Egy szabályos dobókockával háromszor egymás után dobunk.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak számtani vagy mértani közepe lesz. (*6 pont*)

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok között van 6-os, feltéve, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak a számtani vagy mértani közepe. (*3 pont*)

8. *a*) Az $y=\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2$ egyenletű görbe és az x-tengely által határolt zárt tartományt két részre osztja az $y=\frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Határozzuk meg a két rész területének arányát. (*8 pont*)

b) Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben $A(0;0)$, $B(3;0)$ és $C(3;4)$. A háromszöget megforgatjuk a leghosszabb oldala körül. Határozzuk meg az így kapott forgástest felszínét és térfogatát. (*8 pont*)

9. Egy építőipari vállalkozónak a legutóbbi építkezés után megmaradt 200 kg cementje, és úgy döntött, hogy egyenlő tömegű részekre osztva értékesíti.

A kereskedelemben szokásos módon nagyobb kiszerelésű csomag esetén alacsonyabb a cement kilogrammonkénti ára (egységára): ha egy csomag cement tömege m kg, akkor $\left(40-\frac{m}{10}\right)$ pengős egységáron kínálja eladásra. A cement becsomagolásának is van költsége, mégpedig m kg-os csomag esetén $\left(25+\frac{m}{10}\right)$ pengő csomagonként.

a) Határozzuk meg, hogy mekkora lesz a vállalkozónak az eladásából (a csomagolás költségének levonása után) származó bevétele, ha a cementet 10 egyenlő tömegű részre osztva értékesíti. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg, hány egyenlő tömegű részre kell osztani a cementet ahhoz, hogy – azt a tervek szerint értékesítve – az eladásból származó (a csomagolási költségek levonása utáni) bevétel maximális legyen. (*11 pont*)

Koncz Levente
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/12. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Felírjuk az* 1*;* 2*;* 3*;* 4*;* 5 *számjegyek sorbarendezésével képezhető összes ötjegyű számot.*

a) *Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?* (6 pont)

b) *Hány olyan számtani sorozat létezik, melynek első tagja* 12 345*, szerepel benne az* 54 321 *is, és a differenciája pozitív egész szám?* (6 pont)

Megoldás. *a*) Egy kiválasztott számjegy az egyesek helyén $4! = 24$-szer fordul elő, mert a többi számjegyet ennyiféle sorrendben írhatjuk mellé. Az egyesek helyén álló számok összege ezért $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360$.

Ugyanez érvényes a többi helyiértékre. Az összeg tehát $11\,111 \cdot 360 = 3\,999\,960$.

b) $12\,345 + (n-1)d = 54\,321 \Rightarrow (n-1)d = 41\,976 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 53$. Osztóinak száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$, a differencia s vele a sorozat tehát 48-féle lehet. (Mivel minden d-hez van megfelelő n és így megfelelő sorozat is.)

2. *Egy sorsjegy ára* 1000 Ft. *A sorsjegy lehetséges nyereményei:* 2 000 Ft, 5 000 Ft, 20 000 Ft, 100 000 Ft, 500 000 Ft.

Ezek valószínűsége rendre: 11%, 5%, 0,81%, 0,17%, 0,02%.

a) *Mennyi a nyeremény várható értéke?* (*3 pont*)

b) *Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyerünk, ha egy sorsjegyet vásárolunk?* (*2 pont*)

Tíz alkalommal veszünk egy-egy sorsjegyet. Mekkora a valószínűsége, hogy

c) *legalább kétszer nyerünk;* (*5 pont*)

d) *pontosan háromszor nyerünk?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*)

$$0{,}11 \cdot 2000 + 0{,}05 \cdot 5000 + 0{,}0081 \cdot 20\,000 + 0{,}0017 \cdot 100\,000 + 0{,}0002 \cdot 500\,000 = 902.$$

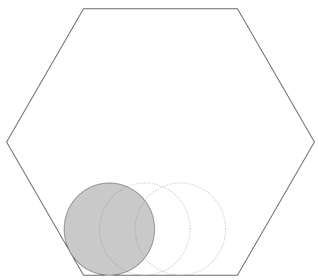
A nyeremény várható értéke 902 Ft.

b) $1 - (0{,}11 + 0{,}05 + 0{,}0081 + 0{,}0017 + 0{,}0002) = 0{,}83$.

c) Vonjuk ki 1-ből annak a valószínűségét, hogy egyszer sem nyerünk, illetve pontosan 1-szer nyerünk: $1 - 0{,}83^{10} - 10 \cdot 0{,}83^9 \cdot 0{,}17 = 0{,}527$.

d) $\binom{10}{3} \cdot 0{,}83^7 \cdot 0{,}17^3 = 0{,}16$.

