

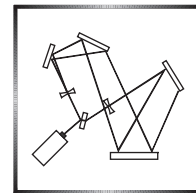
mely folyamatosan fiatalon tart. A pedagógus előmeneteli rendszer és bérezés megismeréséhez érdemes áttekinteni a „pedagógus életpályamodell”-t!

• **Hallgatói élet**

A Klebelsberg Képzési Ösztöndíj Program keretében egyetemistaként félévente akár 375 000 Ft-ot lehet kapni, mely több különféle ösztöndíjjal is kiegészíthető. Fontos megemlíteni, hogy lehetőség van oktatással kapcsolatos kutatásokba való becsatlakozásra és doktori tanulmányok folytatására a Fizika Tanítása Doktori Program keretében. Tanárszakos hallgatók előmenetelét mentorok segítik.

A képzések részleteiről az intézet honlapján (<https://physics.elte.hu>) lehet további információkat szerezni, vagy érdemes ellátogatni nyílt napunkra (<https://ttk.elte.hu/nyiltnap2022>).

A kúpingáról*

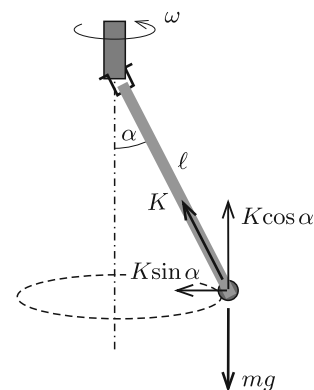


Egy ℓ hosszúságú, könnyű (elhanyagolható tömegű), vékony (de merev) pálca egyik végére egy m tömegű, kicsiny testet erősítünk. A pálca másik végét vízszintes tengellyel látjuk el. Ily módon egy matematikai ingának tekinthető rendszert kapunk, amelynek a pálca függőleges állásánál van stabil egyensúlyi helyzete, innen kicsit kimozdítva

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

lengésidejű harmonikus rezgőmozgást végezhet.

Vajon mi történik, ha a pálca felső végénél lévő vízszintes tengelyt – egy függőleges rúd és egy kenőgolyó segítségével – adott ω szögsebességgel egyenletesen forgatjuk (1. ábra)? Az inga – ω nagyságától függő mértékben – valamekkora szögben kitérül, és (állandósult állapotban) a pálca egy kúp palástja mentén mozog. Emiatt ezt az elrendezést *kúpingának* is szokták nevezni.



1. ábra

Vizsgáljuk meg a kúpinga mozgását, és határozzuk meg, hogy miként függ a pálca kitérülésének α szöge az ω szögsebességtől! Az ingatestre két erő hat: az mg nehézségi erő, és a pálca által kifejtett, a pálcával megegyező irányú K erő.

Megjegyzés. Egy pálca (rúd) általában nem csak pálca irányú erőt képes kifejteni. (Például egy vízszintes helyzetű mérleghinta ki tudja egyensúlyozni a végén ülő gyereke

* A cikk megtalálható honlapunkon, a fizika cikkek „Ami a tankönyvekből kimaradt, de a versenyzőknek hasznos lehet” részében:

<https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml>.

ható nehézségi erőt.) Esetünkben a pálca végeinél ható erőknek azért kell a pálca irányába mutatnia, mert a pálca tömege elhanyagolható, tehát a pálca fonálként „viselkedik”.

Az erők függőleges komponensei kiegyenlítik egymást, a K erő vízszintes összetevője biztosítja a centripetális gyorsulást. Ez egyenletekben kifejezve:

$$(1) \quad K \cos \alpha = mg,$$

$$(2) \quad K \sin \alpha = m\omega^2 r.$$

A körpálya sugarát a pálca hosszával és az α szöggel kifejezve $r = \ell \sin \alpha$. Ezt írjuk be a (2) egyenletbe, így az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$K \cos \alpha = mg,$$

$$K \sin \alpha = m\omega^2 \ell \sin \alpha.$$

Az egyenletrendszernek az egyik nyilvánvaló (triviális) megoldása: $\alpha = 0$, a másik megoldás:

$$\cos \alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}.$$

Az első megoldás azt jelenti, hogy ha forgatni kezdjük az inga tengelyét, akkor az mindig lehetséges, hogy az inga mindvégig függőleges helyzetben lóg. A másik megoldás csak akkor lehetséges, ha $\cos \alpha = \frac{g}{\ell\omega^2} < 1$. Ez akkor nem teljesül, ha az ω szögsebesség viszonylag alacsony. Ha a forgás szögsebessége $\omega < \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, az inga mindenképpen függőlegesen fog lógni. (A szögsebesség küszöbértéke éppen a forgatás nélküli matematikai inga lengésidejéhez tartozó $2\pi/T$ „szögsebesség”).

