



Megoldás. Az *ábrán* látható jelöléseket használva (és a levegő abszolút törésmutatóját jó közelítéssel 1-nek tekintve) megállapíthatjuk, hogy $\beta = \gamma = 20°$, továbbá a törési törvény szerint
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin 20°} = 1{,}6,$$
ahonnan
$$\sin\alpha = 0{,}547, \qquad \text{tehát} \qquad \alpha = 33{,}2°.$$

A prizmából az üveghasábba lépő fényre a törési törvény így írható:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha/2)}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 16{,}6^\circ}=1{,}20=n_{\text{relatív}}=\frac{n_{\text{hasáb}}}{n_{\text{prizma}}}=\frac{n}{1{,}6},$$

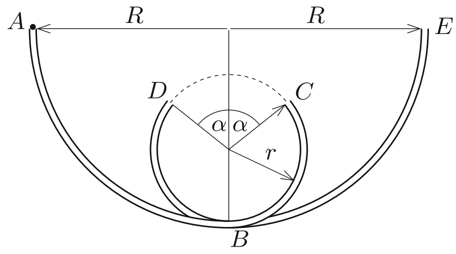
ahonnan a hasáb anyagának abszolút törésmutatója:

$$n=1{,}6\cdot 1{,}2=1{,}92.$$

Elekes Dorottya (Budapest, Fasori Evangélikus Gimn., 9. évf.)

55 dolgozat érkezett. Helyes 37 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 1 dolgozat.

P. 5345. *Vékony csőből két R sugarú negyedkört készítünk, majd egy-egy r sugarú, α szöggel „hiányos" félkörívet csatlakoztatunk hozzájuk, végül az egész elrendezést az ábrán látható módon egy függőleges síklaphoz erősítjük. Az A pontból kezdősebesség nélkül beejtünk egy kis golyót a csőbe. A golyó az AB és a BC köríven végigcsúszik, a C és a D pont között szabadon esik (ferde hajítás szerint mozog), majd a DB és BE köríven csúszik tovább.(A súrlódást és a légellenállást figyelmen kívül hagyhatjuk.)*



a) Mekkora az α szög, ha $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$?

b) Vizsgáljuk meg, hogy különböző $\frac{R}{r}$ arányoknál mekkora α szög (vagy szögek) esetében valósulhat meg a leírt mozgás!

(*6 pont*) *Romániai versenyfeladat nyomán*

Megoldás. Határozzuk meg, hogy egy adott α szögnél mekkora v sebességgel kell rendelkezzen a golyó a C pontban, hogy éppen eljusson a D pontig. (Ha ez megtörténik, akkor – az elrendezés szimmetriája miatt – a D pontbeli sebességének iránya is megfelelő lesz.) A v sebesség ismeretében – az energiamegmaradás törvényét alkalmazva – meg tudjuk mondani, hogy milyen magasról indult a kis golyó, vagyis hogy mekkora az R sugár nagysága. (Ha gondolatban megnöveljük a v sebességet, akkor a golyó túl fog repülni a D ponton, ha pedig csökkentjük, akkor nem fog elrepülni odáig, tehát az α szögből *egyértelműen* meg tudjuk mondani a v sebességet, majd abból a mozgás kezdőpontjának magasságát.)

Legyen a C és D pont közötti ferde hajítás mozgásának időtartama t. A vízszintes irányú elmozdulásra

(1) $$2r\sin\alpha=v\cos\alpha\cdot t,$$

a függőleges irányú mozgásra pedig

(2) $$\frac{gt}{2}=v\sin\alpha$$

teljesül. Az (1) és (2) egyenlet szorzatából

$$gtr\sin\alpha = v^2 t\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

adódik. Mivel a tényleges ferde hajításnál $t\neq 0$ és $\alpha\neq 0$, $t\sin\alpha$-val egyszerűsíthetünk:

$$v^2=\frac{rg}{\cos\alpha}, \tag{3}$$

ami – az energiamegmaradás törvénye szerint – annyit jelent, hogy az A és C pontok magasságának különbsége

$$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{r}{2\cos\alpha}.$$

Másrészt igaz, hogy

$$R=r+r\cos\alpha+h,$$

tehát

$$\frac{R}{r}-1=\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}. \tag{4}$$

Szorozzuk meg (4)-et $\sqrt{2}$-vel, és vezessük be az

$$x=\sqrt{2}\left(\frac{R}{r}-1\right),\qquad \text{illetve}\qquad b=\sqrt{2}\,\cos\alpha$$

jelöléseket. Ezekkel

$$x=b+\frac{1}{b},$$

vagyis

$$b^2-xb+1=0, \tag{5}$$

aminek megoldása:

$$b_{1,2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}. \tag{6}$$

Látjuk, hogy a feladatnak csak $x\geqslant 2$, vagyis $\frac{R}{r}\geqslant 1+\sqrt{2}$ esetén lehet fizikailag reális megoldása.

a) Ha $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$, akkor $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$, tehát

$$b_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2\sqrt{2}},$$

vagyis

$$\cos\alpha_1=1\qquad\text{és}\qquad\cos\alpha_2=\frac{1}{2},$$

és ennek megfelelően

$$\alpha_1 = 0^\circ, \qquad \text{illetve} \qquad \alpha_2 = 60^\circ.$$

Az első „megoldás” nem felel meg tényleges hajításnak, azt elvethetjük.

b) Legyen most $\frac{R}{r}$ tetszőleges, és vizsgáljuk meg a leírt mozgásnak megfelelő α szög lehetséges értékeinek számát.

(*i*) A (6) összefüggés azt mutatja, hogy $\frac{R}{r} < 1+\sqrt{2}$ esetén α egyetlen értéke sem megfelelő, vagyis a feladatnak *nincs* megoldása.

(*ii*) Amennyiben $\frac{R}{r} \geqslant 1+\sqrt{2}$, a feladatnak *lehet* megoldása, esetleg *több* is. A legkisebb, valós megoldásra vezető $x=2$ értéknél, vagyis a szóba jöhető legkisebb R/r aránynál (6) szerint

$$b_1 = b_2 = 1, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha = 45^\circ.$$

Ezek szerint $\frac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$ esetén *egyetlen* α szögnél valósulhat meg a leírt mozgás.

(*iii*) Ha $\frac{R}{r} > 1+\sqrt{2}$, akkor (6)-nak két különböző megoldása van. Ezek csak akkor felelnek meg fizikailag értelmezhető α szögeknek, ha $\cos\alpha \leqslant 1$, vagyis $b \leqslant \sqrt{2}$. Ez a másodfokú egyenlet kisebbik gyökére biztosan teljesül, hiszen (a gyökök és az együtthatók összefüggése szerint) $b_1 b_2 = 1$, azaz a kisebbik gyök nem lehet nagyobb 1-nél. A feladatnak ebben az R/r tartományban *legalább egy* megoldása van.

Két különböző α szöget akkor kapunk, ha (6) nagyobbik gyöke $\sqrt{2}$-nél kisebb:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} < \sqrt{2},$$

vagyis

$$\sqrt{x^2-4} < 2\sqrt{2} - x, \qquad \text{azaz} \qquad x^2 - 4 < \left(2\sqrt{2} - x\right)^2 = x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8.$$

Ez

$$x < \frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{R}{r} < \frac{5}{2}$$

esetén teljesül.

Ha tehát $1+\sqrt{2} < \frac{R}{r} < \frac{5}{2}$, akkor két különböző, $\frac{R}{r} \geqslant \frac{5}{2}$ esetben pedig csak egy megoldásunk van.

Fey Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

53 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 2 dolgozat.