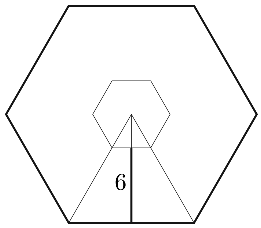
3. *Egy* 10 cm *oldalú, szabályos hatszög alakú fehér tálca pereme mellett végiggörgetünk egy* 6 cm *átmérőjű, alul festékes korongot. Mekkora az ilyen módon beszínezett terület? A választ* mm^2 *pontossággal adjuk meg.* (*12 pont*)

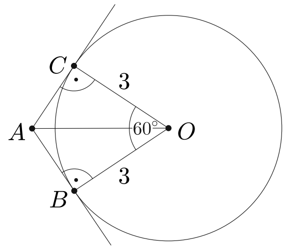


Megoldás. A tálca területéből kivonjuk a fehéren maradó belső kis hatszög és a sarokrészek területét. A nagy hatszög középponti háromszögének magassága $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm. A hatszög területe $6 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 259{,}8\ \mathrm{cm}^2$.

A kis hatszög középponti háromszögének magassága $8{,}66 - 6 = 2{,}66$ cm. A hatszög területe:

$$\left(\frac{2,66}{8,66}\right)^2 \cdot 259{,}8 = 24{,}51\ \mathrm{cm}^2.$$





A sarkon kimaradó íves „háromszög” területét megkapjuk, ha a 60° középponti szögű, 3 cm sugarú körcikk területét ($3^2\pi/6 = 4{,}71$ cm^2) kivonjuk az $ABCD$ négyszög területéből (5,196 cm^2). A hat kis sarokrész együttes területe

$$6 \cdot (5{,}196 - 4{,}71) = 2{,}92 \text{ cm}^2.$$

A befestett terület $259{,}8 - 24{,}51 - 2{,}92 = 232{,}37$ cm$^2 = 23\,237$ mm^2.

4. *a) Adjuk meg az* $x = \dfrac{y^2}{8} + 3$ *egyenletű parabolához a* $P(0;-1)$ *pontból húzható érintők egyenletét.* (*8 pont*)

b) Határozzuk meg azokat a valós x *értékeket, melyekben az* $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ *függvény grafikonjának érintője párhuzamos az* x*-tengellyel.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az érintő egyenlete $y = mx - 1$. Az érintő és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszernek pontosan egy megoldást kell adnia. y-t behelyettesítve a parabola egyenletébe az $m^2x^2 - (2m+8)x + 25 = 0$ paraméteres másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek akkor van pontosan egy gyöke, ha

(1) $m = 0$. Ez nem megoldás, mert a parabola tengelyével párhuzamos egyenest jelent, ami nem érintő.

(2) az egyenlet diszkriminánsa 0, vagyis $-96m^2 + 32m + 64 = 0$. Ezt megoldva $m = 1$, illetve $m = -2/3$ adódik. Az érintők egyenlete: $y = x - 1$, illetve $y = -2/3x - 1$.

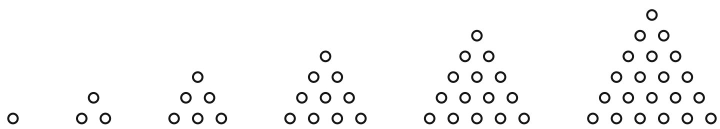
b) Azon x értékeket keressük, melyekre a derivált értéke 0:

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

$\sin x = 0$, ebből $x = k \cdot \pi$, vagy $\cos x = 1/2$, ebből $x = \pm\pi/2 + 2l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

II. rész

5. *A pitagoreusok azokat a természetes számokat nevezték háromszögszámnak, amely számú kavicsot az* ábrán *látható módon háromszög alakba lehet rendezni.*

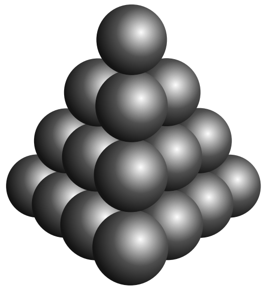


Az első hat háromszögszám: 1, 3, 6, 10, 15, 21.

