A témába vágó további feladatok

1. feladat (Kürschák verseny 1990/2). Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen K, a hozzáírt körök középpontjai A_0, B_0, C_0. Jelölje A_1 a BC oldal és a BKC szög felezőjének, B_1 az AC oldal és az AKC szög felezőjének, C_1 pedig az AB oldal és az AKB szög felezőjének a metszéspontját. Igazoljuk, hogy az A_0A_1, B_0B_1 és C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek át.

2. feladat (IMO 2019 Shortlist G2 – Surányi János emlékverseny 2020/1). Legyen ABC hegyesszögű háromszög, az A, B és C-ből induló magasságok talppontjai legyenek rendre D, E, F. Legyen k_b és k_c a BDF és CDE háromszögek beírt köre, ezek érintsék a DF és DE szakaszokat rendre az M és N pontokban. Az MN egyenesnek a k_b és k_c körökkel vett másik metszéspontja rendre P és Q. Igazoljuk, hogy $MP = NQ$.

3. feladat (IMO 2001/5). Az ABC háromszögben legyen AP a $BAC\sphericalangle$ felezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $ABC\sphericalangle$ felezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\sphericalangle = 60°$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.

Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

Füredi Erik

60. Rátz László Vándorgyűlés

2021. július 1–3.

BOLYAI TÁRSULAT

A koronavírus-világjárvány miatt a Bolyai János Matematikai Társulat a 2021. évi vándorgyűlést online formában rendezte meg. Az eseményről, illetve annak előkészületeiről, az online formáról hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában (`https://ematlap.hu/hirek-ujdonsagok-2021-4/1120-a-60-online-ratz-laszlo-vandorgyules`).

Nagyon sajnáltuk, hogy nem találkozhattunk személyesen, de az online-nak előnye is van: utólag az összes előadás megtekinthető a vándorgyűlés honlapján (`https://www.bolyai.hu/60-ratz-laszlo-vandorgyules`).

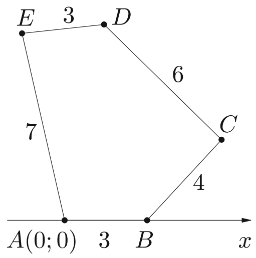
A 2021. évi Beke Manó Emlékdíjas tanárok méltatását is meghallgathattuk, a díjazottak: **Czimmermann József, Dr. Máder Attila, Fonyóné Németh Ildikó, Hujter Bálint, Kozma Lászlóné, Molnár Judit** és **Dr. Molnár István** (megosztott díj) és **Tomcsányi Szabó Katalin.**

Az általános iskolás és középiskolás tanárversenyt is online rendezték meg, a feladatokat és az eredményeket külön közöljük.

A 2022-es vándorgyűlés tervezett helyszíne már harmadik éve Eger, nagyon reméljük, hogy ezúttal már személyesen vehetünk részt ezen a nagy múltú és színvonalas eseményen.

A középiskolai tanárok versenyének feladatai

1. A 2020–2021-es tanév kezdetén Kiss tanár úr osztályában a „Szereted-e a matekot?” kérdésre a tanulók 50-50%-a válaszolt igennel illetve nemmel. A tanév végén megismételt kérdésre már az igen válaszok aránya 70%-ra nőtt, míg a nem válaszok aránya 30%-ra csökkent. A tanév során a diákok p%-a változtatta meg a véleményét. Mennyi a különbség p maximális és minimális értéke között? (A) 0; (B) 20; (C) 40; (D) 60; (E) 80.



2. Az $ABCDE$ konvex ötszög oldalainak hossza $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 6$, $DE = 3$, $EA = 7$. Az ötszöget az ábrán látható módon elhelyezzük a koordinátarendszerben úgy, hogy az A csúcs az origóban, a B pedig az x tengely pozitív felén helyezkedjen el. Ezután az ötszöget az óramutató járásának megfelelően elkezdjük görgetni az x tengelyen. Melyik oldal fogja érinteni az x tengely $(2021; 0)$ pontját? (A) AB; (B) BC; (C) CD; (D) DE; (E) EA.

3. A 10, 2, 5, 2, 4, 2, x számok átlaga, mediánja és módusza valamilyen sorrendben egy nem állandó számtani sorozat három egymást követő tagja. Mennyi x lehetséges értékeinek összege? (A) 3; (B) 6; (C) 9; (D) 17; (E) 20.