Ha az inga szögsebessége a küszöbérték fölé növekszik, az inga forgása az

$$\alpha = \arccos \frac{g}{\ell\omega^2}$$

szög mellett lesz stabil, az $\alpha = 0$ -nak megfelelő megoldás pedig – mint látni fogjuk – instabillá válik.

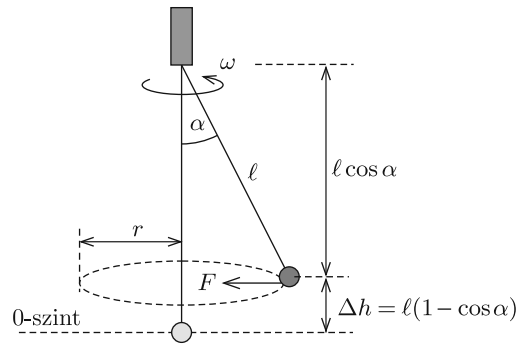
A stabilitás vizsgálata

A pálcával együtt forgó koordináta-rendszerből nézve az inga nehezéke mozdatlan, egyensúlyi állapotban van. Azt, hogy az egyensúly stabil vagy instabil, a potenciális energiát megadó függvény vizsgálatával dönthetjük el. A stabil egyensúly a *minimális* helyzeti energiájú helyzetben valósul meg, az instabil helyzetre pedig az energia lokális maximuma jellemző.

Az ingatest megemelkedése miatt a nehézségi erőből származó helyzeti energiája (ha ennek a 0-szintjét az inga függőleges helyzetéhez választjuk – lásd a 2. ábrát):

$$E_1 = mg\ell(1 - \cos \alpha).$$

Az inga forgásából is származik egyfajta „helyzeti” energia. Ennek feltérképezéséhez vizsgáljuk meg, mennyi munkát kell végeznünk, ha a már forgásban lévő ingát a függőleges helyzetből lassan az α szöggel jellemzett helyzetbe hozzuk.



2. ábra

Ahhoz, hogy a tengelytől r távolságban (a forgó rendszerből nézve) egyensúlyban tartsuk az ingatestet, állandó

$$F(r) = m\omega^2 r$$

erővel kell a tengely felé húznunk. Ez az erő az r távolsággal egyenesen arányos, iránya pedig ellentétes az elmozdulás irányával. Az általunk végzett munka az átlagos erő és az elmozdulás szorzata:

$$W = -F_{\text{átlagos}} \cdot r = -\frac{m\omega^2 r + 0}{2} \cdot r = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha.$$

(A negatív előjel arra utal, hogy az F erő ellentétes irányú az r elmozdulással.)

Ahhoz, hogy visszahúzzuk az ingatestet a tengelyhez, $+\frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha$ munkát kell végeznünk. (Ha óvatosan elengedjük az ingatestet, ugyanekkora munkát nyerhetünk vissza, amíg r távolságra jut az ingatest a tengelytől.) Elmondhatjuk tehát, hogy az ingatestnek a tengelytől r távolságban a forgás következtében

$$E_2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha$$

helyzeti energiája van.

Az ingatest függőleges és vízszintes helyzetéből fakadó potenciális energiájának összege:

$$E(\alpha) = E_1 + E_2 = W = mg\ell(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha,$$

amit a $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ azonosság felhasználásával így is felírhatunk:

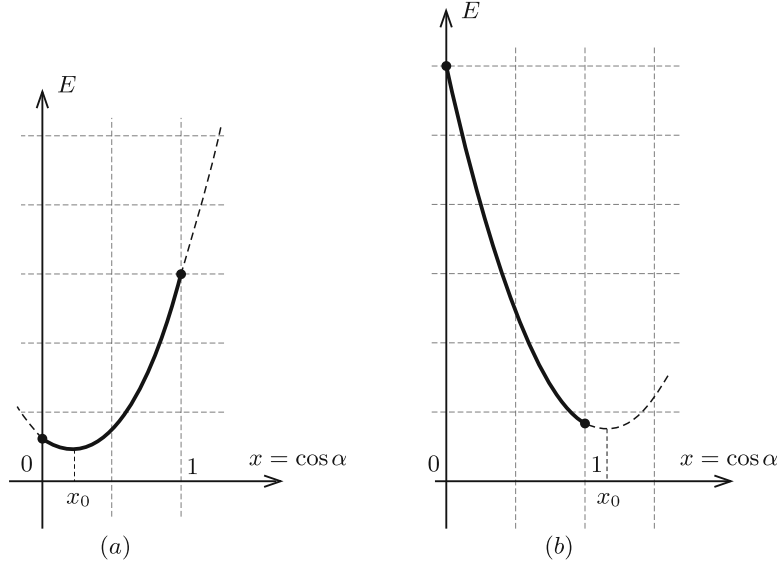
$$E(\alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \cos^2 \alpha - mg\ell \cos \alpha + mg\ell - \frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2.$$

