Ha két csúcs egy adott oldalra esik, a harmadik csúcs egy másikra, akkor a lehetőségek száma $\binom{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$. A két oldalt $3\cdot 2=6$-féleképpen választhatjuk ki, az ilyen háromszögek száma tehát $6\cdot 50=300$.

A tizenöt pont összesen 425 háromszöget határoz meg.

b) A nagy háromszög átfogója $10\sqrt{5}$. Az ábrán a derékszögű háromszögek mind hasonlók, mert szögeik egyenlők. Az oldalarányok egyenlőségét több lépésben egymás után alkalmazva:

$$\frac{A_1B_1}{A_1B}=\frac{A_1B}{10}=\frac{20}{10\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ebből előbb $A_1B=\frac{20}{\sqrt{5}}$, majd $A_1B_1=\frac{400}{50}=8$. Hasonlóan:

$$\frac{A_2B_2}{A_2B_1}=\frac{A_2B_1}{A_1B_1}=\frac{A_2B_1}{8}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $A_2B_1=\frac{16}{\sqrt{5}}$, és így $A_2B_2=\frac{16^2}{5\cdot 8}=6{,}4$. Végül

$$\frac{A_3B_3}{A_3B_2}=\frac{A_bB_2}{A_2B_2}=\frac{A_3B_2}{6{,}4}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $A_3B_2=\frac{12{,}8}{\sqrt{5}}$, és így $A_3B_3=\frac{163{,}84}{5}:6{,}4=5{,}12$ egység.

c) Az A_1BB_1 háromszög területe $\frac{8\cdot 4}{2}=16$ egység. A területek mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa a háromszögek hasonlóságának négyzete:

$$q=\left(\frac{A_2B_2}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{6{,}4}{8}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

A mértani sor összegképletébe behelyettesítve a háromszögek együttes területe

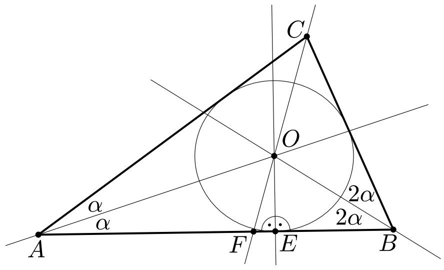
$$16\cdot\frac{1}{1-\frac{16}{25}}=16\cdot\frac{25}{9}=\frac{400}{9}=44{,}4 \text{ területegység.}$$

Deák Anna
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 5194. *Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle=2CAB\sphericalangle$. Az AB oldal a beírt kört az E pontban érinti, a C-ből induló szögfelezőt az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AF=2BE$.*

(*4 pont*)



1. ábra

I. megoldás. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja O, sugara $(OE=)r$ és $CAB\sphericalangle = 2\alpha$, ekkor $OAB\sphericalangle = \alpha$, mert az AO egyenes szögfelező (*1. ábra*). A $CBA\sphericalangle = 4\alpha$ a feladat feltétele miatt, és $ACB\sphericalangle = 180° - 6\alpha$, $FCB\sphericalangle = 90° - 3\alpha$, mert a CO egyenes szögfelező.

Mivel $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$, ezért $AC > BC$, így C az OE egyenes B pont felőli oldalán van, emiatt F az AE szakaszon van. Az FBC háromszögben a szögek összege 180°, ezért $OFE\sphericalangle = 90° - \alpha$ és így $FOE\sphericalangle = \alpha$. Az OEB háromszög derékszögű, ezért $EOB\sphericalangle = 90° - 2\alpha$, amelyhez α-t adva megkapjuk, hogy $FOB\sphericalangle = 90° - \alpha$, így az FBO háromszög egyenlő szárú, tehát $BO = BF$.

Az AOE háromszög hasonló az OFE háromszöghöz, hiszen derékszögűek és van α nagyságú belső szögük, ezért a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő, így felírható a következő egyenlőség:

$$\frac{EF}{r} = \frac{r}{AE},$$

ami ekvivalens az $EF \cdot AE = r^2$ egyenlettel. Mivel $AE = AF + FE$, így

$$EF \cdot (AF + FE) = r^2.$$

Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az OEB háromszögre: $r^2 + BE^2 = BO^2$. Ekkor $BO = BF$ miatt $r^2 + BE^2 = BF^2$, majd az előzőekben kapott kifejezésben r^2 helyére helyettesítve a következőt kapjuk:

$$EF \cdot (AF + FE) + BE^2 = BF^2.$$

Felhasználjuk, hogy $BF = BE + EF$, így az

$$EF \cdot (AF + FE) + BE^2 = (BE + EF)^2$$

egyenlethez jutunk. Felbontjuk a zárójeleket:

$$EF^2 + EF \cdot AF + BE^2 = BE^2 + 2 \cdot EF \cdot BE + EF^2,$$

majd ekvivalens átalakítások után az

$$AF = 2 \cdot BE$$

egyenletet kapjuk, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Koltai Csaba Ferenc (Budapest XIV. kerületi Szent István Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen a beírt kör középpontja O, sugara r, és $OAB\sphericalangle = \alpha$ (lásd az 1. ábrát). Mivel O a szögfelezők metszéspontja, ezért $OAC\sphericalangle = = OAB\sphericalangle = \alpha$. A feladat szövege alapján

$$OBA\sphericalangle = OBC\sphericalangle = 2\alpha, \quad \text{így} \quad ACO\sphericalangle = BCO\sphericalangle = 90^\circ - 3\alpha.$$