4. Hány különböző kétjegyű pozitív egész számmal osztható $2^{24} - 1$? (A) 4; (B) 8; (C) 10; (D) 12; (E) 14.

5. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 6$ és $BC = 3$. M a CD oldal azon pontja, melyre $AMD\sphericalangle = BMA\sphericalangle$. Mekkora az $AMD\sphericalangle$? (A) 30°; (B) 60°; (C) 72°; (D) 75°; (E) 80°.

6. Hány természetes számokból álló $(a; b; c; d)$ számnégyes megoldása az alábbi egyenletnek?

$$a \lg 2 + b \lg 3 + c \lg 5 + d \lg 7 = 2021$$

(A) 0; (B) 1; (C) 4; (D) 2021; (E) végtelen sok.

7. Ha $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 5$ és $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 6$, akkor mekkora $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ értéke? (A) 1; (B) $\sqrt{3}$; (C) 3; (D) 11; (E) 30.

8. Két kőműves közül az egyik 10, a másik pedig 9 óra alatt tud egy kéményt felfalazni. Amikor együtt dolgoznak, akkor sokat beszélgetnek, ezért romlik a teljesítményük, és így együttesen óránként 10 téglával kevesebbet tudnak beépíteni. Együttes munkával 5 óra alatt tudják felépíteni a kéményt. Hány téglából áll a kémény? (A) 500; (B) 900; (C) 950; (D) 1000; (E) 1800.

9. Egy reggeli során Viki családjának minden tagja azonos térfogatú tejeskávét ivott. A kávé és tej mennyisége csészéről csészére változott, de minden pohár tartalmazta mindkét összetevőt. Viki a teljes tejmennyiség negyedét, a kávénak pedig a hatodát itta meg. Hány személyből áll Viki családja? (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

10. Az A, B, C halmazokat „minimális metszetű halmaztriónak” nevezzük, ha $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$, $A, B, C \neq \emptyset$ és az $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ halmazok páronként különbözőek. Pl. az $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$ halmazok ilyen tulajdonságúak. Legyen n a $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz részhalmazaiból alkotható „minimális metszetű halmaztriók” száma. Mekkora n értéke, ha a trión belül a halmazok sorrendjét nem vesszük figyelembe? (A) 27; (B) 64; (C) 384; (D) 540; (E) 1280.

11. Legyen B az $A_1A_2\dots A_n$ szabályos n-szögön kívül egy olyan pont, melyre az A_1BA_2 háromszög szabályos, B, A_1, A_n pedig egy másik szabályos sokszög három egymást követő csúcsa. Mekkora lehet n legnagyobb értéke? (A) 6; (B) 9; (C) 12; (D) 18; (E) 42.

12. Hány olyan $1 \leqslant n \leqslant 1000$ pozitív egész szám van, amely előállítható két négyzetszám különbségeként? (A) 250; (B) 500; (C) 750; (D) 999; (E) 1000.

13. Artúr király 25 lovagja egy kör alakú asztalnál ül. A király véletlenszerűen kiválaszt közülük hármat és elküldi őket, hogy öljék meg a közelben tartózkodó gonosz sárkányt. Jelölje P annak valószínűségét, hogy a kijelölt lovagok között legalább kettő az asztalnál egymás szomszédja volt. P-t redukált törtalakban felírva mennyi a számláló és a nevező összege? (A) 5; (B) 57; (C) 67; (D) 113; (E) 287.

14. Az osztály matematika órán Tünde nénitől a faktoriális fogalmát tanulta. Dávid lelkes volt, és kiszámolta 1-től 20-ig a természetes számok szorzatát, majd a kapott 19-jegyű számot felírta a táblára. Szünetben azonban valaki letörölt néhány számjegyet, így most a táblán a következő egyenlőség látható:

$$20! = 24329020\square81766\square\square\square\square\square,$$

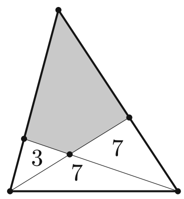
ahol a $\square$-ek helyén álló számjegyek már nem láthatók. Mennyi a letörölt számjegyek összege? (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 8; (E) 10.

15. Az $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ másodfokú függvényekre

$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$. Ha $h(11) = 181$, akkor mekkora $h(6)$ értéke? (A) 31; (B) 36; (C) 41; (D) 46; (E) többféle is lehet.