a) Számítsuk ki a kilencedik és a századik háromszögszámot. *(2 pont)*

b) Bizonyítsuk be, hogy az első n háromszögszám összege $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. *(6 pont)*

c) A golyós piramis nevű térbeli logikai játék elemeiből ezt a tetraéderszerű építményt kell összeállítani. Milyen magas az építmény, ha a golyók átmérője 2 cm*? (A megoldást* cm*-ben egy tizedes jegy pontossággal adjuk meg.)* *(8 pont)*



Megoldás. *a*) Az n-edik háromszögszám $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. A kilencedik tehát $\frac{9\cdot 10}{2}=45$, a századik pedig $\frac{100\cdot 101}{2}=5050$.

b) Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n=1$-re az állítás igaz, mert $\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

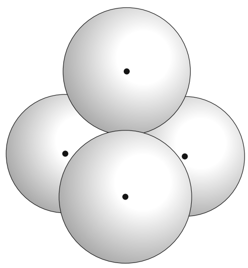
Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz az összefüggés. Megmutatjuk, hogy ekkor $n=$ $=k+1$-re is igaz:

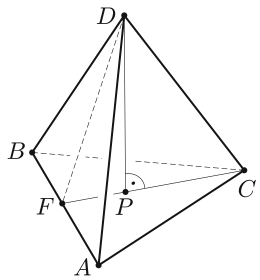
$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{3(k+1)(k+2)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

c) Egy négy golyóból álló kis „gúla" középpontjai 2 cm élű szabályos tetraédert alkotnak. Ha ennek magassága M, akkor az egész építmény magassága $3M+$kétszer a gömbök sugara.





Számítsuk ki a négy középpont által meghatározott tetraéder magasságát. Az oldallap magassága $\sqrt{3}$ cm. Az FPD derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{3}$ cm, egyik befogója $\sqrt{3}/3$ cm, másik befogója M. Ebből $M=\sqrt{24}/3$ cm. Az egész építmény magassága $3M+2$ cm $\approx 6{,}9$ cm.

6. *A hangerőt a hanghullámok intenzitása határozza meg, amelynek mértékegysége* $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. *Az egyenlőnek érzékelt hangerő-különbségek egyenlő intenzitás-arányokat takarnak. A hangerő mértékegysége a decibel.*

Az emberi fül ingerküszöbe az $I_0=10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. *Ezt nevezzük* 0 *decibelnek. Bármely más* I *intenzitású hang hangerejét a* $H=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$ dB *képlet adja meg.*

a) Hány dB *a* $3\cdot10^{-9}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ *intenzitású halk beszéd?* (*3 pont*)

b) Mekkora a mennydörgés intenzitása, ha a hangereje 125 dB? (*4 pont*)

c) Az intenzitást 5*-szörösére növelve hány* dB *hangerő-emelkedést érünk el?* (*3 pont*)

Az érzékelt hangmagasság a hang rezgésszámával áll összefüggésben. Az egyenlőnek hallott hangközök egyenlő rezgésszám-arányokat takarnak. Pl. ha egy hangot egy másiknál egy oktávval magasabbnak érzékelünk, akkor a rezgésszáma az előbbiének 2*-szerese. A rezgésszám a hangmagasság függvényében tehát exponenciálisan nő.*

A kromatikus skála az oktávot 12 *egyenlő hangközre, ún. félhangokra osztja. Ha egy hang egy másiknál félhanggal magasabb (pl. C és Cisz), akkor a rezgésszáma* $\sqrt[12]{2}$*-szöröse az előbbiének.*

d) Hányszorosa a nagyterc hangközben (négy félhang) a magasabb hang rezgésszáma a mélyebbének? (Pontos arányszámot adjon meg.) (*2 pont*)

e) Adjunk képletet, amellyel egy tiszta zenei hangközről a rezgésszámok x *aránya ismeretében kiszámíthatjuk, hogy hány félhangnyi távolságot jelent.* (*4 pont*)

Megoldás.

a) $$H=10\cdot\lg\frac{3\cdot10^{-9}}{10^{-12}}\ \mathrm{dB}=10\cdot\lg300\ \mathrm{dB}=34{,}8\ \mathrm{dB}.$$

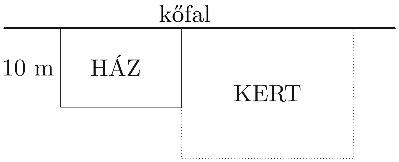
b) $$\begin{aligned}125&=10\cdot\lg\tfrac{I}{10^{-12}},\\ 12{,}5&=\lg(10^{12}I),\\ 10^{12{,}5}&=10^{12}I,\\ I&=\sqrt{10}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}=3{,}16\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.\end{aligned}$$

c) $$10\lg\tfrac{5I_1}{I_0}-10\lg\tfrac{I_1}{I_0}=10\lg(5I_1)-10\lg I_0-(10\lg I_1-10\lg I_0)=$$
$$=10\lg(5I_1)-10\lg I_1=10\lg5+10\lg I_1-10\lg I_1=10\lg5\approx7\ \mathrm{dB}.$$

d) $$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4=\sqrt[3]{2}.$$

e) $$\left(\sqrt[12]{2}\right)^n=x,\quad x^{12}=2^n,\quad n=\log_2x^{12}=12\cdot\log_2x.$$

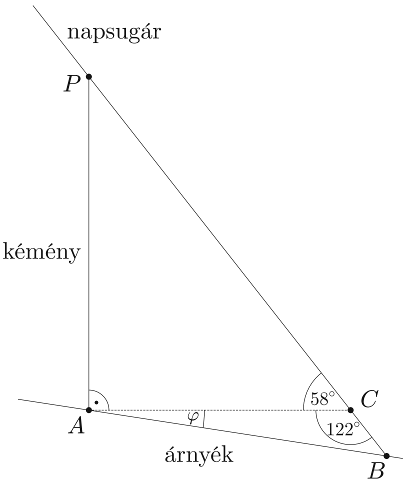
7. *a) A ferde háztetőn egy kémény árnyéka épp a tető lejtésének irányába esik. Mekkora a tető dőlésszöge, ha a kémény* 1 m *magas, árnyéka* 86 cm, *és ugyanekkor a kertben növő* 120 cm-*es napraforgó árnyéka* 75 cm? (*8 pont*)



b) A telken a ház mellett szeretnénk elkeríteni egy 450 m^2*-es, téglalap alakú kiskertet. Mekkorák legyenek a kiskert oldalai, hogy a legrövidebb kerítést kelljen építeni? (Ahol fal van, nem kell kerítés. A kert mélysége legalább akkora legyen, mint a házé.)* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A napraforgó árnyékának hosszából kiszámítva a napsugarak $\operatorname{arctan}\frac{120}{75}=58°$-os szögben érik a talajt. A PAC derékszögű háromszögben kiszámítjuk az AC hosszúságot:

$$AC=\frac{75}{120}\cdot 1\text{ m}=0{,}625\text{ m}.$$



Az ABC háromszögre a szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{0{,}86}{0{,}625}=\frac{\sin 122°}{\sin\beta},$$

amiből $\sin\beta=0{,}6163$ és így $\beta=38{,}05°$ (mivel csak hegyesszög lehet). Ebből $\varphi=19{,}95°$.

A tető a vízszinteshez 19,95°-ban hajlik.

b) A kőfalra merőleges oldalt x-szel jelölve a kerítés hossza $K(x)=2x-10+$ $+450/x$, $x\geqslant 10$.

$$K'(x)=2-\frac{450}{x^2}=\frac{2x^2-450}{x^2}=\frac{2(x-15)(x+15)}{x^2}.$$

A nevező pozitív. A tört előjele a számlálótól függ. Az értelmezési tartományon belül $x=15$-re 0 a derivált, kisebb x-ekre negatív, nagyobbakra pozitív. A $K(x)$ függvény 15-ig szigorúan monoton csökken, utána szigorúan monoton nő, így a minimumhely $x=15$.

A kiskert oldalai 15 m és 30 m hosszúak.

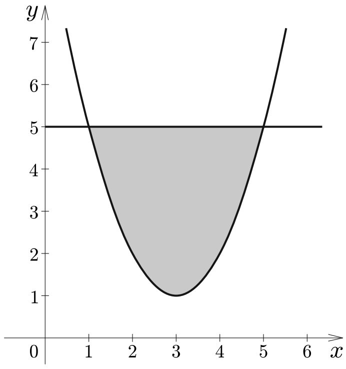
8. *Számítsuk ki a derékszögű koordinátarendszerben az egyenlőtlenségekkel megadott két ponthalmaz pontos területét:*

a) $6(x+y)-2\leqslant x^2+y^2\leqslant 6(x+y)+7$. (*7 pont*)

b) $(x-3)^2+1\leqslant y\leqslant 5$. (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A két egyenlőtlenséget rendezve $(x-3)^2+(y-3)^2 \leqslant 25$, illetve $(x-3)^2+(y-3)^2 \geqslant 16$ adódik. A vizsgált alakzat egy körgyűrű, melyet a $(3;3)$ középpontú, 4, illetve 5 egység sugarú körök határolnak. A két kör területének különbsége $25\pi-16\pi=9\pi$.

b) $(x-3)^2+1 \leqslant 5$ megoldása $1 \leqslant x \leqslant 5$. A két függvényt ezen az intervallumon integráljuk, a terület a két integrál különbsége.