Mivel $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$, ezért $AC > BC$, így C az OE egyenes B felőli oldalán van, emiatt pedig F az AE szakaszon van.

$$CFB\sphericalangle = 180^\circ - FCB\sphericalangle - CBF\sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - 3\alpha) - 4\alpha = 90^\circ - \alpha,$$

innen

$$FOE\sphericalangle = 180^\circ - OEF\sphericalangle - OFE\sphericalangle = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

Továbbá $BAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 6\alpha < 180^\circ$, ebből következően $0^\circ < \alpha < 30^\circ$, tehát $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{tg}2\alpha$ is értelmezve van, valamint $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, $\operatorname{tg}2\alpha \neq 0$. Nyilvánvalóan $\operatorname{tg}\alpha \neq 1$, ezért $1 - \operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$.

A BEO háromszögben $BE = \frac{r}{\operatorname{tg}2\alpha}$, az AEO háromszögben $AE = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}$, az FEO háromszögben pedig $FE = r \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Ezeket felhasználva felírjuk a szóban forgó szakaszhosszak arányát, ekvivalens átalakításokat végzünk, és alkalmazzuk a kétszeres szög tangensére vonatkozó addíciós tételt:

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AE - FE}{BE} = \frac{\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} - r \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\frac{r}{\operatorname{tg}2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2.$$

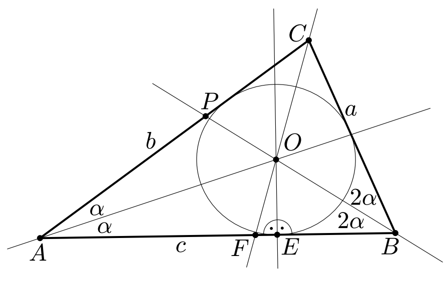
Következésképpen $AF = 2BE$, ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Fekete Richárd (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Készítsünk ábrát, és használjuk a *2. ábra* jelöléseit.

A szögfelezőtétel szerint $\frac{c-AF}{AF} = \frac{a}{b}$, mindkét oldalhoz 1-et adva: $\frac{c}{AF} = \frac{a+b}{b}$, amiből $AF = \frac{bc}{a+b}$. Tudjuk azt is, hogy $BE = s - b$, ahol s a háromszög félkerülete. Ekkor a bizonyítandó állítást a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{bc}{a+b} = 2(s-b).$$



2. ábra

A zárójel felbontása és $2s = a + b + c$ felhasználása után kapjuk, hogy

$$\frac{bc}{a+b} = 2s - 2b = a + c - b,$$

amiből ekvivalens átalakításokkal a

$$bc = (a+b)(a+c-b), \quad \text{majd a} \quad bc = a^2 - b^2 + ac + bc$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet mindkét oldalából bc-t kivonunk, majd kifejezzük b^2-t: $b^2 = a^2 + ac$.

Legyen a P pont a B csúcson átmenő belső szögfelező és az AC oldal metszéspontja. Mivel a BPC és az ACB háromszögek egyik belső szöge közös, egy másikról pedig tudjuk, hogy 2α nagyságú, hiszen BP szögfelező és a feltétel szerint $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$, ezért ezek a háromszögek hasonlók, így a megfelelő oldalhosszak arányára felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{PB} = \frac{CB}{PC}.$$

Ebből az is következik, hogy:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB+CB}{PB+PC}.$$

Az ABP háromszög egyenlő szárú, mert az A-nál és B-nél lévő szögek egyenlőek. Így $AP = PB$, vagyis $PB + PC = b$, ezért az előbbi kifejezést átalakíthatjuk az alábbiak szerint:

$$\frac{b}{a} = \frac{c+a}{b},$$

amely a $b^2 = a^2 + ac$ alakra hozható, erről pedig az imént beláttuk, hogy ekvivalens a feladat állításával, így a bizonyítás végére értünk.

Szakács Domonkos (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 9. évf.)

Összesen 80 dolgozat érkezett. 4 pontos 66, 3 pontos 7, 2 pontos 1 dolgozat. 1 pontot 4 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (714–718.)

K. 714. Egy sorozat első tagja 3, és a következő tagot mindig úgy képezzük, hogy az előző tag kétszereséből kivonunk 2-t.

a) Írjuk fel a sorozat első 8 tagját.