16. Egy háromszöget felosztunk három háromszögre és egy négyszögre úgy, hogy a háromszög két csúcsát összekötjük a velük szemközti oldal egy-egy pontjával. A három háromszög területe az ábra szerint 3, 7, 7 területegység. Mekkora a szürke négyszög területe? (A) 15; (B) 17; (C) $\frac{35}{2}$; (D) 18; (E) $\frac{55}{3}$.



17. A $48, 84, 108, \dots$ sorozat tagjai két számtani sorozat megfelelő tagjainak összeszorzásával jönnek létre. Mekkora a sorozat 9. tagja? (A) 0; (B) 32; (C) 126; (D) 180; (E) 420.

18. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesülnek az alábbi feltételek:

$$a > b > c > d, \quad a + b + c + d = 2022, \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2022.$$

Mekkora a lehetséges értékeinek száma? (A) 0; (B) 1; (C) 502; (D) 503; (E) 2021.

19. Az alábbi táblázat vázlatosan mutatja be az Országos Pontyfogó Bajnokság eredményeit:

Fogott pontyok száma (n)	0	1	2	3	…	13	14	15
Az n pontyot fogott versenyzők száma	9	5	7	23	…	5	2	1

A Sporthorgász magazin így számolt be a rendezvényről:

- A győztes 15 pontyot fogott.

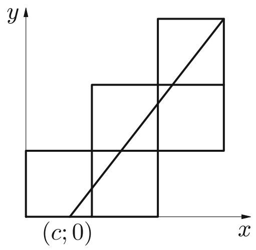
- Azok, akik legalább 3 pontyot fogtak, azok átlagosan 6 halat tudtak felmutatni a mérlegelésnél.
- Azok, akik legfeljebb 12 pontyot fogtak, azok neve mellé átlagosan 5 hal került be az eredménylistába.

Hány pontyot fogtak összesen a bajnokság résztvevői? (A) 936; (B) 943; (C) 960; (D) 1024; (E) 2021.

20. R, L, V olyan természetes számok, melyekre

$$R + L + V = 21.$$

Mennyi a $R \cdot L \cdot V + R \cdot L + L \cdot V + V \cdot R$ kifejezés maximumának értéke? (A) 221; (B) 480; (C) 482; (D) 490; (E) 512.



21. Öt egységnégyzetet az ábrán látható módon elhelyezünk egy koordinátarendszerben. A $(c; 0)$ és a $(3; 3)$ pontokat összekötő szakasz a kijelölt tartományt két egyenlő területű részre osztja fel. Mekkora a c értéke? (A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{3}{5}$; (C) $\frac{2}{3}$; (D) $\frac{3}{4}$; (E) $\frac{4}{5}$.

22. Az $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ halmazból véletlenszerűen kiválasztunk előbb három számot $\{a_1, a_2, a_3\}$, majd a maradék 997 elemből még hármat $\{b_1, b_2, b_3\}$. Legyen a_1, a_2, a_3 egy téglatest alakú doboz, b_1, b_2, b_3 pedig egy szintén téglatest alakú tégla három, egy csúcsból kiinduló élének hossza. Legyen P annak a valószínűsége, hogy megfelelő elforgatással a tégla kilógás nélkül elhelyezhető a dobozban. P-t redukált törtalakban felírva mennyi a számláló és a nevező összege? (A) 4; (B) 5; (C) 7; (D) 10; (E) 12.

23. Jelölje n a 2021 felírásainak számát $2021 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ formában, ahol $0 \leqslant a_i \leqslant 99$ ($a_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, 2, 3$). Például egy lehetséges felírási lehetőség: $2021 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 67 \cdot 10 + 51$. Mekkora n értéke? (A) 3; (B) 9; (C) 202; (D) 203; (E) 420.

24. Két doboz mindegyikében fehér és fekete golyók vannak. A két dobozban együttesen 25 golyó található. Becsukott szemmel mindkét dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy-egy golyót. Ha annak a valószínűsége, hogy mindkettő fekete lesz $\frac{27}{50}$, akkor mi a valószínűsége annak, hogy mindkét kihúzott golyó fehér lesz? (A) $\frac{1}{50}$; (B) $\frac{2}{50}$; (C) $\frac{4}{50}$; (D) $\frac{5}{50}$; (E) Nem határozható meg egyértelműen.