Ez a kifejezés $x \equiv \cos \alpha$ -ra másodfokú: $E(x) = ax^2 + bx + c$ alakú, és fontos szem előtt tartanunk, hogy a függvény csak a $(0; 1]$ intervallumon van értelmezve, hiszen egy $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ szög koszinusza ebbe a tartományba eshet. A függvény képe

egy pozitív irányba eltolt parabola íve. Ezért a másodfokú függvény minimuma vagy az

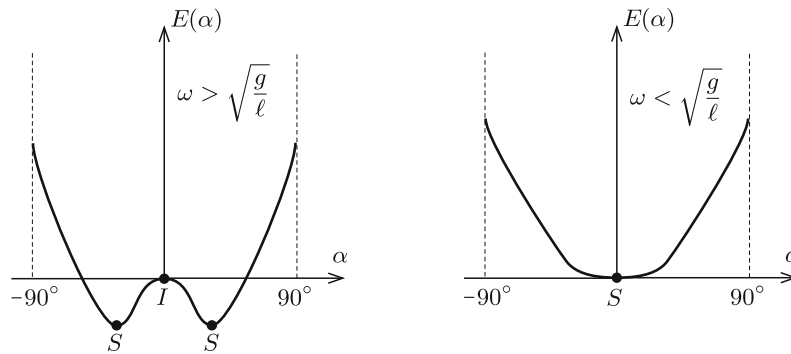
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-mg\ell}{2 \cdot \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2} = \frac{g}{\ell\omega^2}$$

értéknél, vagy pedig, ha ez az érték kiesik az értelmezési tartományból, akkor az értelmezési tartomány határánál ($x = 1$) van.



3. ábra

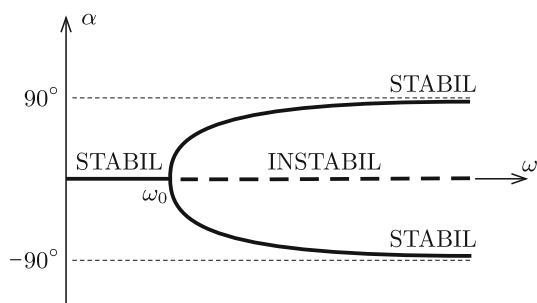
Ha $x_0 \leq 1$, vagyis az értelmezési tartományon belül van (3a. ábra), létezik olyan α_0 szög, amelyre $x_0 = \cos \alpha_0 = \frac{g}{\ell\omega^2}$. Itt tehát *stabil* egyensúlyt (S) találunk. $x = 1$ -nél ($\alpha = 0$ -nál), ami pedig energiamaximum, *instabil* (I) egyensúly van. Ha $x_0 > 1$, akkor a másodfokú kifejezést ábrázoló parabola csúcsa az értelmezési tartományon kívülre esik (3b. ábra), ezért $E(x)$ minimuma $x = 1$ -hez kerül, tehát ez válik stabil egyensúlyiá.



4. ábra

A fent leírtak jól látszanak, ha az energiát közvetlenül az α szög függvényében ábrázoljuk (4. ábra).

Ábrázoljuk az inga egyensúlyi helyzeteit jellemző α szöget az ω szögsebesség függvényében! Egy koszinuszértékhez két szög tartozik, melyek egymás ellentettjei (5. ábra).



5. ábra

Látható, hogy egy darabig csak a függőleges helyzet stabil, majd egy ω_0 értéknél ez a helyzet instabillá válik, és megjelenik két másik stabil egyensúlyi helyzet. A stabil állapot hirtelen kétszereződését, két ágra szakadását *bifurkációnak* nevezik.

Megjegyzések. 1. Érdekes, hogy a bifurkáció kezdőpontjában, vagyis az ω_0 értéknél a függvény gráfiájának meredeksége végtelen, vagyis az érintő „függőleges”.

2. A stabilitás vizsgálatát dinamikailag is el lehet végezni, ami a jelen esetben sokkal egyszerűbb, mint az energetikai vizsgálat, de ennek a cikknek az egyik célja az volt, hogy bemutassa az energetikai megfontolás lehetőségét.

3. A cikkben leírtakhoz hasonló problémával foglalkozik a 2021–2022-es tanévi fizika OKTV 1. fordulóján az I. kategória 1. feladata is.

Baranyai Klára
Veresegyház

Mérési feladatok megoldása



M. 403. A kereskedelemben kapható néhány szemcsés anyag esetében (pl.: lencse, rizs, tarhonya stb.) méréssel határozzuk meg, hogy tárolási térfogatuk hány százalékéa levegő!

(6 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest