

Feladatok mindenkinek

C. 1699. Határozzuk meg, hogy az $(x+1) \cdot (x^2+1) \cdot (x^3+1) \cdot \dots \cdot (x^{12}+1)$ szorzatban szereplő műveleteket elvégezve, összevonás után mennyi az x^{14} hatvány együtthatója.

C. 1700. Az O középpontú körnek az O -tól különböző belső pontja A . A kör területének egy B pontjára $\angle OAB = \alpha$. Legyen C a körvonal egy olyan pontja, amelyre $\angle BAC = \beta$ jelöléssel $2\alpha + \beta = 180^\circ$ teljesül és a $\angle BAO$ és $\angle BAC$ szögtartományoknak az AB félegyenesen kívül nincs közös pontja. Igazoljuk, hogy ekkor az O, A, B, C pontok egy körön vannak.

C. 1701. Mennyi azon x egész számok összege, amelyekre

$$\sqrt{2x^2 - 6x - 20} < -x + 5$$

teljesül?

Feladatok 11. évfolyamtól

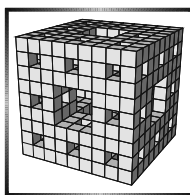
C. 1702. Az $ABCD$ négyszög A csúcsa illeszkedik az S síkra, BD átlója párhuzamos a síkkal, C csúcsa 8 egység távolságra van az S síktól. Azt tapasztaljuk, hogy a négyszög S -re vonatkozó merőleges vetülete egy négyzet, melynek átlója 6 egység. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög rombusz, valamint számítsuk ki az oldalainak hosszát.

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

C. 1703. Az a és b 10-es számrendszerbeli természetes számok, mindegyik számjegyük 1-es. Mutassuk meg, hogy ha a és b nem relatív prímek, akkor számjegyeik $S(a)$ és $S(b)$ összege sem az.

Beküldési határidő: 2022. február 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5214–5221.)

B. 5214. A 110 egy olyan számjegysorozat, amelyet bármilyen 1-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve páros számot kapunk. Van-e olyan 1-esekből és 0-kból álló számjegysorozat, amelyet bármilyen 1-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve 3-mal osztható pozitív egész számot kapunk?

(3 pont)

B. 5215. Adjuk meg az összes x pozitív valós számot, amelyre $x + \frac{1}{x}$ egész szám és $x^3 + \frac{1}{x^3}$ prímszám.

(4 pont)

Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett és Szaszkó-Bogár Viktor ötlete alapján

B. 5216. Az ABC derékszögű háromszög köré írt körhöz az A pontban és a derékszögű C csúcsban érintőt rajzolunk, az érintők metszéspontja D . Bizonyítsuk be, hogy a BD egyenes felezi a C -ből induló magasságot.

(3 pont)

B. 5217. Egy háromszög súlyvonalainak $\frac{2}{\sqrt{3}}$ -szorosából mint oldalakból újabb háromszöget szerkesztünk. Az eljárást megismételjük a kapott háromszögre. Mutassuk meg, hogy a második lépésben az eredetivel egybevágó háromszöget kapunk.

(4 pont)

Javasolta: Bártfai Pál (Budapest)

B. 5218. Legfeljebb hány választható ki az első 2022 pozitív egész szám közül úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prímszám?

(5 pont)

B. 5219. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós számokra

$$\frac{|a + b + c|}{1 + |a + b + c|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} + \frac{|c|}{1 + |c|}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(5 pont)

Javasolta: Schultz János (Szeged)

B. 5220. Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy megadható 1-től 2^{n+2} -ig n négyzetszám úgy, hogy közülük akárhány különbözőt összeadva (beleértve az egytagú összegeket és az összes szám összegét is) csupa különböző számot kapjunk.*

(6 pont)

Javasolta: Freud Róbert (Budapest)

B. 5221. Az ABC hegyesszögű háromszögben a beírt kör érintési pontja a BC , CA , AB oldalon rendre D , E , illetve F . A háromszög köré írt kör az AEF kört az A -tól különböző P , a BFD kört a B -től különböző Q , a CDE kört pedig a C -től különböző R pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a DP , EQ és FR egyenesek egy ponton mennek át.

(6 pont)

Javasolta: Lovas Márton (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. február 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

* Lásd Freud Róbert cikkét a 2. oldalon.