25. Z, a hangya az ABC szabályos háromszög A csúcsából indul, és minden lépése során véletlenszerűen átmászik a háromszög egyik oldalán haladva a másik két csúcs valamelyikébe. Mi a valószínűsége annak, hogy a 6. lépés után ismét az A csúcsban fog tartózkodni? (A) $\frac{8}{32}$; (B) $\frac{10}{32}$; (C) $\frac{11}{32}$; (D) $\frac{12}{32}$; (E) $\frac{16}{32}$.

26. Az $ABCD$ konvex négyszögben $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, $BDA\sphericalangle = BCD\sphericalangle$, $CD = 5$, $DA = 8$ és $BD = 10$. Mekkora a BC oldal hossza? (A) 12; (B) 12,5; (C) 13; (D) 13,5; (E) 145.

27. Egy pozitív egész számot „kígyózónak” nevezünk, ha tízes számrendszerbeli $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakjára teljesül, hogy $a_i < a_{i+1}$, ha i páratlan és $a_i > a_{i+1}$, ha i páros ($i \in \mathbb{N}^+$, $1 \leqslant i < k - 1$). Hány különböző jegyekből álló négyjegyű „kígyózó” szám létezik? (A) 252; (B) 630; (C) 882; (D) 1050; (E) 1260.

28. A Rátz László Vándorgyűlésen a Tanárverseny után az egyik versenyző a társával beszélgetve így értékelte saját teljesítményét:

„80 pontnál többet szereztem. Ha összpontszámomat megmondanám neked, akkor meg tudnád állapítani, hogy hány jó és hány rossz választ adtam. Viszont bármely ennél gyengébb, de 80 pontnál jobb eredmény esetén már nem lennél erre képes."

(A versenyen a versenyzők pontszámát a $p = 30 + 4 \cdot j - r$ képlettel határozzák meg, ahol j és r jelöli rendre a jó, illetve a rossz válaszok számát, és a megválaszolatlan kérdésekért nem jár pontlevonás.)

Hány kérdésre nem adott választ a versenyző? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

29. Legyen H azon r $(0 < r < 1)$ racionális számok halmaza, amelyek végtelen periodikus tizedestört alakja $0{,}abcabcabc\ldots = 0{,}\dot{a}b\dot{c}$, ahol a, b, c nem feltétlenül különböző számjegyek. Felírva H elemeinek redukált tört alakját, hányféle számlálót kapunk? (A) 630; (B) 642; (C) 648; (D) 660; (E) 998.

30. Egy szabályos pénzérmét egymás után 15-ször feldobva rögzítjük a fejek és az írások sorrendjét. Ezután megvizsgáljuk a közvetlenül egymás után következő dobáspárokat. Azt állapítottuk meg, hogy a sorozatban pontosan két FF, három FI, négy IF és öt II dobáspár fordult elő. Hány különböző sorrend szerint alakulhatott ki a feltételeknek megfelelő dobássorozat? (A) 120; (B) 560; (C) 1568; (D) 5005; (E) 2 522 520.

A feladatsort **Fonyóné Németh Ildikó** és **Fonyó Lajos** állította össze

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. Molnár István (Békéscsabai Andrássy Gyula Gimn.)
2. Fridrik Richárd (Hódmezővásárhely, Eötvös József Technikum)
3. Kallós Béla (Nyíregyháza, Szent Imre Katolikus Gimn.)
4. Balla Éva (Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn.)
5. Kasztl Rozália (Fonyód, Mátyás Király Gimn.)
6. Pituk Andrea Mária (Mátészalkai Esze Tamás Gimn.)
7. Káplár Veronika (Marcali Berzsenyi Dániel Gimn.) és
Vértes Judit (Budapest, Kölcsey Ferenc Gimn.)
9. Bakos Enikő (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn.) és
Baloghné Cseh Judit (Szolnok, Varga Katalin Gimn.).

Az általános iskolai tanárok versenyének* eredménye

1. Moróné Pálos Zsuzsanna (Budapest, Újbudai Teleki Blanka Ált. Isk.)
2. Tóth Gabriella (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.)
3. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.),
4. Miklós Ildikó (Vámosmikolai Ált. Tagisk.) és
Paróczay Eszter (Gödöllői Premontrei Szent Norbert Ált. Isk. és Gimn.)
6. Borbélyné Rostaházi Krisztina (Székesfehérvár, Ciszterci Szent István Gimn).

* Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait nem közöljük.