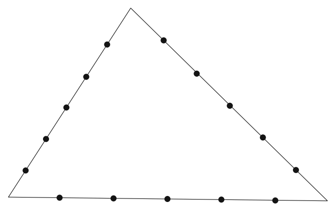
$$\int_1^5 5\,\mathrm{d}(x)=[5x]_1^5=20,$$

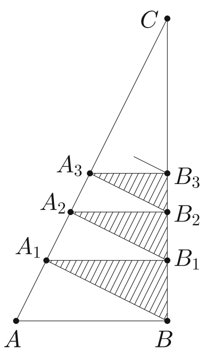
$$\int_1^5 (x^2-6x+10)\,\mathrm{d}(x)=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+10x\right]_1^5=\frac{28}{3},$$

$$T=20-\frac{28}{3}=\frac{32}{3}.$$

9. *a*) *A háromszög oldalain* 5–5–5 *pontot jelöltünk ki. Hány háromszöget határoz meg a tizenöt pont?*





Az ABC derékszögű háromszög AB befogója 10 *egység, BC befogója* 20 *egység hosszúságú.*

A_1 a B csúcsból az AC oldalra állított merőleges, B_1 az A_1-ből BC-re állított merőleges talppontja. Ugyanígy A_2 a B_1-ből AC-re állított merőleges, B_2 az A_2-ből BC-re állított merőleges talppontja, és így tovább.

b) *Számítsuk ki az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 szakasz hosszát.* (*5 pont*)

c) *Az eljárást a végtelenségig folytatva keletkezik a vonalkázással jelölt háromszögek végtelen sorozata. Számítsuk ki a háromszögek területének összegét.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Egy oldalon levő három pont nem alkot háromszöget.

A háromszög csúcsai lehetnek három különböző oldalon, az ilyen esetek száma $5\cdot5\cdot5=125$.

Ha két csúcs egy adott oldalra esik, a harmadik csúcs egy másikra, akkor a lehetőségek száma $\binom{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$. A két oldalt $3\cdot 2=6$-féleképpen választhatjuk ki, az ilyen háromszögek száma tehát $6\cdot 50=300$.

A tizenöt pont összesen 425 háromszöget határoz meg.

b) A nagy háromszög átfogója $10\sqrt{5}$. Az ábrán a derékszögű háromszögek mind hasonlók, mert szögeik egyenlők. Az oldalarányok egyenlőségét több lépésben egymás után alkalmazva:

$$\frac{A_1B_1}{A_1B}=\frac{A_1B}{10}=\frac{20}{10\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ebből előbb $A_1B=\frac{20}{\sqrt{5}}$, majd $A_1B_1=\frac{400}{50}=8$. Hasonlóan:

$$\frac{A_2B_2}{A_2B_1}=\frac{A_2B_1}{A_1B_1}=\frac{A_2B_1}{8}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $A_2B_1=\frac{16}{\sqrt{5}}$, és így $A_2B_2=\frac{16^2}{5\cdot 8}=6{,}4$. Végül

$$\frac{A_3B_3}{A_3B_2}=\frac{A_bB_2}{A_2B_2}=\frac{A_3B_2}{6{,}4}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $A_3B_2=\frac{12{,}8}{\sqrt{5}}$, és így $A_3B_3=\frac{163{,}84}{5}:6{,}4=5{,}12$ egység.

c) Az A_1BB_1 háromszög területe $\frac{8\cdot 4}{2}=16$ egység. A területek mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa a háromszögek hasonlóságának négyzete:

$$q=\left(\frac{A_2B_2}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{6{,}4}{8}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

A mértani sor összegképletébe behelyettesítve a háromszögek együttes területe

$$16\cdot\frac{1}{1-\frac{16}{25}}=16\cdot\frac{25}{9}=\frac{400}{9}=44{,}4 \text{ területegység.}$$

Deák Anna
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 5194. *Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle=2CAB\sphericalangle$. Az AB oldal a beírt kört az E pontban érinti, a C-ből induló szögfelezőt az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AF=2BE$.*

(*4 pont*)